1 Całki nieoznaczone: całkowanie jako operacja (prawie) odwrotna do różniczkowania

1.1 Podstawowe definicje

Def. Funkcję F nazywamy *funkcją pierwotną* funkcji f, określonej w przedziale otwartym $\mathcal{P}$ (skończonym lub nieskończonym), jeśli $F'(x) = f(x)$ dla każdego $x \in \mathcal{P}$.

Przykłady. Funkcja $\sin x$ jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$, bo $(\sin x)' = \cos x$. Również funkcja $\sin x + C$, gdzie C jest dowolną stałą, jest funkcją pierwotną funkcji $\cos x$. Funkcją pierwotną dla e^x jest ta sama funkcja e^x.

Jeśli funkcja f jest określona w przedziale *domkniętym* $a \leqslant x \leqslant b$, to funkcję F nazywamy jej funkcją pierwotną, jeśli $F'(x) = f(x)$ dla $a < x < b$ oraz zachodzi: $F'_+(a) = f(a)$ i $F'_-(b) = f(b)$.

Tw. Jeśli dwie funkcje F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f w przedziale $\mathcal{P}$ (otwartym lub domkniętym), to te dwie funkcje różnią się między sobą o stałą.

Dow. Ponieważ zachodzi: $F'(x) = G'(x)$, to – na mocy twierdzenia które było przy pochodnych (wniosek z wz. Lagrange'a o wart. średniej) – funkcje te różnią się o stałą: $F(x) = G(x) + C$.

I odwrotnie, funkcja, która powstaje przez dodanie stałej do funkcji pierwotnej funkcji f, jest też funkcją pierwotną funkcji f.

Tak więc wyrażenie: $F(x) + C$ jest ogólną postacią funkcji pierwotnej funkcji f.

CBDO

To ostatnie wyrażenie oznaczamy symbolem

$$\int f(x)\mathsf{d}x,$$

czytamy: "całka $f(x)$ po $\mathsf{d}x$" i nazywamy je *całką nieoznaczoną* funkcji f. Mamy więc:

$$\int f(x)\mathsf{d}x = F(x) + C, \quad \text{gdzie} \quad F'(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\int f(x)\mathsf{d}x = f(x), \tag{2}$$

$$\int \frac{\mathsf{d}F(x)}{\mathsf{d}x}\mathsf{d}x = F(x) + c. \tag{3}$$

Znajdowanie całki nieoznaczonej danej funkcji f lub – innymi słowy – znajdowanie funkcji pierwotnej funkcji f nazywamy *całkowaniem* funkcji f. Całkowanie jest więc procesem (prawie) odwrotnym [1] do różniczkowania.

1.2 Funkcje pierwotne funkcji elementarnych

Jak wynika z samej definicji całki nieoznaczonej, każdy wzór na pochodną jakiejś funkcji daje automatycznie wzór na całkę funkcji otrzymanej po zróżniczkowaniu. Mamy np.: Z wzoru

$$(\sin x)' = \cos x$$

[1] Dlaczego *prawie*? Otóż jeśli weźmiemy jakąś funkcję f, scałkujemy ją, a następnie zróżniczkujemy – to otrzymamy tę samą funkcję f. Natomiast jeśli najpierw funkcję f zróżniczkujemy, a potem scałkujemy, to otrzymamy funkcję f *plus dowolna stała* – więc coś bardzo podobnego, ale jednak nie to samo.

otrzymujemy

$$\int \cos x \mathsf{d}x = \sin x + C.$$

Ze znanych wzorów na pochodne otrzymujemy następujące wzory na funkcje pierwotne:

$$\int 0 \mathsf{d}x = C, \tag{4}$$

$$\int a \mathsf{d}x = ax + C, \tag{5}$$

$$\int x^n \mathsf{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{6}$$

$$\int \cos x \mathsf{d}x = \sin x + C, \tag{7}$$

$$\int \sin x \mathsf{d}x = -\cos x + C, \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\mathsf{d}x = \operatorname{tg} x + C; \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}\mathsf{d}x = -\operatorname{ctg} x + C, \tag{10}$$

$$\int e^x \mathsf{d}x = e^x + C \tag{11}$$

$$\int \frac{\mathsf{d}x}{x} = \ln|x| + C, \tag{12}$$

$$\int \frac{\mathsf{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\mathsf{d}x = \arcsin x + C, \tag{13}$$

$$\int \frac{\mathsf{d}x}{1+x^2}\mathsf{d}x = \operatorname{arctg} x + C, \tag{14}$$

$$\int x^a \mathsf{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a \neq -1 \tag{15}$$

1.3 Ogólne wzory na całkowanie

Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Zachodzą wówczas następujące wzory.

Tw.

$$\int (f(x) + g(x))\mathsf{d}x = \int f(x)\mathsf{d}x + \int g(x)\mathsf{d}x.$$

Dow. Mamy bowiem

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\left(\int f(x)\mathsf{d}x + \int g(x)\mathsf{d}x\right) = f(x) + g(x).$$

CBDO

Tw.

$$\int af(x)\mathsf{d}x = a\int f(x)\mathsf{d}x, \quad \text{gdzie} a - \text{stała}.$$

Dow.

$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\left(a\int f(x)\mathsf{d}x\right) = a\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}x}\int f(x)\mathsf{d}x = af(x).$$

Tw. : (Wzór na *całkowanie przez części:*) Dla f, g takich, że f', g' są ciągłe zachodzi

$$\int f(x)g'(x)\mathsf{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathsf{d}x$$

Dow. Zróżniczkujmy obie strony powyższej równości. Mamy:

$$f(x)g'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f'(x)g(x).$$

CBDO

Przykł.

$$\int xe^x\mathsf{d}x = \int x(e^x)'\mathsf{d}x = xe^x - \int x'e^x\mathsf{d}x = xe^x - \int e^x\mathsf{d}x = xe^x - e^x.$$

Przykł.

$$\int \ln x\mathsf{d}x = \int x' \ln x\mathsf{d}x = x\ln x - x\int (\ln x)'\mathsf{d}x = x\ln x - x\int x\frac{1}{x}\mathsf{d}x = x\ln x - x + C.$$

Tw. (wzór na *całkowanie przez podstawienie*, lub na *zamianę zmiennych w całce*):

$$\int g(f(x))\frac{\mathsf{d}f(x)}{\mathsf{d}x}\mathsf{d}x = \int g(y)\mathsf{d}y\Big|_{y=f(x)}$$

Uwaga. Krócej ten wzór możemy zapisać, oznaczając $y = f(x)$ i $z = g(y)$. Wtedy mamy:

$$\int z\frac{\mathsf{d}y}{\mathsf{d}x}\mathsf{d}x = \int z\mathsf{d}y.$$

Dow. Dowód opiera się na odwróceniu wzoru na różniczkowanie funkcji złożonej. Oznaczmy $G(y) = \int g(y)\mathsf{d}y$. Mamy:

$$[G(f(x))]' = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x);$$

biorąc teraz funkcję pierwotną od obu stron, mamy

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x)\mathsf{d}x = \int [G(f(x))]'\,\mathsf{d}x = G(f(x)) = G(y)|_{y=f(x)} = \int g(y)\mathsf{d}y\Big|_{y=f(x)}$$

CBDO

Przykł.

$$\int g(ax)\mathsf{d}x = \frac{1}{a}\int g(y)\mathsf{d}y, \quad \text{gdzie } \ y = ax.$$

Przykł.

$$\int f(x+a)\mathsf{d}x = \int f(y)\mathsf{d}y, \quad \text{gdzie } \ y = x + a.$$

Przykł. Obliczmy całkę:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathsf{d}x.$$

Zrobimy to za pomocą podstawienia $y = x^2$. Mamy:

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathsf{d}x = \|\ y = x^2, x\mathsf{d}x = \tfrac{1}{2}\mathsf{d}y\| = \frac{1}{2}\int \frac{\mathsf{d}y}{1+y} = \frac{1}{2}\ln(1+y) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

Przykł. W następującej całce podstawimy $x = \sin t$, zakładając, że $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathsf{d}x = \| \; x = \sin t, \mathsf{d}x = \cos t\mathsf{d}t \| = \int \cos^2 t\mathsf{d}t;$$

tę całkę liczymy całkując przez części:

$$\int \cos^2 t\mathsf{d}t = \int (\sin t)' \cos t\mathsf{d}t = \sin t \cos t - \int \sin t(cost)'\mathsf{d}t = \sin t \cos t + \int \sin^2 t\mathsf{d}t$$

$$= \sin t \cos t + \int \mathsf{d}t - \int \cos^2 t\mathsf{d}t,$$

skąd mamy

$$\int \sqrt{1-x^2}\mathsf{d}x = \int \cos^2 t\mathsf{d}t = \frac{1}{2}(\sin t \cos t + t) = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x).$$

Uwaga. Poprawność całkowania możemy sprawdzić, różniczkując wynik; po zrobieniu tego powinniśmy otrzymać funkcję podcałkową.

Uwaga. Funkcją elementarną nazywamy funkcję wymierną, trygonometryczną, wykładniczą, lub jedną z odwrotności tychże. Rozpatrzmy teraz zbiór funkcji, powstałych z elementarnych przez branie ich sumy, iloczynu, ilorazu, złożenia albo kombinacji tychże. Pochodną każdej z tych funkcji można znaleźć, posługując się wzorami na pochodną sumy, iloczynu, ilorazu bądź złożenia funkcji. *Z całkami jest inaczej:* Gdy musimy znaleźć funkcję pierwotną funkcji z powyższej klasy, to taka pochodna może się już nie dać wyrazić przez funkcje elementarne. Tak jest np. z całkami: $\int e^{-x^2}\mathsf{d}x$ czy $\int \sqrt{1+k^2\sin^2 x}\mathsf{d}x$, $k^2 \neq 1$.

Podkreślmy, że obie te funkcje pierwotne *istnieją* – zgodnie z powyższym twierdzeniem, że każda funkcja ciągła posiada funkcję pierwotną. Powyższe funkcje pierwotne istnieją, tyle że się nie wyrażają przez funkcje elementarne: Pierwsza całka to tzw. *funkcja błędu*, a druga to *całka eliptyczna.*

Tak więc *nie dla każdej funkcji* da się funkcję pierwotną wyrazić przez funkcje elementarne. W pozostałej części tego rozdziału będziemy rozważać te klasy funkcji, dla których da się to zrobić.

1.4 Rekurencyjne metody obliczania całek

Załóżmy, że mamy jakiś ciąg funkcji $\{f_n\}(x)$ i że chcemy obliczyć całki $I_n = \int f_n(x)\mathsf{d}x$ Metoda rekurencyjna polega na obliczeniu całki dla $n = 1$ (lub $n = 0$) i na umiejętności sprowadzenia liczenia $n-$tej całki do całki o numerze $n-1$ (lub wcześniejszej).

To był ogólny (tak ogólny, że ogólnikowy) przepis; przyjrzyjmy się, jak to się przekłada na praktykę.

Przykł. Obliczyć całkę

$$I_n = \int e^{-x}x^n\mathsf{d}x.$$

We wzorze na I_n wykonajmy całkowanie przez części w następujący sposób:

$$I_n = \int e^{-x}x^n\mathsf{d}x = \int (-)(e^{-x})'x^n\mathsf{d}x = -e^{-x}x^n - (-)\int e^{-x}nx^{n-1}\mathsf{d}x = -e^{-x}x^n + nI_{n-1};$$

aby sfinalizować liczenie całki, potrzebujemy jeszcze wyrażenia na I_0:

$$I_0 = \int e^{-x}\mathsf{d}x = -e^{-x}.$$

Ostatecznie więc

$$I_n = -e^{-x}x^n + nI_{n-1} = -e^{-x}x^n - ne^{-x}x^{n-1} - n(n-1)I_{n-2} = \dots$$

$$= -e^{-x}[x^n + nx^{n-1} + n(n-1)x^{n-2} + \dots + n!x] + I_0 = -n!e^{-x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) + C.$$

Przykł. Weźmy teraz:

$$I_n = \int \frac{\mathsf{d}x}{(1+x^2)^n}.$$

Mamy:

$$I_1 = \int \frac{\mathsf{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x.$$

Teraz policzmy:

$$I_n = \int \frac{x'\mathsf{d}x}{(1+x^2)^n} = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int x\left(\frac{1}{(1+x^2)^n}\right)'\mathsf{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^n} - (-n)\int x\frac{2x}{(1+x^2)^{n+1}}\mathsf{d}x$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^{n+1}}\mathsf{d}x = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2nI_n - 2nI_{n+1},$$

skąd mamy

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}I_n + \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n}. \tag{16}$$

1.5 Całki z funkcji wymiernych

Nazywamy w ten sposób całkę, gdzie funkcją podcałkową jest *funkcja wymierna*:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdzie $P(x), Q(x)$ – wielomiany.

Liczenie całki wykonujemy w kilku krokach.

Będziemy zakładać, że stopień licznika jest *niższy* od stopnia mianownika. Gdyby tak nie było, to

I. *wykonujemy dzielenie wielomianów (z resztą)* i możemy zapisać:

$$P(x) = w(x)\cdot Q(x) + r(x),$$

gdzie $w(x)$ – wynik dzielenia, a $r(x)$ – reszta, przy czym $\deg r < \deg Q$. Mamy w ten sposób:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = w(x) + \frac{r(x)}{Q(x)},$$

gdzie $w(x)$ jest wielomianem, który umiemy scałkować, zaś w $\frac{r(x)}{Q(x)}$ stopień licznika jest mniejszy od stopnia mianownika – tak jak dalej potrzeba.

II. *Rozkładamy mianownik na czynniki.* Niedługo poznamy twierdzenie z algebry, które mówi, że:

Tw. Dowolny wielomian o współczynnikach rzeczywistych rozkłada się na czynniki stopnia co najwyżej drugiego, tzn. postaci: $x - a$ (czynniki liniowe) oraz $x^2 + bx + c$ (kwadratowe), dla których $\Delta < 0$.

Uwaga. Liczba a z czynnika liniowego jest *pierwiastkiem* wielomianu; z tw. Bézout mamy, że jeżeli a jest pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$, to wielomian $Q(x)$ dzieli się przez $x - a$ bez reszty, tzn. można zapisać: $Q(x) = \tilde{Q}(x)(x - a)$, gdzie $\tilde{Q}(x)$ jest wielomianem stopnia o 1 niższego niż $Q(x)$. Oraz dokładniej: Jeśli a jest $k-$krotnym pierwiastkiem wielomianu $Q(x)$, to wielomian $Q(x)$ dzieli się przez $(x-a)^k$ bez reszty, tzn. można zapisać: $Q(x) = \tilde{Q}(x)(x - a)^k$, gdzie $\tilde{Q}(x)$ jest wielomianem stopnia o k niższego niż $Q(x)$.

Dla trójmianów kwadratowych *nierozkładalnych* jest podobnie, ale zagłębienie się w temat wymaga znajomości liczb zespolonych, więc odkładamy to do czasu, gdy się z nimi zaznajomimy.

III. Trzecim krokiem jest *rozkład na ułamki proste.*

Def. *Ułamkiem prostym* nazywamy wyrażenie postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k} \quad \text{lub} \quad \frac{Cx + D}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m},$$

gdzie $A, a; C, D, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Uwaga: W mianowniku ostatniego wyrażenia występuje postać kanoniczna trójmian kwadratowego, który nie ma pierwiastków rzeczywistych.

I teraz!!

IV. **Tw.** Funkcja wymierna $P(x)/Q(x)$ jest sumą ułamków prostych, których mianowniki są czynnikami wielomianu $Q(x)$.

Tw. (o rozkładzie na ułamki proste): Każda funkcja wymierna: $\frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie $\deg P < \deg Q$, daje się zapisać jako suma ułamków prostych, których mianowniki są czynnikami wielomianu $Q(x)$. Dokładniej: Jeżeli w rozkładzie $Q(x)$ na czynniki pojawia się wyrażenie $(x - a)^k$, to wśród ułamków prostych znajdują się wyrazy:

$$\frac{A_1}{x-a}, \ \frac{A_2}{(x-a)^2}, \ \ldots, \ \frac{A_m}{(x-a)^k};$$

jeżeli zaś w rozkładzie $Q(x)$ na czynniki pojawia się $((x - \alpha)^2 + \beta^2)^m$, to wśród ułamków prostych znajdą się wyrazy:

$$\frac{C_1 x + D_1}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}, \ \frac{C_2 x + D_2}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^2}, \ \ldots \ \frac{C_m x + D_m}{((x-\alpha)^2 + \beta^2)^m}.$$

Wyznaczenie konkretnych wartości współczynników stojących przy ułamkach prostych odbywa się przez porównanie obu postaci funkcji wymiernej: Postaci wyjściowej: $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, oraz otrzymanej z rozkładu na ułamki proste.[2]

[2]Gdy wszystkie ułamki proste są odwrotnościami wielomianów pierwszego stopnia, to współczynniki można wyznaczyć znacznie prościej.

"Jak to działa", zobaczmy na przykładach.

Przykł. Rozłóżmy na ułamki proste funkcję wymierną

$$f(x) = \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} \tag{17}$$

Zgodnie z powyższym twierdzeniem, rozkład na ułamki proste będzie miał postać:

$$\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x-3}.$$

Współczynniki A, B, C wyznaczamy, sprowadzając prawą stronę do wspólnego mianownika. Mamy:

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)} &= \frac{A(x-2)(x-3) + B(x-3) + C(x-2)^2}{(x-2)^2(x-3)} \\ &= \frac{(B+C)x^2 + (5A+B-4C)x + 6A - 3B + 4C}{(x-2)^2(x-3)},\end{aligned}$$

co daje równania:

$$A + C = 0; \quad -5A + B - 4C = 1; \quad 6A - 3B + 4C = -1.$$

Rozwiązanie tego układu równań daje:

$$A = -2, \quad B = -1, \quad C = 2.$$

Przykł. Weźmy teraz: $f(x) = \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$. Rozkład na ułamki proste ma postać:

$$f(x) = \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}. \tag{18}$$

Współczynniki A, B, C, D, E wyznaczamy z porównania obu stron po sprowadzeniu prawej do wspólnego mianownika, co daje:

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x-2)(x^2+1) + (Dx+E)(x-2)$$

skąd otrzymujemy układ równań na współczynniki:

$$\begin{aligned}\text{wsp. przy} \quad x^4: &\quad A + B = 0 \\ \text{wsp. przy} \quad x^3: &\quad -2B + C = 0 \\ \text{wsp. przy} \quad x^2: &\quad 2A + B - 2C + D = 2 \\ \text{wsp. przy} \quad x^1: &\quad -2B + C - 2D + E = 2 \\ \text{wsp. przy} \quad x^0: &\quad A - 2C - 2E = 13.\end{aligned}$$

Rozwiązując ten układ równań, dostajemy:

$$A = 1, \ B = -1, \ C = -2, \ D = -3, \ E = -4$$

co daje rozkład na ułamki proste:

$$f(x) = \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2}. \tag{19}$$

Twierdzenie o rozkładzie na ułamki proste sprowadza całkowanie funkcji wymiernej do całkowania ułamków prostych. Zobaczymy zaraz, jak obliczać funkcje pierwotne z takich ułamków prostych.

1. Zacznijmy od ułamków prostych postaci $\frac{A}{(x-a)^k}$. Podstawiając $y = x - a$, mamy

$$\int \frac{A\mathsf{d}x}{(x-a)^k} = A \int \frac{\mathsf{d}y}{y^k} = \begin{cases} A\ln(x-a) & \text{dla} \quad k = 1, \\ \frac{A}{1-k} \cdot \frac{1}{(x-a)^{k-1}} & \text{dla} \quad k > 1. \end{cases}$$

2. Gdy mamy ułamek prosty: $\frac{Cx+D}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}$, to całka nieoznaczona z tego wyrażenia sprowadza się do obliczenia dwóch całek:

$$\int \frac{\mathsf{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} \quad \text{oraz} \quad \int \frac{(x-\alpha)\mathsf{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m}.$$

2.1. Przy pierwszej całce podstawiamy $y = x - \alpha$ i otrzymujemy całkę $\int \frac{\mathsf{d}y}{(y^2+\beta^2)^m}$, w której z kolei podstawiamy $y = \beta z$ i po tym podstawieniu dostajemy całkę $\int \frac{\mathsf{d}z}{(z^2+1)^m}$. Dla $m = 1$ funkcją pierwotną jest $\operatorname{arctg} z$, zaś dla $m > 1$ wyprowadziliśmy już na tę całkę wzór rekurencyjny (16).

2.2. Przy całce drugiego typu, podstawiamy: $y = (x-\alpha)^2$. Mamy: $\mathsf{d}y = 2(x-\alpha)\mathsf{d}x$, skąd otrzymujemy:

$$\int \frac{(x-\alpha)\mathsf{d}x}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^m} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathsf{d}y}{(y+\beta^2)^m} = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) & \text{dla} \quad m=1, \\ -\frac{1}{2(k-1)} \cdot \frac{1}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{k-1}} & \text{dla} \quad k>1. \end{cases}$$

Tymi to sposobami zawsze możemy obliczyć całkę z funkcji wymiernej. (Oczywiście, jeśli znamy pierwiastki mianownika $Q(x)$).

Obliczmy teraz dla naprzykładu całki z f. wymiernych (17) i (18).

Przykł. (17), cd:

$$\int \frac{x-1}{(x-2)^2(x-3)}\mathsf{d}x = -\int \frac{\mathsf{d}x}{x-2} - 2\int \frac{\mathsf{d}x}{(x-2)^2} + 2\int \frac{\mathsf{d}x}{x-3}$$

$$= -\ln|x-2| + \ln|x-3| + \frac{2}{x-2} + C.$$

Przykł. (18), cd:

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\mathsf{d}x = \int \frac{\mathsf{d}x}{x-2} - \int \frac{(x+2)\mathsf{d}x}{x^2+1} - \frac{(3x+4)\mathsf{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \int \frac{\mathsf{d}x}{x-2} - \int \frac{x\mathsf{d}x}{x^2+1} - 2\int \frac{\mathsf{d}x}{x^2+1} - 3\int \frac{x\mathsf{d}x}{(x^2+1)^2} - 4\int \frac{\mathsf{d}x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \ln|x-2| - \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - 2\operatorname{arctg} x + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} - 4\frac{\mathsf{d}x}{(x^2+1)^2}.$$

Ostatnią całkę liczymy wykorzystując wzór rekurencyjny (16); dla $n = 2$ mamy:

$$I_2 = \int \frac{\mathsf{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}I_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x.$$

Ostatecznie

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}\mathsf{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} - 4\operatorname{arctg} x + C.$$

Uwaga. Analizując metodę całkowania funkcji wymiernych widzimy, że całka z funkcji wymiernej jest postaci:

$$R(x) + A\ln U(x) + B\operatorname{arctg} V(x),$$

gdzie A, B – stałe, zaś $R(x), U(x), V(x)$ są funkcjami wymiernymi.

1.6 Całki z funkcji wymiernych od funkcji trygonometrycznych

Niech $R(u, v)$ oznacza funkcję trygonometryczną dwóch zmiennych u, v. Rozważmy całkę:

$$\int R(\sin x, \cos x)\mathsf{d}x.$$

Okazuje się, że całkę tego typu można sprowadzić do całki z funkcji wymiernej poprzez podstawienie trygonometryczne.

Podstawieniem, które działa zawsze (aczkolwiek często nie jest sposobem optymalnym ze względu na ilość rachunków) jest *podstawienie uniwersalne*: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Musimy wyrazić $\sin x, \cos x, \mathsf{d}x$ przez t. Mamy:

$$\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1, \text{ skąd } \operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}, \text{ co daje } \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1}{1+t^2}$$

Mamy dalej

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Ponadto:

$$\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos^2\frac{x}{2} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

co daje

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Wreszcie, z równości: $x = 2\operatorname{arctg} t$ mamy

$$\frac{\mathsf{d}x}{\mathsf{d}t} = \frac{2}{1+t^2}.$$

Ostatecznie mamy wszystko co jest potrzebne do podstawienia:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \mathsf{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathsf{d}t.$$

Przykł.

$$I = \int \frac{\mathsf{d}x}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t}\frac{2}{1+t^2}\mathsf{d}t = \int \frac{\mathsf{d}t}{t} = \ln|t| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

Uwaga. Powyższe podstawienie uniwersalne działa zawsze. Prowadzi jednak często do funkcji wymiernej o dużych stopniach licznika i mianownika. Z tego względu należy je stosować tylko w ostateczności, jeśli inne podstawienia trygonometryczne nie dadzą się zastosować. Te inne podstawienia to:

$$t = \sin x, \quad t = \cos x \quad t = \operatorname{tg} x.$$

Istnieją przepisy, kiedy takie podstawienia stosować. Nie będziemy ich tu wypisywać (zainteresowany Czytelnik znajdzie je np. w książce Fichtenholza, t. II).

1.7 Całki z wyrażeń typu $R(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}})$

Rozpatrzmy teraz całki postaci

$$\int R(x, \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}})\mathsf{d}x,$$

(zakładamy tu, że $\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta} \neq \mathrm{const}$, bo inaczej problem byłby trywialny), gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną swoich argumentów. Okazuje się, że takie całki można sprowadzić do całek z funkcji wymiernych. Realizuje się to za pomocą następującego podstawienia:

$$t = \sqrt[n]{\frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}}. \quad \text{tzn.} \quad t^n = \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta},$$

co znaczy, że x wyraża się *wymiernie* przez t i w ten sposób otrzymujemy w zmiennej t całkę z funkcji wymiernej, którą liczymy znanymi nam już metodami.

Konkretnie, mamy tutaj:

$$x = \frac{\beta - \delta t^n}{\gamma t^n - \alpha}, \quad \mathrm{d}x = n(\alpha\delta - \beta\gamma)\frac{t^{n-1}}{(\gamma t^n - \alpha)^2}\mathrm{d}t$$

Przykł.

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)^2}} = \int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{x+1}.$$

Zgodnie z powyższym przepisem, podstawiamy:

$$t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}, \quad x = \frac{t^3+1}{t^3-1}, \quad \mathrm{d}x = -\frac{6t^2\mathrm{d}t}{(t^3-1)^2}$$

i nasza całka przyjmuje postać

$$I = \int \frac{-3\mathrm{d}t}{t^3-1}.$$

Powyższe podstawienie sprowadziło więc całkę do całki wymiernej. Zachęcam Czytelnika, aby powyższą całkę policzył dalej. Wynik jest następujący:

$$I = \frac{1}{2}\ln\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2} + \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2t-1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.8 Całki z wyrażeń typu $R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$; podstawienia Eulera

Ostatnią z omawianych teraz klas całek będą całki

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x, \tag{20}$$

gdzie $R(u,v)$ jest funkcją wymierną. Całki powyższego rodzaju także wyrażają się przez funkcje elementarne. Istnieje kilka sposobów obliczania całek (20); my omówimy tu *podstawienia Eulera.*

Odnośnie trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c zakładamy, iż nie jest on pełnym kwadratem, gdyż w tym przypadku moglibyśmy wyciągnąć zeń pierwiastek i mieć całkę wymierną.

1. *Pierwsze podstawienie Eulera* można stosować w przypadku, gdy $a>0$. Podstawiamy wówczas:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x \tag{21}$$

(lub, aby t występowało tylko po jednej stronie równości: $t = \sqrt{ax^2+bx+c} + \sqrt{a}x$. Po podniesieniu do kwadratu równości (21) *wyraz* ax^2 *skasuje się po obu stronach* i zostanie

$$bx + c = t^2 - 2\sqrt{a}xt$$

skąd mamy

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2\sqrt{a}t}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{2\sqrt{a}t + b},$$

$$\mathsf{d}x = 2\frac{\sqrt{a}t^2 + bt + c\sqrt{a}}{(b + 2\sqrt{a}t)^2}\mathsf{d}t.$$

Widać, że przy tym podstawieniu zarówno x (oraz oczywiście $\mathsf{d}x$, jak i $\sqrt{ax^2+bx+c}$ wyrażają się *wymiernie* przez t; w ten sposób doprowadziliśmy całkę (20) do całki z funkcji wymiernej.

2. *Drugie podstawienie Eulera* można stosować w przypadku, gdy $c > 0$. Wówczas bierzemy:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}. \tag{22}$$

Jeśli podniesiemy obie strony równości (22) do kwadratu, odejmiemy po obu stronach c i podzielimy przez x, to otrzymamy:

$$ax + b = xt^2 + 2\sqrt{c}t$$

i mamy:

$$x = \frac{2\sqrt{c}t - b}{a - t^2}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{a - t^2},$$

$$\mathsf{d}x = 2\frac{\sqrt{c}t^2 - bt + \sqrt{c}a}{(a - t^2)^2}\mathsf{d}t.$$

Znów więc x, $\mathsf{d}x$ oraz $\sqrt{ax^2+bx+c}$ wyrażają się *wymiernie* przez t; w ten sposób znowu doprowadziliśmy całkę (20) do całki z funkcji wymiernej.

3. Wreszcie, *trzecie podstawienie Eulera* można stosować w przypadku, gdy trójmian kwadratowy $ax^2 + bx + c$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste; oznaczmy je λ oraz μ. Wiemy, że w takim przypadku trójmian ten rozkłada się na czynniki liniowe:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \lambda)(x - \mu). \tag{23}$$

Wtedy podstawiamy:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - \lambda). \tag{24}$$

Podnosząc równość (24) do kwadratu i korzystając z (23), skracamy przez wspólny czynnik $(x - \lambda)$ i otrzymujemy znów równanie pierwszego stopnia na x:

$$a(x - \mu) = t^2(x - \lambda)$$

skąd dostajemy:

$$x = \frac{\lambda t^2 - a\mu}{t^2 - a}, \qquad \sqrt{ax^2+bx+c} = \frac{a(\lambda - \mu)t}{t^2 - a},$$

$$\mathsf{d}x = \frac{2ta(\mu - \lambda)}{(t^2 - a)^2}\mathsf{d}t$$

Uwaga. Może się zdarzyć, że do jakiejś całki można zastosować *więcej niż jedno* podstawienie Eulera!

Pokażemy teraz, *w dowolnej* całce postaci (20) można zastosować któreś z podstawień Eulera (konkretnie, pierwsze lub trzecie). Otóż jeśli trójmian kwadratowy ax^2+bx+c ma pierwiastki rzeczywiste, to można zawsze zastosować podstawienie trzecie. Jeśli natomiast trójmian nie ma pierwiastków rzeczywistych, tzn. $b^2-4ac<0$, to

Przykł. I. Obliczmy całkę

$$\mathcal{I}_I = \int \frac{\mathsf{d}x}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$$

za pomocą pierwszego podstawienia Eulera. Zgodnie z (21) mamy

$$\sqrt{x^2+4x-4} = t-x,$$

skąd wyliczamy

$$x = \frac{t^2+4}{2t+4}, \quad \mathsf{d}x = \frac{2t^2+8t-8}{(2t+4)^2}\mathsf{d}t, \quad \sqrt{x^2+4x-4} = t-x = \frac{t^2+4t-4}{2t+4}$$

i wstawiając do całki wyjściowej, mamy

$$\mathcal{I}_I = 2\int \frac{\mathsf{d}t}{t^2+4}.$$

Tę całkę już łatwo policzyć, dostając (zachęcam Czytelnika, aby uzupełnił te rachunki)

$$\mathcal{I}_I = \operatorname{arctg}\left[2(x+\sqrt{x^2+4x-4})\right] + C.$$

Przykł. II. Obliczmy całkę

$$\mathcal{I}_{II} = \int \frac{\mathsf{d}x}{x-\sqrt{x^2-x+1}}$$

za pomocą drugiego podstawienia Eulera. Zgodnie z (22) mamy

$$\sqrt{x^2-x+1} = xt+1;$$

skąd

$$x = \frac{2t+1}{1-t^2}, \quad \mathsf{d}x = \frac{2(t^2+t+1)}{(t^2-1)^2}\mathsf{d}t, \quad \sqrt{x^2-x+1} = \frac{t^2+t+1}{1-t^2},$$

i w zmiennej t całka przybiera postać

$$\mathcal{I}_{II} = \int \frac{2(t^2+t+1)}{t-t^2}\mathsf{d}t$$

a więc otrzymaliśmy – jak trzeba – całkę z wyrażenia wymiernego. Czytelnika zachęcam do dokończenia i sprawdzenia rachunku.

Przykł. III. Przetestujmy wreszcie *trzecie podstawienie Eulera* na całce

$$\mathcal{I}_{III} = \int \frac{\mathsf{d}x}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}.$$

Zgodnie z (24) bierzemy

$$\sqrt{4x-x^2} = xt,$$

skąd wyliczamy

$$x = \frac{4}{t^2+1}, \quad \mathsf{d}x = -8\frac{t\mathsf{d}t}{(t^2+1)^2}, \quad \sqrt{4x-x^2} = xt = \frac{4t}{t^2+1}, \quad 2x-3 = \frac{5-3t^2}{t^2+1}$$

i w zmiennej t całka przyjmuje postać

$$\mathcal{I}_{III} = 2\int \frac{\mathsf{d}t}{3t^2-5}$$

więc znów w postaci *wymiernej*, tak jak powinno być. Znów wykładowca zachęca Czytelnika do dokończenia i sprawdzenia rachunków.

2 Całka Riemanna