

1 Układy liniowe

Tu będą przykłady układów równań liniowych, najspierw *jednorodnych*.

1. Weźmy układ $\dot{x} = Ax$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ z warunkiem początkowym $x_0 \equiv x(0) \equiv \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Zgodnie z ogólną receptą, liczymy wielomian charakterystyczny macierzy: $w_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 - 4$, którego pierwiastki: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$ są wartościami własnymi A .

Będziemy też tu potrzebować wektorów własnych A :

$$v_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$v_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Pamiętacie, co to jest Ker , czyli jądro? Jądrem macierzy M nazywamy zbiór wektorów x , takich, że $Mx = \mathbf{0}$. Powiedzenie, że i -ty wektor własny v_i jest jądrem macierzy $A - \lambda_i \mathbf{I}$ to to samo, co powiedzieć, że v_i jest rozwiązaniem układu równań $(A - \lambda_i \mathbf{I})v_i = \mathbf{0}$, tzn. $Av_i = \lambda_i v_i$).

Po znalezieniu wektorów własnych, rozkładamy wektor warunku początkowego w bazie wektorów własnych: $x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2$ i znajdujemy, że $c_1 = 3, c_2 = -1$. Mamy dalej

$$x(t) = e^{At} x_0 = e^{At} (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 = 3e^{-t} v_1 - 1 \cdot e^{3t} v_2 = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 3e^{3t} \\ e^{-t} + 3e^{3t} \end{bmatrix}.$$

2. Weźmy teraz układ $\dot{x} = Ax$, gdzie $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ z warunkiem początkowym

$$x_0 \equiv x(0) \equiv \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Postępujemy analogicznie jak uprzednio: liczymy wielomian charakterystyczny macierzy: $w_A(\lambda) = (2 - \lambda)^2 + 1$, którego pierwiastki, tzn. wartości własne A , są tym razem *zespolone*: $\lambda_1 = 2 - i, \lambda_2 = 2 + i$.

Liczb zespolonych bać się tu nie należy. Na pośrednich etapach rachunków (wartości własne, wektory własne) możemy mieć do czynienia z liczbami zespolonymi; ale pod koniec (jeśli się nie pomylimy) muszą one wystąpić w takiej kombinacji, aby końcowy wynik był liczbą rzeczywistą.

Liczymy znów wektory własne A :

$$v_1 = \text{Ker}(A - \lambda_1 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$v_2 = \text{Ker}(A - \lambda_2 \mathbf{I}) = \text{Ker} \begin{bmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$$

(Układy równań z liczbami zespolonymi rozwiązujemy tak samo, jak znane nam układy z liczbami rzeczywistymi).

Rozkładamy wektor warunku początkowego w bazie wektorów własnych:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

i otrzymujemy

$$c_1 = 3 - i, \quad c_2 = 3 + i$$

Stąd rozwiązanie w chwili t jest

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} x_0 = e^{At} (c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 \\ &= (3 - i) e^{(2-i)t} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} + (3 + i) e^{(2+i)t} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 3ie^{-it} + e^{-it} - 3ie^{it} + e^{it} \\ 3e^{-it} - ie^{-it} + 3e^{it} + ie^{it} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

i, przypominając sobie zależności między funkcją wykładniczą (od argumentu urojonego) a funkcjami trygonometrycznymi: $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$, $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$, otrzymujemy ostatecznie rozwiązanie w postaci

$$x(t) = 2e^{2t} \begin{bmatrix} \cos t + 3 \sin t \\ 3 \cos t - \sin t \end{bmatrix}.$$

2 Równania liniowe

2.1 Równania jednorodne

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + y' - 2y = 0$. ($y' = \frac{dy}{dt}$ itd.) Tworzymy równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
2. $y'' - 4y' = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 4\lambda = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 0$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = C_1 e^{4t} + C_2 e^{0t} = C_1 e^{4t} + C_2$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
3. $y'' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 1 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = a_1 e^{it} + a_2 e^{-it}$. Rozwiązanie, zamiast w postaci wykładniczej, można równoważnie zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
4. $y'' + 6y' + 13y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 6\lambda + 13 = 0$, którego pierwiastki to $\lambda_1 = -3 - 4i$, $\lambda_2 = -3 + 4i$. Zatem rozwiązanie ogólne jest postaci: $y = a_1 e^{(-3-4i)t} + a_2 e^{(-3+4i)t} = e^{-3t} (a_1 e^{-4it} + a_2 e^{4it})$, co równoważnie można zapisać w postaci trygonometrycznej: $y = e^{-3t} (C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t)$, C_1, C_2 – dowolne stałe.
5. $y'' - 2y' + y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ posiada jeden pierwiastek podwójny $\lambda = 1$, zatem rozwiązanie ogólne jest $y = (C_1 + C_2 t) e^t$.

2.2 Równania niejednorodne

Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań:

1. $y'' + 4y = e^t$ (*). *i)* Znajdujemy Rozwiązanie Ogólne Równania Jednorodnego (RORJ), tzn. z prawą stroną równą zero: $y'' + 4y = 0$. Równanie charakterystyczne: $\lambda^2 + 4 = 0$ ma pierwiastki: $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Wypisujemy od razu RORJ w postaci trygonometrycznej: $\text{RORJ} = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t$. *ii)* Znajdujemy Rozwiązanie Szczególne Równania Niejednorodnego (RSRN) metodą 'zgadywania': Przewidujemy postać rozwiązania y_N jako: $y_N = Ae^t$, gdzie A jest stałą; po wstawieniu y_N do (*) dostajemy: $5Ae^t = e^t$, skąd $A = \frac{1}{5}$, zatem $\text{RSRN} = \frac{1}{5}e^t$. *iii)* Rozwiązanie Ogólne Równania Niejednorodnego (RSRN) jest sumą RORJ i RSRN: $\text{RORN} = C_1 \sin 2t + C_2 \cos 2t + \frac{1}{5}e^t$.
2. $y'' - 9y = (12t - 8)e^{-3t}$ (**). *i)* RORJ: $\lambda^2 - 9 = 0$ ma pierwiastki $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$. $\text{RORJ} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t}$. *ii)* RSRN: Niejednorodność jest 'zgadywalna', (bo jest postaci: wielomian razy funkcja wykładnicza). Wykładnik niejednorodności pokrywa się z jedną z wartości własnych, zatem RSRN przewidujemy w postaci: $y_N = t(A + Bt)e^{-3t}$, gdzie A i B są stałymi, które musimy wyznaczyć. Po wstawieniu y_N do (**) dostajemy: $(-2B - 6A - 12Bt)e^{-3t} = (12t - 8)e^{-3t}$, skąd, porównując współczynniki przy potęgach wielomianów po obu stronach, dostajemy: $-12Bt = 12t$, $2B - 6A = 8$, skąd $B = -1$, $A = 1$. *iii)* $\text{RSRN} = \text{RORJ} + \text{RSRN} = C_1 e^{3t} + C_2 e^{-3t} + t(1 - t)e^{-3t}$.