Matematyka I - seria 2 zadań domowych - 2009/2010

14 listopada 2009

1. Wykazać, że kresami górnym oraz dolnym zbioru liczb postaci $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, są odpowiednio $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ oraz 0.

2. Wykazać, że kres dolny zbioru liczb postaci $\frac{-x^2}{1+x^4}$, gdzie $x \in \mathbb{R}$, wynosi $-\frac{1}{2}$.

3. Czy zbiór wartości funkcji $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ określonej w przedziale $[0,1]$ ma kres: (a) górny, (b) dolny?

   Wskazówka: Wystarczy udowodnić, że zbiór wartości funkcji jest ograniczony.

4. Wyrazy piąty, siódmy i dwunasty ciągu arytmetycznego a_1, a_2, a_3, ... tworzą kolejne elementy ciągu geometrycznego. Znaleźć iloraz ciągu geometrycznego.

5. Wykazać, że ciąg $a_n = \frac{\alpha_1}{2^1} + \frac{\alpha_2}{2^2} + ... + \frac{\alpha_n}{2^n}$, gdzie α_1, α_2 ..., α_n są cyframi, jest ograniczony z góry.

6. Wykazać, że ciąg $a_n = \frac{n^3}{3} - \frac{n^2}{2} + n - 13$ jest rosnący.

7. Wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}$ jest malejący i ograniczony.

   Wskazówka: Przy dowodzie ograniczoności warto skorzystać z nierówności: $\frac{1}{2k(2k+1)} < \frac{1}{k(k+1)}$.

8. Bezpośrednio z definicji pokazać, że:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{5n^2-1} = \frac{3}{5}$, (c) $\lim_{n\to-\infty}(-n^2-10) = -\infty$.

9. Wykazać, że nie istnieje granica ciągu $a_n = \frac{n+1}{n+3} \cos \frac{2\pi n}{3}$.

   Wskazówka: Wystarczy pokazać, że podciągi a_{3n} oraz a_{3n+1} dążą do różnych granic.

10. Wyznaczyć granice ciągów:

    (a) $a_n = \frac{5n^2+3n+2}{n^2+2}$, (b) $a_n = \frac{4n^3-3n}{n^2+4}$, (c) $a_n = (\frac{2n-5}{5n+2})^2$, (d) $a_n = \frac{4n^3-3n}{5n^5+1}$,
    (e) $a_n = \frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1}$ (f) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{8n^3-3n^2}}$ (g) $a_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}$,
    (h) $a_n = n^2(n - \sqrt{n^2+1})$ (i) $a_n = \sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}$ (j) $a_n = \frac{n-\sqrt{n^2+2n}}{n+1}$
    (k) $a_n = \sqrt[3]{\frac{n-2}{27n+10}}$ (l) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+n}-n}$ (m) $a_n = n\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2n^3+5n^2-7}$
    (n) $a_n = \frac{(\sqrt{n}+3)^2}{n+1}$ (o) $a_n = \frac{(-1)^n}{\log_2 n}$ (p) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+10}$ (r) $a_n = \frac{\binom{n}{2}}{n^2}$
    (s) $a_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+3} - \sqrt{n^2+2n+3}$ (t) $a_n = \frac{n-\sqrt{n^2-1}}{2n-\sqrt{4n^2+n}}$ (u) $a_n = \frac{1+2+3+...+n}{5n^2+n+1}$.

    Wskazówki: (s) Dodać: $0 = -\sqrt[3]{n^3} + \sqrt{n^2}$. (u) Skorzystać ze wzoru $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

11. Wyznaczyć granice dla ciągów o wyrazach ogólnych:

    (a) $a_n = \frac{9^{\log_3 n}}{4^{\log_2 n}}$ (b) $a_n = \log_2(n^4+5n+1) - \log_2(8n^4+3n^2+2)$ (c) $a_n = \arcsin\left(\frac{n}{2n+1}\right)$
    (d) $a_n = \frac{\log_3 n^2}{\log_{27} n}$ (e) $a_n = \frac{\operatorname{arctg} n}{2n+1}$ (f) $a_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+\frac{1}{3^n}}$
    (g) $a_n = \frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$ (h) $a_n = \frac{5\cdot 3^{2n}-1}{4\cdot 9^n+7}$ (i) $a_n = \frac{4^n+2^n}{7^n}$
    (j) $a_n = \frac{3^{n+2}-4^{n+1}}{3^{n+1}+4^{n+2}}$ (k) $a_n = \frac{6^n+2^n\cdot 3^{n-1}+5^n}{4^n-2\cdot 6^{n-1}}$.

12. Przy użyciu twierdzenia o trzech ciągach znaleźć granice ciągów o wyrazach ogólnych:

    (a) $a_n = \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$ (b) $a_n = \frac{2n^2+\sin n!}{4n^2-3\cos n^2}$ (c) $a_n = \sqrt[n]{3+\sin n}$
    (d) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{3^n} + \left(\frac{4}{5}\right)^n}$.

13. Dla jakich wartości parametru k granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{kn^2}{(k-1)n^2+n}$ jest skończona liczba dodatnia?

14. Dla jakich wartości parametru k granicą ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{(k-2)n+1}{(k^2-2k-3)n-2}$ jest: (a) 0; (b) 1; (c) $-\infty$; (d) $+\infty$?

15. Dany jest ciąg o wyrazie ogólnym $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, gdzie $x \in [-1,1]$ oraz $n \in \mathbb{N} \cup 0$. Znaleźć $T_0(x)$ i $T_1(x)$. Posługując się tożsamością trygonometryczną $\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$ pokazać, że $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$. Udowodnić indukcyjnie lub inną metodą, że $T_n(x)$ jest wielomianem stopnia n (wielomiany $T_n(x)$ nazywa się wielomianami Czebyszewa).

16. Bezpośrednio z warunku Cauchy'ego wykazać, że ciąg $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2k(2k+1)}$ jest zbieżny.

Wskazówka: Skorzystać z nierówności: $\frac{1}{2n(2n+1)} < \frac{1}{n(n+1)}$.

17. Obliczyć granicę $0,45 + 0,0045 + 0,000045 + ...$

18. Wyznaczyć granice ciągów o wyrazach ogólnych:

(a) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$ (b) $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ (c) $a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n}$ (d) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n-1}$
(e) $a_n = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3}$ (f) $a_n = \left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^{2n^2+2}$ (g) $a_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^{n/2}$.

19. Wyznaczyć granice ciągów o wyrazach ogólnych:

(a) $a_n = \sqrt{n^{10} - 2n^2 + 2}$ (b) $a_n = \sqrt[n]{2n^3 + 3n^2 + 15}$ (c) $a_n = \sqrt[n]{2^n + 3^{n-1} + 2}$
(d) $a_n = \frac{1}{2n}\cos(n^3) - \frac{3n}{6n+1}$ (e) $a_n = \frac{8^{\log_2 n}}{2^n}$ (f) $a_n = n\big(\ln n - ln(n+2)\big)$
(g) $a_n = \frac{\ln(1+\frac{4}{n})}{\frac{1}{n+3}}$ (h) $a_n = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{2^n}$ (i) $a_n = \frac{n!}{n^n \cdot 2^n}$ (j) $a_n = \frac{\cos n\pi}{2n+1}$
(k) $a_n = \frac{10^n}{n!}$ (l) $a_n = \frac{\mathrm{arctg}(n!+n^2)}{n^2+1}$ (m) $a_n = \frac{(-1)^n + \sin n}{n^3+2n^2+5}$.

20. Obliczyć granice ciągów określonych rekurencyjnie: (a) $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$.

(b) $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n}$.

21. Zbadać zbieżność ciągu określonego rekurencyjnie: $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{c}{x_n}\big)$, gdzie $c > 0$. Jeśli jest on zbieżny, obliczyć jego granicę.

22. Dany jest odcinek o początku w punkcie a oraz końcu w punkcie b. Ciąg x_n budujemy w taki sposób, że x_1 obieramy w połowie odcinka ab, wyraz x_2 obieramy w połowie odcinka x_1b, wyraz x_3 będzie w połowie odcinka x_2b, i tak w nieskończoność. Pokazać, że powstały w ten sposób ciąg rekurencyjny jest zbieżny oraz że $\lim_{n\to\infty} x_n = b$.

23. Ustalić, które z poniższych wyrażeń są tożsamościami, a które równaniami i rozwiązać równania:

(a) $\ln(x^2-1)^3 = 3[\ln(x-1) + \ln(x+1)]$
(b) $\ln(x^2+x) = \ln x + \ln x^2$
(c) $e^x e^{2x} e^{3x} = (e^{2x})^3$
(d) $e^{x^2} e^x = (e^x)^3$.

24. Wykazać następujące związki dla funkcji hiperbolicznych:

(a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ *(jedynka hiperboliczna)*,
(b) $\sinh 2x = 2\sinh x \cdot \cosh x$,
(c) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$.

25. Rozwiązać równania:
(a) $\sinh x + \cosh x = 1$ (b) $\sinh x = 2$ (c) $\cosh x = 2$.

26. Obliczyć: (a) $\cosh(\mathrm{arsinh}\, x)$, (b) $\sinh(\mathrm{arcosh}\, x)$.

27. Wykazać z definicji Cauchy'ego, że $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\dfrac{1}{x} = 0$.

28. Zbadać przy użyciu definicji Heinego, czy istnieje $\lim_{x\to 0} f(x) = \sin^2\frac{\pi}{x}$.

29. Zbadać ciągłość funkcji $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ określonej wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

30. Dla wszystkich $x \neq 0$ funkcja jest określona wzorem $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$. Jaką wartość powinna mieć funkcja w $x = 0$, aby była ciągła dla $x \in \mathbb{R}$.

31. Korzystając z definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, 2[$.

32. Korzystając z definicji ciągłości jednostajnej pokazać, że funkcja $f(x) = x^2$ nie jest ciągła jednostajnie na przedziale $]0, +\infty[$.