

Zadania domowe z Matematyki 1 (I rok)

seria VI

1. Bezpośrednio z definicji całki Riemanna obliczyć $\int_0^b \sin x \, dx$.

Wskazówka:

$$\sin \alpha + \sin 2\alpha + \dots + \sin n\alpha = \frac{\cos \frac{1}{2}\alpha - \cos(n + \frac{1}{2})\alpha}{2 \sin \frac{1}{2}\alpha}.$$

2. Oblicz całki nieoznaczone: a) $\int \frac{dx}{x^2+2x-3}$; a) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{x^2} \, dx$; b) $\int \frac{(e^x-1)(e^{2x}+1)}{e^x} \, dx$; c) $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^3+2x^2+1}} \, dx$; c) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} \, dx$; d) $\int \frac{6x^3-7x^2+8x-2}{2x-3x^2} \, dx$; e) $\int \cos^4 x \, dx$; e) $\int \frac{\sqrt{2 \arctan x - 2}}{1+x^2} \, dx$; f) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{2e^{2x}+3}} \, dx$; g) $\int \frac{\sqrt[3]{3 \ln 2x+1}}{4x} \, dx$; h) $\int x^4 \ln x \, dx$; i) $\int x^3 3^x \, dx$; j) $\int \frac{\ln^3 x}{3x^2} \, dx$; k) $\int 16x^3 \ln x \, dx$; l) $\int \frac{\ln x}{(x+1)^2} \, dx$; l) $\int \frac{2x}{\sin^2 x} \, dx$; m) $\int \frac{1}{2} e^x \sin 2x \, dx$; n) $\int e^{-x} \sin \frac{1}{2}x \, dx$; o) $\int \arccos \sqrt{\frac{x}{x+1}} \, dx$; ó) $\int \frac{dx}{a^x+1}$; p) $\int \frac{dx}{x^4+1}$; q) $\int \frac{e^x}{3+4e^x} \, dx$; r) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x}$; s) $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)^2}$; t) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^2+2x+3} \, dx$; u) $\int \frac{x^3-2x}{x^4-2x^2+1} \, dx$; v) $\int \frac{x^3+4x^2-2x+1}{x(x^3+1)} \, dx$; w) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x}$; x) $\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} \, dx$; y) $\int \frac{2+\sin x \cos x}{(1+\cos^2 x)(3+\sin^2 x)} \, dx$; z) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$; ż) $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \, dx$; ż) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$;

3. Oblicz całki nieoznaczone

a) $\int \frac{\sqrt{x}}{x^2+a^2} \, dx$; b) $\int \frac{1}{x^3-a^3} \, dx$; c) $\int \operatorname{arsinh} x \, dx$; d) $\int \log^3 x \, dx$; e) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x}{\sin 2x + \cos 2x} \, dx$; f) $\int \frac{\sin x + \cos x}{e^{-x} + \sin x} \, dx$; g) $\int \frac{1 - \log x}{x(1 + \log x + \log^2 x)} \, dx$; h) $\int \frac{x^3+4}{(x^2-1)(x^2+3x+2)} \, dx$; i) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x + \sin x} \, dx$; j) $\int \frac{e^x}{(e^x-1)(e^x+3)} \, dx$; k) $\int \frac{1}{x^{2/3}-x^{1/3}} \, dx$; l) $\int \sqrt{5+\sqrt{x}} \, dx$; m) $\int \frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{x}}}} \, dx$; n) $\int \frac{x^{1/4}+5}{x-16} \, dx$

4. Znajdź związki rekurencyjne między:

- I_n i I_{n-1} dla $I_n = \int x^n \log x \, dx$
- I_n i I_{n-2} dla $I_n = \int x^n \sin ax \, dx$

5. Oblicz pole figury płaskiej ograniczonej krzywymi

- (a) $y = \frac{1}{4}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{11}{4}x + 6$;
(b) $x^2 + y^2 = 9$, $y^2 - x^2 = 1$;
(c) $y = \sin x$ i stycznymi do danej krzywej w punktach $A(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2})$ i $B(\frac{1}{2}\pi, 1)$;
(d) $y^3 = x^2$, $y = \sqrt{2-x^2}$.

6. Styczna do wykresu funkcji $y = f(x)$ w punkcie o odciętej $x = a$ tworzy z osią OX kąt $\frac{1}{3}\pi$, w punkcie zaś $x = b$ kąt $\frac{1}{4}\pi$. Obliczyć całki

$$\int_a^b f''(x) \, dx, \quad \int_a^b f'(x)f''(x) \, dx$$

przy założeniu, że funkcja f'' jest ciągła w przedziale $[a, b]$.

7. Dla jakich wartości x funkcja $h(x) = \int_0^x x'e^{-x'^2} \, dx'$ osiąga ekstremum?

8. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$h(x) = \int_0^x \frac{2x' + 1}{x'^2 - 2x' + 2} \, dx'$$

w przedziale $[-1, 1]$.