

Seria 4

Zadanie 1

Stosując regułę de l'Hospitala obliczyć granice:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{1 - \cos x} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\ln x}} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\tan x} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x} & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sqrt{1+2x}}{\ln \cos x} \end{aligned}$$

Zadanie 2

Zbadać przebieg zmienności i naszkicować wykresy funkcji:

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} & \quad f(x) = \left(x - \frac{3}{x} \right) e^{-\frac{2}{x}} & \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 & \quad f(x) = x^2 e^{-x} \\ f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x} & \quad f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} & \quad f(x) = x \arctan x \end{aligned}$$

Zadanie 3

Obliczając kolejne pochodne napisać rozwinięcia Taylora następujących funkcji wokół zera:

1. $\cos^2 2x$ do czwartego nieznikającego wyrazu
2. $\ln(1+x^2)$ do drugiego nieznikającego wyrazu
3. $\sqrt{1+x^2}$ do piątego rzędu włącznie

Zadanie 4

Wielkość $o(x^n)$ nazywamy małą rzędu wyższego niż n jeśli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^n)}{x^n} = 0$$

Oceń prawdziwość następujących stwierdzeń:

1. x^2 jest małą rzędu wyższego niż pierwszy
2. $1 + x + x^2 + x^3$ jest małą rzędu wyższego niż drugi
3. 0 jest małą rzędu wyższego niż pierwszy
4. 7 jest małą rzędu wyższego niż szósty
5. $x^2 + o(x^2)$ jest małą rzędu wyższego niż pierwszy
6. $\sin x$ jest małą rzędu wyższego niż pierwszy
7. $\lim_{x \rightarrow 0} o(x^n) = 0$ dla dowolnego n

Zadanie 5

Przekształcić do postaci wielomian plus mała rzędu wyższego niż wielomian:

$$1 + x + x^2 + o(x) \quad (1 + x + o_1(x))(1 - x + o_2(x)) \quad 1 + (x + o(x)) + (x + o(x))^2$$

Obliczyć granice powyższych wyrażeń przy x dążącym do zera.

Zadanie 6

Korzystając ze znanych rozwinięć Taylora funkcji e^x , $\sin x$, $\cos x$ oraz $\ln(1+x)$ wokół zera napisać rozwinięcia Taylora następujących funkcji wokół zera bez obliczania pochodnych:

1. $\sin x + \cos x$ do piątego rzędu
2. $\frac{\sin x}{x}$ do czwartego rzędu
3. $\sin x \cdot \cos x$ do czwartego rzędu
4. $e^{\sin x}$ do drugiego rzędu
5. $\cos(\sin x)$ do czwartego rzędu
6. $\ln(1+x^3)$ do dziesiątego rzędu
7. $(1+x)\ln(1+x)$ do czwartego rzędu

Zadanie 7

Korzystając ze wzoru Taylora obliczyć granice:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \sin x} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - \sin x}{1 - \cos x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^3)}{\sin x(1 - \cos x)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos x - x}{x^3} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)\ln(1+x) - \sin x - x^2/2}{\ln^2 \cos x} \end{aligned}$$

Zadanie 8

Korzystając ze wzoru Taylora z resztą w postaci Lagrange'a udowodnić następujące nierówności:

$$\begin{aligned} \forall x : \cosh x \geq 1 + \frac{x^2}{2} \quad \forall x \geq 0 : x \leq (1+x)\ln(1+x) \leq x + \frac{x^2}{2} \\ \forall x \in \left] -\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right[: 1 - 4x^2 \leq \cos^2 2x \end{aligned}$$

Zadanie 13

Znaleźć wyrazy trzynastego rzędu w rozwinięciach Taylora następujących funkcji wokół zera:

$$(13+x)^{13} \quad \ln(13+x^2) \quad \frac{x + 3x^3 + 5x^5 + 7x^7 + 9x^9 + 11x^{11} + 13x^{13}}{1 + \cos(13x)}$$