

# 1 Liczby zespolone

## 1.1 Dlaczego nie wystarczają liczby rzeczywiste

W dziejach systemów liczbowych, niejednokrotnie trzeba było rozszerzać istniejące – wynikało to z naturalnych zapotrzebowań.

- Liczby naturalne  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  z działaniami dodawania i mnożenia; są one zawsze wykonalne. Natomiast działanie odwrotne do dodawania, tzn. odejmowanie, jest *nie zawsze* wykonalne w zbiorze  $\mathbb{N}$ , np. równanie:  $x + 3 = 1$  nie ma rozwiązań w  $\mathbb{N}$ . Można jednak sprawić, by odejmowanie stało się wykonalne, *rozszerzając* zbiór  $\mathbb{N}$  o wszystkie rozwiązania równań postaci  $x + a = 0$ ,  $a \in \mathbb{N}$ .
- W zbiorze  $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  jest już wykonalne odejmowanie, natomiast nie zawsze jest wykonalna operacja odwrotna do mnożenia, tzn. dzielenie; innymi słowy, równanie postaci:  $ax = 1$ ,  $a \neq 0$ , nie zawsze ma rozwiązanie w liczbach całkowitych. I znów można zapewnić wykonalność dzielenia, dołączając do  $\mathbb{Z}$  rozwiązania równań postaci  $ax = 1$ ,  $a \neq 0$ . Wynikiem jest zbiór liczb *wymiernych*  $\mathbb{Q}$  jako zbioru ułamków nieskracalnych  $\frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ .
- W zbiorze  $\mathbb{Q}$  (tzn. liczb postaci  $\frac{p}{q}$ , gdzie  $p, q \in \mathbb{Z}$ ) są już wykonalne dodawanie, odejmowanie, mnożenie i dzielenie. Można jednak wprowadzić jeszcze operację *potęgowania* (wywodzącą się z mnożenia):  $a^n = a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $n$  razy). I znów okazuje się, że operacja odwrotna do potęgowania, tzn. *pierwiastkowanie* (tzn. szukanie, dla danej liczby  $a \in \mathbb{Q}$ , takiej liczby  $x$ , że  $x^n = a$ ), *nie zawsze* jest wykonalne (np.  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ; czy Czytelnik pamięta /może zrekonstruować dowód?)  
Zbiór liczb wymiernych można rozszerzać na różne sposoby; najważniejszy z nich to dołączenie do  $\mathbb{Q}$  wszystkich *granic ciągów zbieżnych* o wyrazach wymiernych; prowadzi to do zbioru liczb rzeczywistych. W zbiorze liczb rzeczywistych wyciąganie pierwiastków jest już wykonalne (jeśli są to pierwiastki parzyste, to można je wyciągać jedynie z liczb nieujemnych).

Jednak w zbiorze liczb rzeczywistych mamy jeszcze jeden problem z pierwiastkami: Pierwiastki (parzystych stopni) z liczb *ujemnych*.

Rozpatrzmy podnoszenie do kwadratu i wyciąganie pierwiastka drugiego stopnia. To pierwsze jest zawsze wykonalne i jego wynikiem jest liczba *nieujemna*. Powoduje to, że wyciąganie pierwiastka jest wykonalne tylko dla liczby *nieujemnej*. Tak więc, pozostając w obrębie liczb rzeczywistych, nie ma sensu wyrażenie

$$\sqrt{-1}, \tag{1}$$

gdyż nie istnieje taka liczba rzeczywista, która podniesiona do kwadratu dałaby liczbę ujemną (tu:  $-1$ ).

Tym niemniej, taki “bezsensowny” czy “nieistniejący” obiekt jak  $\sqrt{-1}$  pojawiał się kilkakrotnie w dziejach (średniowiecznej i renesansowej) matematyki i nie można go było ignorować. Problem nabrzmiał w *XVI* wieku, kiedy odkryto metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

gdzie  $a, b, c, d$  są liczbami rzeczywistymi. Dla  $a \neq 0$ , zawsze istnieje przynajmniej jeden pierwiastek tego równania, będący liczbą rzeczywistą.

W XVI w. znaleziono metodę znajdowania rozwiązań (pierwiastków) takich równań dla dowolnych parametrów  $a, b, c, d$ , zwaną *metodą Cardano* (choć wcześniej metodę rozwiązywania znaleźli też Tartaglia i Scipio del Ferro). Cechą charakterystyczną tej metody był jednak fakt, że – mimo iż rozwiązanie było rzeczywiste – aby je otrzymać, trzeba było użyć “nieistniejącej” liczby  $\sqrt{-1}$ . Innymi słowy, trzeba było przejść przez “zakazany obszar”, gdzie pojawia się “nieistniejący” (urojony) obiekt  $\sqrt{-1}$ .

Ale skoro taki obiekt, jak  $\sqrt{-1}$ , okazuje swoją użyteczność, to może nie brońmy się przed nim i pozwólmy mu zaistnieć? Oczywiście, nie jest wyjściem z sytuacji przyjęcie go za liczbę rzeczywistą. Ale gdyby spróbować rozszerzyć pojęcie liczby rzeczywistej, tak by to – ogólniejsze – pojęcie dopuszczało też takie byty jak  $\sqrt{-1}$ .

Czy można tak rozszerzyć zbiór liczb rzeczywistych, aby to rozszerzenie zawierało też takie byty jak  $\sqrt{-1}$ ? Odpowiedź jest pozytywna; zanim jednak o tym powiemy, wyliczmy najpierw własności dodawania i mnożenia, co doprowadzi do pojęcia *ciała*; oraz sprecyzujmy co rozumiemy przez “rozszerzenie”.

## 1.2 Ciała

W zbiorach takich, jak  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{R}$ , wykonalne są działania dodawania i mnożenia oraz ich odwrotności. Bardziej precyzyjnie można powiedzieć, że  $\mathbb{Q}$  oraz  $\mathbb{R}$  są przykładami *ciał*.

**Definicja.** *Ciałem* nazywamy zbiór  $\mathbb{K}$ , w którym można wykonywać działania dodawania: “+” i mnożenia “·”, takie, że  $\mathbb{K}$  jest zamknięty względem tych działań (tzn. nie wyprowadzają one poza zbiór  $\mathbb{K}$ ). “+” i “·” spełniają warunki:

- *łączność*:  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ,  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- *przemienność*:  $a + b = b + a$ ,  $a \cdot b = b \cdot a$ .
- *istnienie elementu neutralnego* (dla “+” i “·”):  $a + 0 = a$ ,  $a \cdot 1 = a$ , przy czym  $1 \neq 0$ .
- *istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego) do danego*:  $a + (-a) = 0$ ,  $a \cdot a^{-1} = 1$  (dla  $a \neq 0$ ).
- *rozdzielność mnożenia względem dodawania*:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

**Definicja.** *Rozszerzeniem* ciała  $\mathbb{K}_0$  przez ciało  $\mathbb{K}$  nazywamy takie ciało  $\mathbb{K}$ , że  $\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}$  oraz działania w  $\mathbb{K}$  stosowane do elementów  $\mathbb{K}_0$  pokrywają się z działaniami w  $\mathbb{K}_0$ . Mówimy też wtedy, że ciało  $\mathbb{K}_0$  jest *podciałem* ciała  $\mathbb{K}$ .

Dwa przykłady ciał, które już znamy, to liczby wymierne  $\mathbb{Q}$  i rzeczywiste  $\mathbb{R}$ . Tutaj  $\mathbb{R}$  jest rozszerzeniem  $\mathbb{Q}$ . **Inne przykłady:**

1. Ciało  $Z_2$ , tzn. zbiór  $\{0, 1\}$  z działaniami:  $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1, 1 + 1 = 0, 0 \cdot 0 = 0, 0 \cdot 1 = 1 + 0 = 1, 1 \cdot 1 = 1$ , jest ciałem (proszę sprawdzić!). Elementami neutralnymi są: 0 dla dodawania oraz 1 dla mnożenia. Ciało  $Z_2$  jest podzbiorem  $\mathbb{R}$ , natomiast *nie jest* podciałem  $\mathbb{R}$ .
2. Zbiór liczb postaci:  $a + b\sqrt{2}$ , gdzie  $a, b$  są liczbami wymiernymi, jest ciałem liczbowym. Oznaczamy je  $Q(\sqrt{2})$ ; jest ono rozszerzeniem ciała liczb wymiernych. (Proszę sprawdzić te stwierdzenia!)
3. Zbiór liczb postaci:  $a + b\sqrt[3]{2}$ , gdzie  $a, b$  są liczbami wymiernymi, *nie jest* ciałem liczbowym (dlaczego?).

4. Natomiast zbiór liczb postaci:  $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ , gdzie  $a, b, c$  są liczbami wymiernymi, jest już ciałem liczbowym. (proszę sprawdzić!)

Nasz problem rozszerzenia ciała  $\mathbb{R}$  możemy więc doprecyzować tak: *Znaleźć rozszerzenie ciała  $\mathbb{R}$  zawierające element, którego kwadrat jest równy  $-1$ .*

**Stwierdzenie.** Jeśli  $\tilde{\mathbb{K}}$  jest takim rozszerzeniem, zaś  $i$  jest elementem takim, że  $i^2 = -1$ , to podzbiór  $\mathbb{C} \in \tilde{\mathbb{K}}$

$$\hat{\mathbb{C}} := \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \quad (2)$$

jest zamknięty ze względu na dodawanie, mnożenie i branie elementu odwrotnego, więc jest podciałem  $\tilde{\mathbb{K}}$ , w szczególności jest też ciałem.

**Dowód:** Operacje dodawania, mnożenia i brania elementu odwrotnego, stosowane do elementów  $\hat{\mathbb{C}}$ , nie wyprowadzają poza ten podzbiór (własność *zamkniętości*). Wynika to z wzorów:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i; \quad (3)$$

$$(a + bi) \cdot (c + di) = a \cdot c - b \cdot d + (ad + bc)i; \quad (4)$$

$$-(a + bi) = (-a) + (-b)i; \quad (5)$$

$$(a + bi)^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i \quad (6)$$

Operacje te określają w podzbiorze  $\hat{\mathbb{C}}$  strukturę podciała.

Ponadto widać, że wszystkie działania na elementach postaci  $a + bi$  nie zależą od rozszerzenia; są one dane wzorami (3)–(6), które nie odwołują się w żaden sposób do rozszerzenia.

### 1.3 Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Wprowadźmy w zbiorze  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  par liczb rzeczywistych działanie dodawania i mnożenia w następujący sposób:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (7)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc). \quad (8)$$

Można sprawdzić bezpośrednimi rachunkami, że tak określona struktura jest ciałem. Zerem jest tu para  $(0, 0)$ ; jedyneką:  $(1, 0)$ ; elementem przeciwnym do  $(a, b)$  jest  $(-a, -b)$ , zaś element odwrotny do  $(a, b)$  to  $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$ .

Tak zdefiniowane ciało nazywamy *ciałem liczb zespolonych* i oznaczamy jako  $\mathbb{C}$ . Daje ono rozwiązanie naszego problemu (tzn. rozszerzenia ciała liczb rzeczywistych). Zawieranie się ciała liczb rzeczywistych w  $\mathbb{C}$  jako podciała dane jest przez utożsamienie  $a \in \mathbb{R}$  z liczbą zespoloną  $(a, 0) \in \mathbb{C}$ , natomiast elementem takim, że  $i^2 = -1$ , można wziąć  $i := (0, 1)$ . Mając to utożsamienie, dostajemy prostszą do rachunków postać liczby zespolonej:

$$(a, b) = (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + bi. \quad (9)$$

(W ten sposób dokonaliśmy utożsamienia  $\mathbb{C}$  z  $\hat{\mathbb{C}}$ ). Postać liczby zespolonej jako pary jest mniej wygodna do rachunków, ale prowadzi do wygodnej interpretacji liczby zespolonej jako *punktu na płaszczyźnie*. Bowiem na iloczyn kartezjański  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  można patrzeć jako na płaszczyznę właśnie; w ten sposób liczba zespolona  $(a, b)$  będzie wektorem o składowej “ $x$ ”-owej równej  $a$  oraz składowej “ $y$ ” równej  $b$ . Taki sposób patrzenia na liczby zespolone podał Gauss na przełomie XVIII i XIX w.

## 1.4 Sprzężenie zespolone

Ważną operacją w ciele liczb zespolonych jest *sprzężenie zespolone*, określane jako:

$$z = a + bi \rightarrow \bar{z} := a - bi. \quad (10)$$

Łatwo sprawdzić (bezpośrednim rachunkiem) następujące własności operacji sprzężenia zespolonego:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \quad \frac{\bar{z}_1}{z_2} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}; \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

Niech  $z = a + bi$ . Wprowadźmy oznaczenia:

$$\Re z := a, \quad \Im z := b; \quad (11)$$

nazywamy je odpowiednio: częścią *rzeczywistą* i *urojoną* liczby  $z$ . Mamy:

$$\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

## 1.5 Postać trygonometryczna

Liczbę zespoloną  $a + bi$  można przedstawić jako punkt na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  o współrzędnych kartezjańskich  $(a, b)$  lub jako wektor o tych składowych. Dodawanie liczb zespolonych odpowiada dodawaniu wektorów.

Punkty na płaszczyźnie możemy też opisywać innymi współrzędnymi- *biegunowymi*:  $(r, \phi)$ . Przejście od współrzędnych kartezjańskich do biegunowych dane jest przez wyrażenia:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

**Definicja.** Jeśli  $z \neq 0$ , to  $\phi \in \mathbb{R}$  takie, że

$$\cos \phi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \phi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

nazywamy *argumentem* liczby  $z$  i oznaczamy przez  $\arg z$ .

Zauważmy, że argument liczby zespolonej wyznaczony jest z dokładnością do wielokrotności  $2\pi$ . Argument  $\phi$  liczby  $z$  spełniającej nierówność  $0 \leq \phi < 2\pi$  nazywamy *argumentem głównym* i oznaczamy  $\text{Arg } z$ .

Przejście od współrzędnych biegunowych do kartezjańskich dane jest wyrażeniami:

$$a = r \cos \phi; \quad b = r \sin \phi$$

Liczbę zespoloną  $z = a + bi$  można więc równoważnie przedstawić w postaci

$$z = r(\cos \phi + i \sin \phi),$$

nazywanej *reprezentacją trygonometryczną* liczby zespolonej  $z$ .

**Przykład.** Niech  $z_1 = 1 + i$ ; mamy:  $z_1 = \sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i) = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ ; promień dla liczby  $z_1$  jest równy  $\sqrt{2}$ , zaś argument  $\text{Arg } z_1 = \frac{\pi}{4}$ .

## 1.6 Moduł i jego własności

**Definicja.** *Modułem*  $|z|$  liczby zespolonej  $z = a + bi$  nazywamy

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (12)$$

Bezpośrednio z definicji i z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej  $z = a + bi = r(\cos \phi + i \sin \phi)$  wynikają własności

- $|z| \in \mathbb{R} \cup \{0\}$ ,
- $|z| = r$ .

**Stwierdzenie.** Zachodzą związki:

1.  $|z|^2 = z\bar{z}$ ,
2.  $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ ,
3.  $|\bar{z}| = |z|$ ,
4.  $|\operatorname{Re}z| \leq |z|$ ,  $|\operatorname{Im}z| \leq |z|$ ; tym bardziej:  $\operatorname{Re}z \leq |z|$ ,  $\operatorname{Im}z \leq |z|$ .
5.  $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right|$ ,
6.  $\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ,
7.  $\arg \bar{z} = -\arg z$ .

**Dowód:**

1. Niech  $z = a + ib$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Z bezpośredniego rachunku mamy:

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

2. Udowodniona właśnie równość mówi że  $z\bar{z} = |z|^2$ ; zastosujmy ją do  $z = z_1 z_2$ :

$$|z_1 z_2|^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \bar{z}_1 z_2 \bar{z}_2 = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

3. Oczywiście.

4. Niech  $z = a + bi$ . Mamy:  $|\operatorname{Re}z| = |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$ . Drugą nierówność pokazujemy analogicznie.

5. Mamy  $1 = z \frac{1}{z}$ . Biorąc moduły obu stron i korzystając z 2) mamy:  $1 = |z| \left| \frac{1}{z} \right|$ . Zatem  $\frac{1}{|z|} = \left| \frac{1}{z} \right|$ . Stąd i z 2) wynika 4).

6. Niech  $z_i = r_i(\cos \phi_i + i \sin \phi_i)$ ,  $i = 1, 2$ . Mamy:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos \phi_1 + i \sin \phi_1) \cdot r_2(\cos \phi_2 + i \sin \phi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \phi_1 \cos \phi_2 - \sin \phi_1 \sin \phi_2) + i(\cos \phi_1 \sin \phi_2 + \cos \phi_2 \sin \phi_1)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\phi_1 + \phi_2) + i \sin(\phi_1 + \phi_2)] \end{aligned}$$

skąd wynika 5). Powyższą równość można też wypowiedzieć słowami: “Przy mnożeniu liczb zespolonych promienie się mnożą a argumenty dodają”.

7. W reprezentacji biegunowej:

$$\bar{z} = r(\cos \phi - i \sin \phi) = r(\cos(-\phi) + i \sin(-\phi))$$

**Wniosek (wzór de Moivre’a).** Jeżeli  $z = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ , to dla  $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = r^n [\cos(n\phi) + i \sin(n\phi)].$$

**Uwaga.** Wygodne jest zastosowanie następującego skrótowego zapisu liczby postaci  $(\cos \phi + i \sin \phi)$ :

$$\cos \phi + i \sin \phi = e^{i\phi}.$$

Mamy:

$$e^{i(\phi+\psi)} = e^{i\phi} e^{i\psi}, \quad \overline{e^{i\phi}} = e^{-i\phi}.$$

W chwili obecnej, symbol  $e^{i\phi}$  jest jedynie wygodnym *oznaczeniem* i nie ma on żadnego związku z liczbą  $e$  i funkcją wykładniczą. Związek ten pojawi się dopiero na analizie, stając się *twierdzeniem*.

**Stwierdzenie.** Dla dowolnych  $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$  zachodzą nierówności:

1.  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ,
- 1'.  $|z_1 + z_2 + \dots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \dots + |z_n|$
2.  $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$ .

**Dowód:**

1. Weźmy kwadrat lewej strony nierówności:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \cdot \overline{(z_1 + z_2)} = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_2 \\ &= |z_1|^2 + z_2 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + |z_2|^2 = |z_1|^2 + z_2 \bar{z}_1 + \overline{z_1 \bar{z}_2} + |z_2|^2 \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| + |z_2|^2 \\ &\leq |z_1|^2 + 2|(z_1 \bar{z}_2)| + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \end{aligned}$$

(wykorzystaliśmy tu p. 4) poprzedniego stwierdzenia).

1'. Dowód indukcyjny, którego pierwszy krok stanowi powyższa nierówność.

2. Z udowodnionej właśnie nierówności 1. wynika

$$\begin{aligned} |z_1| &= |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|, \\ |z_2| &= |z_2 - z_1 + z_1| \leq |z_2 - z_1| + |z_1|, \end{aligned}$$

skąd

$$\begin{aligned} |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 - z_2|, \\ |z_2| - |z_1| &\leq |z_1 - z_2|, \end{aligned}$$

i teza.

## 1.7 Pierwiastkowanie liczb zespolonych

**Definicja.** Niech  $w \in \mathbb{R}$ . *Pierwiastkiem* stopnia  $n$  z liczby  $w$  nazywamy taką liczbę zespoloną  $z$ , że  $z^n = w$ .

**Stwierdzenie.** Niech  $n \in \mathbb{N}$ . Każda niezerowa liczba zespolona posiada  $w \in \mathbb{R}$  dokładnie  $n$  różnych pierwiastków  $n$ -tego stopnia. Jeśli  $w = r(\cos \phi + i \sin \phi)$ , to są one dane wzorami

$$z_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\phi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\phi + 2k\pi}{n} \right) = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\phi + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \quad (13)$$

gdzie  $\sqrt[n]{r}$  – pierwiastek arytmetyczny.

**Dowód:** Liczba  $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$  jest takim pierwiastkiem

$$\iff |z| = \sqrt[n]{r} \text{ oraz } n\alpha = \phi + 2k\pi \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff |z| = \sqrt[n]{r} \text{ oraz } \alpha = \frac{\phi + 2k\pi}{n} \text{ dla pewnego } k \in \mathbb{Z}.$$

Dwie liczby całkowite  $k$  i  $k'$  dają równoważne argumenty  $\alpha = \frac{\phi + 2k\pi}{n}$  i  $\alpha' = \frac{\phi + 2k'\pi}{n}$

$$\iff \frac{\phi + 2k\pi}{n} - \frac{\phi + 2k'\pi}{n} \text{ jest wielokrotnością } 2\pi$$

$$\iff k - k' \text{ jest wielokrotnością } n.$$

Stąd wynika, że wszystkie różne pierwiastki otrzymamy dla  $k = 0, 1, \dots, n-1$ .

**Przykład.** Weźmy  $w = -4$  i obliczmy  $\sqrt[4]{-4}$ . Mamy:  $w = (\sqrt{2})^4(-1+0i) = (\sqrt{2})^4(\cos \pi + i \sin \pi)$ . Istnieją cztery pierwiastki:

$$k = 0 : \quad z_0 = (\sqrt{2}) \left[ \cos \left( \frac{\pi + 0 \cdot 2\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 0 \cdot 2\pi}{4} \right) \right] = 1 + i$$

$$k = 1 : \quad z_1 = (\sqrt{2}) \left[ \cos \left( \frac{\pi + 1 \cdot 2\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 1 \cdot 2\pi}{4} \right) \right] = -1 + i$$

$$k = 2 : \quad z_2 = (\sqrt{2}) \left[ \cos \left( \frac{\pi + 2 \cdot 2\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 2 \cdot 2\pi}{4} \right) \right] = -1 - i$$

$$k = 3 : \quad z_3 = (\sqrt{2}) \left[ \cos \left( \frac{\pi + 3 \cdot 2\pi}{4} \right) + i \sin \left( \frac{\pi + 3 \cdot 2\pi}{4} \right) \right] = 1 - i$$

**Przykład.** Obliczmy pierwiastki  $n$ -tego stopnia z 1. Promień liczby 1 jest równy 1, a argument  $\text{Arg}=0$ . Mamy więc  $n$  pierwiastków, danych wyrażeniami:

$$\epsilon_k = \left[ \cos \left( \frac{2k\pi}{n} \right) + i \sin \left( \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Wszystkie te pierwiastki leżą na okręgu jednostkowym o środku w punkcie  $(0, 0)$  układu współrzędnych, w wierzchołkach  $n$ -kąta foremnego.

**Uwaga.** Mamy:  $\epsilon_k = (\epsilon_1)^k$ .

**Uwaga.** Jeśli  $z$  jest *którymkolwiek* pierwiastkiem z liczby zespolonej  $w \neq 0$ , to **wszystkie** pierwiastki  $n$ -tego stopnia można otrzymać z  $z$  mnożąc ją przez wszystkie  $\epsilon_k$ . Mamy więc wszystkie te pierwiastki dane wzorem równoważnym z (13)

$$z, z\epsilon_1, z\epsilon_2, \dots, z\epsilon_{n-1}.$$

## 1.8 Zasadnicze twierdzenie algebry

**Twierdzenie.** Każde równanie  $n$ -tego stopnia

$$q(z) = z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0 = 0 \quad (14)$$

gdzie  $n \in \mathbb{N}$ ,  $c_j \in \mathbb{C}$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ) ma rozwiązanie w  $\mathbb{C}$ .

**Dygresja.** Ideę dowodu zilustrujemy najpierw w prostszym przypadku wersji rzeczywistej powyższego twierdzenia:

*Każde równanie nieparzystego stopnia  $n = 2k + 1$*

$$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

gdzie  $k \geq 0$ ,  $a_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, \dots, n-1$ ) ma rozwiązanie w  $\mathbb{R}$ .

Tu idea dowodu jest następująca: Dla  $x \rightarrow +\infty$ , również  $p(x) \rightarrow +\infty$ , tak więc istnieje  $x_+$  takie, że dla dowolnego  $x > x_+$ ,  $p(x) > 0$ . Analogicznie, dla  $x \rightarrow -\infty$  zachodzi:  $p(x) \rightarrow -\infty$ , tak więc istnieje  $x_-$  takie, że dla dowolnego  $x < x_-$ ,  $p(x) < 0$ . Ponieważ funkcja  $p(x)$  jest ciągła, to na odcinku  $[x_-, x_+]$  funkcja  $p(x)$  przyjmuje wszystkie wartości pośrednie, a w szczególności istnieje takie  $x_0$ , że  $f(x_0) = 0$ .

W przypadku równania (14) zarówno argument jak i wartość funkcji są liczbami zespolonymi, więc nie można użyć powyższego rozumowania bezpośrednio; jednak uogólnienie jest naturalne i wtedy dowód "idzie".

**Idea dowodu.** (Nie będzie to dowód jako taki, gdyż argumentacja odwołuje się do kilku faktów z analizy, prawdopodobnie nie znany w tej chwili Czytelnikowi. W tej chwili znajomość tych faktów musi zastąpić Jego/Jej intuicja.)

1) Rozpatrzmy najspierw odwzorowanie  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow z^n$ . Weźmy w przestrzeni argumentów okrąg  $\gamma_1 = C_0^R$  (okrąg o środku w punkcie 0 i promieniu  $R$ ); jego obrazem jest również okrąg  $C_0^{R^n}$ . Obiegnijmy naokoło okrąg  $\gamma_1$ . Zmiana argumentu w *przeciwoobrazie* wynosi  $2\pi$ , zaś w *obrazie* wynosi  $2n\pi$ .

2) Pokażemy, że podobna sytuacja ma miejsce, gdy rozpatrujemy dowolne odwzorowanie  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : z \rightarrow q(z)$  dla dostatecznie dużego  $R$ . Rozpatrzmy znów obraz okręgu  $\gamma_1 = C_0^R : \gamma_2 = q(\gamma_1)$ . Obraz ten jest pewną zamkniętą krzywą *ciągłą*. Obiegnijmy znów naokoło okrąg  $\gamma_1$ . Ile będzie wynosił przyrost argumentu w *obrazie*? Obliczmy argument  $q(z)$ :

$$\arg(q(z)) = \arg(z^n + c_{n-1}z^{n-1} + \dots + c_1z + c_0) = \arg(z^n) + \arg\left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n}\right)$$

Przyrost argumentu  $\Delta(q(z))$ , gdy  $z$  obiega okrąg  $\gamma_1$ , wynosi:

$$\Delta(q(z)) = 2\pi n + \Delta \arg\left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n}\right)$$

Mamy oszacowanie (pamiętajmy że  $z = Re^{i\phi}$ ):

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n}\right| &\leq 1 + \left|\frac{c_{n-1}}{z}\right| + \dots + \left|\frac{c_1}{z^{n-1}}\right| + \left|\frac{c_0}{z^n}\right| \\ &= 1 + \frac{|c_{n-1}|}{R} + \dots + \frac{|c_1|}{R^{n-1}} + \frac{|c_0|}{R^n} \end{aligned}$$

Biorąc teraz  $R$  dostatecznie duże, otrzymujemy, że dla dowolnego  $z = Re^{i\phi}$  liczby:  $\left(1 + \frac{c_{n-1}}{z} + \dots + \frac{c_1}{z^{n-1}} + \frac{c_0}{z^n}\right)$  leżą wewnątrz okręgu o środku w punkcie 1 i promieniu  $\frac{1}{2}$ . Tak więc zmiana argumentu tej liczby wynosi zero, gdy obiegamy okrąg  $\gamma_1$  w przeciwoobrazie.

Sytuację możemy podsumować mówiąc, że: *Przyrost argumentu  $q(z)$ , gdy  $z$  obiega okrąg  $\gamma_1$ , wynosi  $2\pi n$ .*

3) Z drugiej strony, mamy:  $q(0) = c_0$ , zakładamy zaś, że  $c_0 \neq 0$ , gdyż w innym przypadku dowód jest skończony.

4) Weźmy teraz rodzinę okręgów o promieniu malejącym od  $R$  do zera i rozpatrujemy obrazy tych okręgów. Zmiana obrazu okręgu o promieniu  $r$  jest *ciągła*, gdy zmieniamy promień. Z 2) i 3) wnioskujemy, że gdzieś po drodze, gdy deformujemy okręgi, przechodząc od promienia  $R$  do zera, obraz pewnego okręgu "zahaczy" o zero.

**Uwaga.** Pokazaliśmy, że dowolne równanie algebraiczne  $n$ -tego stopnia posiada przynajmniej jeden pierwiastek. A co z możliwością jego *obliczenia*? Innymi słowy, czy dla dowolnego równania algebraicznego da się napisać wzory na jego pierwiastki, analogiczne do wzorów Cardana dla  $n = 3$ ?

Okazuje się, że odpowiedź jest *negatywna*. Wzory na pierwiastki daje się jeszcze napisać dla równania 4. stopnia (znalazł je L. Ferrari w XVI w.) Rozwiązań dla równań wyższych stopni bezskutecznie poszukiwano przez następne dwa wieki, aż na początku XIX w. niezależnie N. Abel oraz E. Galois odkryli, że *dla równań stopnia wyższego niż czwarty, w ogólnym przypadku pierwiastki nie wyrażają się za pomocą skończonej kombinacji działań arytmetycznych i operacji wyciągania pierwiastka.*<sup>1</sup> (Dowody można znaleźć w wielu podręcznikach algebry; przystępny wykład teorii Galois stanowi książeczka M. Bryńskiego w serii "Biblioteka Delfy".)

Później okazało się, że *można* napisać wyrażenia na pierwiastki równania dowolnego stopnia, jeśli rozszerzy się "asortyment" funkcji, które dopuszczamy w wyrażeniach na pierwiastki. Pierwiastki dowolnego równania można wyrazić przez tzw. *funkcje modularne* (do ich zdefiniowania i zbadania konieczna jest dość zaawansowana analiza zespolona). Pokazano to pod koniec XIX wieku (Ch. Hermite, F. Klein, F. Lindemann, C. Jordan).

---

<sup>1</sup>Ich prace były poprzedzone niezależnym i – jak się później okazało – niekompletnym dowodem Ruffiniego.

## 2 Równania trzeciego stopnia – wzory Cardano

**Uwaga.** Ta część stanowi materiał nieobowiązkowy!

### 2.1 Rozwiązywanie równania trzeciego stopnia

Ogólne równanie trzeciego stopnia ma postać

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

Zakładamy, że  $a_3 \neq 0$ , gdyż inaczej mamy równanie stopnia drugiego. Dzielimy powyższe równanie przez  $a_3$  otrzymujemy:

$$x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = 0 \quad (\text{gdzie } A_2 = \frac{a_2}{a_3} \text{ itd.})$$

W powyższym równaniu zawsze możemy się pozbyć wyrazu drugiego stopnia przez podstawienie  $z = x + A_2/3$ ; dostajemy wtedy

$$z^3 + pz + q = 0. \tag{15}$$

(proszę podstawić i sprawdzić, że wyrazy drugiego stopnia się kasują!)

Wykonajmy teraz następujące podstawienie:

$$z = u + v,$$

gdzie  $u, v$  - liczby zespolone. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że ten rodzaj podstawienia to zamiana w rodzaju "zamienił stryjek siekierkę na kijek", bo zamiast *jednej* zmiennej, mamy ich *dwie*! Okazuje się jednak, że to podstawienie prowadzi do uproszczenia problemu. Mamy:

$$\begin{aligned} z^3 + pz + q &= (u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q \\ &= u^3 + v^3 + (u + v)(3uv + p) + q = 0 \end{aligned}$$

Widać, że jeżeli znajdziemy taką parę  $\{u, v\}$ , że

$$u^3 + v^3 + q = 0 \tag{16}$$

$$3uv + p = 0 \tag{17}$$

Rozwiążmy układ (17). Mamy:  $v = -\frac{p}{3u}$ , i wstawiając to do pierwszego równania dostajemy:  $u^3 - \frac{p^3}{27u^3} + q = 0$ , a jest to *równanie kwadratowe* w zmiennej  $U = u^3$ :

$$U^2 + qU - \frac{p^3}{27} = 0 \tag{18}$$

którego rozwiązania są:

$$U_{\pm} = \frac{-q \pm \sqrt{\Delta}}{2}, \quad \text{gdzie } \Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \tag{19}$$

Weźmy dowolny z tych pierwiastków, np.  $U_+$  i wyciągnijmy pierwiastek trzeciego stopnia. Dostajemy trzy wartości  $u$ :

$$u_0, \quad u_1 = u_0\epsilon, \quad u_2 = u_0\bar{\epsilon}$$

gdzie  $u_0$  – którykolwiek z pierwiastków trzeciego stopnia z  $U$ , zaś  $\epsilon$  jest pierwszym pierwiastkiem trzeciego stopnia z jedynki:  $\epsilon = e^{2i\pi/3} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}i)$ .

Stąd dostajemy

$$v_0 = \frac{-p}{3u_0}, \quad v_1 = \frac{-p}{3u_0}\bar{\epsilon}, \quad v_2 = \frac{-p}{3u_0}\epsilon$$

i ostatecznie mamy pierwiastki równania (15)

$$z_0 = u_0 + v_0, \tag{20}$$

$$z_1 = u_1 + v_1 = u_0\epsilon + v_0\bar{\epsilon}, \tag{21}$$

$$z_2 = u_2 + v_2 = u_0\bar{\epsilon} + v_0\epsilon \tag{22}$$

**Uwaga 1.** Przy rozwiązywaniu równania kwadratowego (18) wystarczy wziąć *tylko jeden* z pierwiastków (19). Mamy bowiem:  $V_+ = \frac{-p^3}{27U_+} = U_-$  (proszę sprawdzić!) oraz analogicznie  $V_- = U_+$ , co implikuje że para  $\{U_+, V_+\}$  różni się od pary  $\{U_-, V_-\}$  tylko kolejnością czynników – tak więc zamiana  $U_+$  na  $U_-$  *nie prowadzi* do nowego pierwiastka.

## 2.2 Dyskusja równania 3. stopnia dla współczynników rzeczywistych

Założmy, że współczynniki  $p, q$  w równaniu (15) są *rzeczywiste*. Mamy wówczas następujące możliwości, jeśli chodzi o znak wyróżnika  $\Delta$ , danego w (19):  $\Delta > 0$ ,  $\Delta = 0$ ,  $\Delta < 0$ .

• **Przypadek 1.**  $\Delta > 0$ .

Wtedy jako pierwiastek  $u_0$  wybieramy rzeczywisty pierwiastek trzeciego stopnia z liczby rzeczywistej:

$$u_0 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{\Delta}{4}},$$

gdzie pierwiastek kwadratowy ustalamy – na przykład – jako nieujemny. Wtedy  $v_0 = \frac{-p}{3u_0}$  jest rzeczywistym pierwiastkiem trzeciego stopnia z

$$-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{\Delta}{4}}$$

Równanie (20) daje  $z_0$  rzeczywiste, zaś równania (21, 22) dają  $z_1, z_2$  zespolone sprzężone, przy czym części urojone  $z_1, z_2$  są *niezerowe* (gdyby było inaczej to mielibyśmy  $\text{Im}(z_1 - z_2) = \frac{1}{2i}(z_1 - \bar{z}_1) = u_0\epsilon + v_0\bar{\epsilon} - u_0\bar{\epsilon} - v_0\epsilon = (u_0 - v_0)(\epsilon - \bar{\epsilon}) = 0$ , co jest niemożliwe, gdyż  $u_0^3 \neq v_0^3$ ).

•• **Przypadek 2.**  $\Delta = 0$ .

Mamy tutaj:  $u_0 = \sqrt[3]{-q/2}$  (jako  $u_0$  znowu wybieramy rzeczywisty pierwiastek 3-go stopnia), oraz:  $v_0 = u_0$ . Stąd mamy:  $z_0 = 2u_0, z_1 = u_0(\epsilon + \bar{\epsilon}) = -u_0 = z_2$ . Tak więc mamy tutaj dwa pierwiastki rzeczywiste: jeden pojedynczy i jeden podwójny.

••• **Przypadek 3.**  $\Delta < 0$ .

W takiej sytuacji,  $u_0$  jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z liczby zespolonej z niezerową częścią urojoną:

$$-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{\Delta}{4}} \tag{23}$$

Niech  $r(\cos \phi + i \sin \phi)$  będzie przedstawieniem trygonometrycznym powyższej liczby. Wybierzmy  $u_0$  w postaci:

$$u_0 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\phi}{3} + i \sin \frac{\phi}{3} \right)$$

Wówczas  $v_0$  jest pierwiastkiem trzeciego stopnia z  $-\frac{q}{2} + i\sqrt{-\frac{\Delta}{4}}$ , więc

$$v_0 = \sqrt[3]{r} \left( \cos \frac{\phi}{3} - i \sin \frac{\phi}{3} \right) = \bar{u}_0$$

Ostatecznie mamy

$$z_0 = u_0 + v_0 = 2\operatorname{Re}u_0 = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\phi}{3},$$

$$z_1 = u_0\epsilon + \bar{u}_0\bar{\epsilon} = 2\operatorname{Re}(u_0\epsilon) = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\phi + 2\pi}{3},$$

$$z_2 = u_0\bar{\epsilon} + \bar{u}_0\epsilon = 2\operatorname{Re}(u_0\bar{\epsilon}) = 2\sqrt[3]{r} \cos \frac{\phi + 4\pi}{3}.$$

Są to trzy *różne* pierwiastki rzeczywiste. To, że są one różne wynika z faktu, iż są one częściami rzeczywistymi (rzutami na oś rzeczywistą) liczb:  $u_0$ ,  $u_0\epsilon$ ,  $u_0\bar{\epsilon}$ . Gdyby któreś z tych rzutów się pokryły, znaczyłoby to, że jeden z boków trójkąta równobocznego o wierzchołkach w punktach  $u_0$ ,  $u_0\epsilon$ ,  $u_0\bar{\epsilon}$  jest równoległy do osi urojonej ("pionowy"), a wtedy jedna z tych liczb musiałaby być rzeczywista. Jest to niemożliwe, gdyż trzecia potęga tej liczby jest nie-rzeczywista.

**Uwaga.** Ta właśnie sytuacja wywoływała w XVII w. spory o istnienie liczb urojonych. Mimo że wszystkie pierwiastki równania 3. stopnia są w przypadku  $\Delta < 0$  *rzeczywiste*, to aby je otrzymać, trzeba wyciągać pierwiastki kwadratowe z liczb ujemnych (p. wyrażenie (23) powyżej).