Nie od początku, tu będzie uzupełnione

Mamy wobec tego:

- T injektywne $\iff \operatorname{Ker} T = \mathbf{0} \iff \dim(\mathrm{Im\,T}) = \dim \mathrm{V}$
- T surjektywne $\iff \mathrm{Im\,T} = \mathrm{W} \iff \dim(\operatorname{Ker} T) = \dim V - \dim W$
- T bijektywne $\iff \operatorname{Ker} T = \{\mathbf{0}\}$ i $\iff \dim V = \dim W \iff \mathrm{Im\,T} = \mathrm{W}$ i $\dim V = \dim W$.

1 Macierze odwzorowań liniowych

Ile jest odwzorowań liniowych z V do W? Jak opisać (czy też: parametryzować) ich zbiór (będący – jak widzieliśmy – przestrzenią liniową)?

Przykład. Jeśli $V = W = \mathbb{R}$, to odwzorowanie liniowe $T : V \to W$ ma postać: $V \ni v \to w = \alpha v \in W$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, tzn. odwzorowanie to jest po prostu mnożeniem przez liczbę. Tu więc $L(V, W) \sim \mathbb{R}$.

W ogólnym przypadku mamy

Stwierdzenie. Jeśli $e = (e_1, \ldots, e_n)$ – baza w V oraz $w_1, \ldots, w_n$ – jakiekolwiek wektory z W, to istnieje dokładnie jedno $T \in L(V, W)$ takie, że $Te_1 = w_1, \ldots, Te_n = w_n$. Innymi słowy, odwzorowanie liniowe jest jednoznacznie wyznaczone przez swoje wartości na wektorach bazy.

Dowód: Jeśli takie T istnieje, to dla $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ mamy

$$T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i w_i,$$

do daje szukany wzór na T (dokładniej, na $T(v)$). Pozostaje upewnić się, czy ten wzór określa odwzorowanie liniowe. Biorąc $v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$ i $\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}^i e_i$, mamy: $v + \tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} (v^i + \tilde{v}^i) e_i$ oraz

$$T(v + \tilde{v}) = \sum_{i=1}^{n} (v^i + \tilde{v}^i) w_i = \sum_{i=1}^{n} v^i w_i + \sum_{i=1}^{n} \tilde{v}^i w_i = T(v) + T(\tilde{v}).$$

Podobnie sprawdza się jednorodność.

Wniosek: Baza e w V ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy elementami $L(V, W)$ a ciągami $(w_1, \ldots, w_n)$ wektorów z W. Innymi słowy, cała informacja o T jest zawarta w ciągu $[T]_e$:

$$[T]_e = (Te_1, \ldots, Te_n).$$

$[T]_e$ jest ciągiem wektorów, a każdy z nich jest kolumienką liczb. Wyraźmy więc $[T]_e$ w bardziej konkretny sposób (jako zbiór liczb). Najsampierw, ustalmy bazę $f = f_1, \ldots, f_m$ w przestrzeni W. Każdy z wektorów Te_j można zapisać $[Te_j]^f \in \mathbb{K}^m$. Zatem cała informacja o T jest zawarta w ciągu (dwuwskaźnikowym) liczb $[T]^f{}_e$:

$$[T]^f{}_e = ([Te_1]^f, \ldots, [Te_n]^f).$$

Oznaczając współrzędne wektora $[Te_j]^f$ przez $T^i{}_j$ (tu $i = 1, \dots, m$) możemy zapisać:

$$[Te_j]^f = \begin{bmatrix} T^1{}_j \\ \vdots \\ T^m{}_j \end{bmatrix} \tag{1}$$

a dla ciągu wektorów $[T]^f{}_e$

$$[T]^f{}_e = ([Te_1]^f, \dots, [Te_n]^f) = \left(\begin{bmatrix} T^1{}_1 \\ \vdots \\ T^m{}_1 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} T^1{}_n \\ \vdots \\ T^m{}_n \end{bmatrix} \right).$$

Ilość nawiasów w tym ostatnim wyrażeniu jest zdecydowanie za duża; zapiszmy to więc inaczej:

$$[T]^f{}_e = ([Te_1]^f, \dots, [Te_n]^f) = \begin{bmatrix} T^1{}_1 & \dots & T^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ T^m{}_1 & \dots & T^m{}_n \end{bmatrix}. \tag{2}$$

To w naturalny sposób prowadzi nas do definicji:

Def. *Macierz* A rozmiaru $m \times n$ (o m wierszach i n kolumnach) i elementach z ciała $\mathbb{K}$ to tablica liczb postaci

$$A = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdzie $a^i{}_j$ (*elementy macierzy*) są liczbami z ciała $\mathbb{K}$.

Def. *Macierz odwzorowania liniowego* $T \in L(V, W)$ w zadanych bazach: e w V oraz f w W, to tablica liczb (macierz) $[T]^f{}_e$ opisana wyżej.

Ustalenie baz w V oraz W zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość pomiędzy elementami $L(V, W)$ oraz macierzami $m \times n$.

Podsumujmy związki pomiędzy wprowadzonymi wyżej trzema pojęciami: (T – odwzorowanie liniowe; $[Te_j]^f$ – macierz tego odwzorowania; $T^i{}_j$ – elementy tej macierzy.

Mając bazy e w V oraz f w W, elementy $T^i{}_j$ możemy liczyć na dwa sposoby:

1. **Sposób I** (transformacja wektorów bazy):

   $$Te_i = T^1{}_i f_1 + \dots + T^m{}_i f_m = \sum_{j=1}^{m} T^j{}_i f_j \tag{4}$$

   (rozwijamy w bazie f działania operatora T na poszczególne wektory bazy e).

   Jest to po prostu inna postać wzoru (1).

2. **Sposób II** (transformacja składowych): Jeśli $Tv = w$, gdzie $V \ni v = \sum_{i=1}^{n} v^i e_i$, $W \ni w = \sum_{j=1}^{m} w^j f_j$, to

   $$w^j = \sum_{i=1}^{n} T^j{}_i v^i \tag{5}$$

   Wynika to z poprzedniego sposobu przez proste przeliczenie:

   $$Tv = T(\sum_{i=1}^{n} v^i e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} v^i (\sum_{j=1}^{m} T^j{}_i f_j) = \sum_{j=1}^{m} (\sum_{i=1}^{n} T^j{}_i v^i) f_j$$

$$= w = \sum_{j=1}^{m} w^j f_j$$

i skoro tak, to mamy na składową w^j wzór (5).

2 Przestrzeń wektorowa macierzy

Oznaczmy przez $\mathbb{K}^m{}_n$ zbiór macierzy $m \times n$ o elementach z $\mathbb{K}$.

Zbiorowi $\mathbb{K}^m{}_n$ można nadać strukturę przestrzeni liniowej w następujący sposób: Dodawanie macierzy określamy jako:

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b^1{}_1 & \dots & b^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ b^m{}_1 & \dots & b^m{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1 + b^1{}_1 & \dots & a^1{}_n + b^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 + b^m{}_1 & \dots & a^m{}_n + b^m{}_n \end{bmatrix},$$

a mnożenie macierzy przez liczbę jako:

$$\lambda \cdot \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a^1{}_1 & \dots & \lambda a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a^m{}_1 & \dots & \lambda a^m{}_n \end{bmatrix}.$$

Takie zdefiniowanie dodawania macierzy i mnożenia ich przez liczbę zadaje izomorfizm pomiędzy $L(V, W)$ a $\mathbb{K}^m{}_n$.

3 Macierz złożenia odwzorowań

Niech U, V, W będą trzema przestrzeniami wektorowymi z wybranymi bazami: $g = (g_1, \dots, g_p)$ – baza w U; $e = (e_1, \dots, e_n)$ – baza w V; $f = (f_1, \dots, f_m)$ – baza w W. Jeśli $T \in L(V, W)$ i $S \in L(U, V)$, to $R = T \circ S \in L(U, W)$. Znajdźmy, jak macierz złożenia odwzorowań T i S:

$$[R]^f{}_g = C = \begin{bmatrix} c^1{}_1 & \dots & c^1{}_p \\ \vdots & & \vdots \\ c^m{}_1 & \dots & c^m{}_p \end{bmatrix}$$

wyraża się przez macierze tych odwzorowań:

$$[T]^f{}_e = A = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix}, \qquad [S]^e{}_g = B = \begin{bmatrix} b^1{}_1 & \dots & b^1{}_p \\ \vdots & & \vdots \\ b^n{}_1 & \dots & b^n{}_p \end{bmatrix}.$$

Współczynniki $c^i{}_j$ macierzy $C = [R]^f{}_g$ są określone przez: Jeśli $U \ni u = \sum_{j=1}^p u^j g_j$, $W \ni w = \sum_{i=1}^p u^i g_i$, to

$$w = Ru \quad \Longleftrightarrow \quad w^i = \sum_{j=1}^{p} c^i{}_j u^j.$$

Ponieważ $w = Tv$, gdzie $v = Su$, to oznaczając przez v^k współrzędne wektora v w bazie e (mamy więc $v = \sum_{k=1}^n v^k e_k$) mamy

$$w^i = \sum_{k=1}^{n} a^i{}_k v^k = \sum_{k=1}^{n} a^i{}_k \left(\sum_{j=1}^{p} b^k{}_j u^j \right) = \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{n} a^i{}_k b^k{}_j \right) u^j.$$

Współczynniki ${c^i}_j$ są więc dane przez

$$ {c^i}_j = \sum_{k=1}^{n} {a^i}_k {b^k}_j. \tag{6} $$

Def. Jeśli $A \in {\mathbb{K}^m}_n$, $B \in {\mathbb{K}^n}_p$, to macierz $C \in {\mathbb{K}^m}_p$, której elementy ${c^i}_j$ dane są przez wzór (6), nazywamy *iloczynem macierzy* A i B (i piszemy: $C = AB$).

Podsumowując, *macierz złożenia odwzorowań jest iloczynem macierzy tych odwzorowań*:

$$ {[T \circ S]^f}_g = {[T]^f}_e {[S]^e}_g. $$

3.1 Własności mnożenia macierzy

Mnożenie macierzy jest *łączne*, tzn. $(AB)C = A(BC)$, jeśli iloczyny AB i BC są określone z sensem (łączność mnożenia macierzy wynika z łączności składania odwzorowań). Natomiast mnożenie macierzy na ogół nie jest przemienne:

$$ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. $$

Jeśli przez Id_V oznaczymy odwzorowanie identycznościowe $V \to V$, to dla $T \in L(V, W)$ mamy

$$ {[T]^f}_e = {[T \circ \mathrm{Id}_V]^f}_e = {[T]^f}_e {[\mathrm{Id}_V]^e}_e. $$

Podobnie

$$ {[T]^f}_e = {[\mathrm{Id}_W \circ T]^f}_e = {[\mathrm{Id}_W]^f}_f {[T]^f}_e $$

dla Id_W – odwzorowania identycznościowego $W \to W$.

Macierz

$$ {[\mathrm{Id}_V]^e}_e = ([(\mathrm{Id}_V)e_1]^e, \ldots, [(\mathrm{Id}_V)e_n]^e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} \overset{ozn}{=} I_n $$

nazywamy *macierzą jednostkową*. Pomnożenie dowolnej macierzy A przez macierz jednostkową (w przypadkach, kiedy jest to wykonalne) nie zmienia A (własność elementu neutralnego): Dla $A \in {\mathbb{K}^m}_n$ mamy

$$ A\, I_n = A = I_m\, A. $$

Def. Mówimy, że macierz $A \in {\mathbb{K}^n}_n$ jest *odwracalna*, jeśli istnieje macierz $B \in {\mathbb{K}^n}_n$ taka, że $AB = I_n = BA$. W takim przypadku B nazywamy macierzą *odwrotną* do A.

Łatwo zobaczyć, że powyższa macierz B, jeśli istnieje, jest określona jednoznacznie. Zapisujemy ją jako A^{-1}. Zachodzi: $(A^{-1})^{-1} = A$.

Gdy mamy odwzorowania (odwracalne) S, T, to odwzorowanie odwrotne do $S \circ T$ jest: $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$. To daje wzór na macierz odwrotną do iloczynu: Jeśli A, C – macierze (odwracalne), to $(AC)^{-1} = C^{-1} A^{-1}$.

Macierze izomorfizmów (tzn. odwzorowań liniowych odwracalnych) są odwracalne: Jeśli $T \in L(V, W)$ jest odwracalne, e – baza w V, f – baza w W, to

$$ {[T]^f}_e {[T^{-1}]^e}_f = {[T \circ T^{-1}]^f}_f = {[\mathrm{Id}_W]^f}_f = I_n, \qquad {[T^{-1}]^e}_f {[T]^f}_e = {[T^{-1} \circ T]^e}_e = {[\mathrm{Id}_V]^e}_e = I_n, $$

gdzie $n = \dim V = \dim W$.

3.2 Zmiana baz i zmiana macierzy operatora przy zmianie bazy

Jeśli $T \in L(V, W)$ oraz e, e' – dwie bazy w V, zaś f, f' – dwie bazy w W, to

$$[T]^{f'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}_W \circ T \circ \mathrm{Id}_V]^{f'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}_W]^{f'}{}_{f}[T]^{f}{}_{e}[\mathrm{Id}_V]^{e}{}_{e'}.$$

Wzór ten pozwala obliczyć macierz odwzorowania T w „nowych” bazach e', f' mając macierz T w „starych” bazach e, f.

Macierz

$$[\mathrm{Id}_V]^{e}{}_{e'} = ([e'_1]^e, \ldots, [e'_n]^e)$$

nazywa się *macierzą zmiany bazy.* Macierz $[\mathrm{Id}_V]^{e}{}_{e'}$ jest macierzą odwrotną do $[\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_{e}$:

$$[\mathrm{Id}_V]^{e}{}_{e'}[\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_{e} = [\mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V]^{e}{}_{e} = [\mathrm{Id}_V]^{e}{}_{e} = I_n,$$

i analogicznie

$$[\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_{e}[\mathrm{Id}_V]^{e}{}_{e'} = [\mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V]^{e'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}_V]^{e'}{}_{e'} = I_n.$$

Przykład. Niech operator A w bazie standardowej $e = (e_1, e_2) = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$ będzie dany macierzą:

$$[A]^{e}{}_{e} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znajdźmy jego macierz w bazie $e' = (e'_1, e'_2) = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$

Mamy:

$$[\mathrm{Id}]^{e}{}_{e'} = ([e'_1]^e, [e'_2]^e) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(poszczególne kolumny są to składowe wektorów e'_i w bazie wektorów e_k). Macierz $[\mathrm{Id}]^{e'}{}_{e}$ jest macierzą *odwrotną* do $[\mathrm{Id}]^{e}{}_{e'}$. Niedługo zobaczymy, jak się liczy macierz odwrotną. W tym momencie niech Czytelnik sprawdzi, że $[\mathrm{Id}]^{e'}{}_{e} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ tzn. $[\mathrm{Id}]^{e'}{}_{e}[\mathrm{Id}]^{e}{}_{e'} = I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Mamy

$$[A]^{e'}{}_{e'} = [\mathrm{Id}]^{e'}{}_{e}[A]^{e}{}_{e}[\mathrm{Id}]^{e}{}_{e'} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

W tym przypadku, przez odpowiedni wybór bazy, udało się wyrazić operator A w postaci *diagonalnej*; taka postać jest bardzo ważna przy badaniu macierzy.

3.3 Układy równań liniowych

Układ równości

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a^1{}_1x^1 & + & \ldots & + & a^1{}_nx^n & = & b^1 \\ a^2{}_1x^1 & + & \ldots & + & a^2{}_nx^n & = & b^2 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1x^1 & + & \ldots & + & a^m{}_nx^n & = & b^m \end{array}\right. \tag{7}$$

gdzie $a^i{}_j$, b^i – dane liczby (z ciała $\mathbb{K}$), zaś $x^1, \ldots, x^n$ – liczby niewiadome, nazywa się *układem m równań liniowych z n niewiadomymi.*

Przepiszmy lewą stronę układu równań na trzy sposoby:

$$x^1\begin{bmatrix} a^1{}_1 \\ \vdots \\ a^m{}_1 \end{bmatrix} + \cdots + x^n\begin{bmatrix} a^1{}_n \\ \vdots \\ a^m{}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^1{}_1x^1 & + & \ldots & + & a^1{}_nx^n \\ a^2{}_1x^1 & + & \ldots & + & a^2{}_nx^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ a^m{}_1x^1 & + & \ldots & + & a^m{}_nx^n \end{bmatrix} \tag{8}$$

$$= \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & \dots & a^2{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}.$$

Stąd, wprowadzając oznaczenia:

$$a_1 = \begin{bmatrix} a^1{}_1 \\ a^2{}_1 \\ \vdots \\ a^m{}_1 \end{bmatrix}, \; \dots, \; a_n = \begin{bmatrix} a^1{}_n \\ a^2{}_n \\ \vdots \\ a^m{}_n \end{bmatrix}, \quad A = (a_1, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \dots & a^1{}_n \\ a^2{}_1 & \dots & a^2{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^m{}_1 & \dots & a^m{}_n \end{bmatrix}$$

oraz

$$x = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^m \end{bmatrix}$$

układ równań (7) można zapisać w postaci

$$x^1 a_1 + \dots + x^n a_n = b$$

lub

$$Ax = b.$$

Macierz A nazywa się *macierzą układu równań* (7).

Można rozpatrywać ją jako macierz pewnego operatora liniowego $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$.

Ze względu na lewą część (8) mamy

$$\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \mathrm{Im} A.$$

Def. Liczbę

$$\mathrm{rank}(A) = \dim \mathrm{Im}\, A$$

nazywamy *rzędem* (kolumnowym) macierzy A. Jest oczywiste, że jest to też ilość liniowo niezależnych kolumn macierzy A.

Zachodzi następujące stwierdzenie dotyczące istnienia rozwiązań układu (7).

Stwierdzenie. Następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje rozwiązanie układu (7).
2. $b \in \mathrm{Im}\, A$.
3. $b \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$.
4. $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$
5. $\mathrm{rank}(A, b) = \mathrm{rank}(A)$

Tutaj $(A, b) = (a_1, \dots, a_n, b)$ oznacza macierz powstałą z A przez dołączenie jeszcze jednej kolumny – wektora b. Macierz (A, b) nazywa się *macierzą rozszerzoną* układu (7). Zawiera ona pełną informację o układzie.

Uwagi.

- Równoważność 1) i 5) nosi nazwę *twierdzenia Kroneckera – Capelliego.*

- Jeśli prawa strona układu jest zerem (tzn. $b = \mathbf{0}$), to układ nazywamy *jednorodnym*; jeśli $b \neq \mathbf{0}$), to układ nazywamy *niejednorodnym.*

- Zbiór rozwiązań układu jednorodnego jest przestrzenią wektorową (podprzestrzenią $\mathbb{K}^n$). Zbiór rozwiązań układu niejednorodnego *nie* jest przestrzenią wektorową.

Mamy też proste

Stwierdzenie. Jeśli $m = n$, to równanie $Ax = b$ ma dla każdego b dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje A^{-1}. Wówczas $x = A^{-1}b$.

W praktyce rzadko rozwiązuje się układy równań przez znajdowanie macierzy odwrotnej. („Rzadko” nie znaczy „wcale”; jest to sposób potrzebny gdy np. macierz A zależy od parametrów). Najczęściej robi się to metodą *redukcji wierszowej* – dodawania równań stronami tak, by otrzymać możliwie prostą macierz układu. Wykorzystujemy tu oczywisty fakt, że dodając do jakiegoś równania kombinację liniową pozostałych równań, otrzymujemy układ równoważny, tzn. mający te same rozwiązania. Operacja ta odpowiada przejściu do innej bazy w przestrzeni W.

Z formalnego punktu widzenia, redukcja wierszowa jest kombinacją następujących *operacji elementarnych*, z których każda w oczywisty sposób nie zmienia rozwiązań układu:

1. Mnożenie wiersza przez niezerową stałą.

2. Dodawanie jednego wiersza do drugiego.

3. Przestawianie dwóch wierszy.

Przykład.
1) Rozwiązać układ równań:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Piszemy rozszerzoną macierz układu i redukujemy (wierszowo).

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 1 & 2 \\ -5 & 2 & 3 & -8 \\ 2 & \boxed{1} & -3 & 5 \end{array}\right] \overset{(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 11 & 0 & -11 & 22 \\ -9 & 0 & 9 & -18 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \overset{(2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$$

Równoważność (1) bierze się stąd, że równanie trzecie dodawaliśmy do pierwszego i drugiego z takimi współczynnikami, żeby w drugiej kolumnie pojawiły się same zera. Równoważność (2): Pomnożyliśmy równania: pierwsze i drugie przez odpowiednio 11 i -9, aby otrzymać prostszą postać. I dalej:

$$\overset{(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \overset{(4)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right] \overset{(5)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

Równoważność (3): Skreśliliśmy jedno z powtarzających się równań. (4): Dodaliśmy pierwsze równanie do drugiego z takim współczynnikiem, by wyzerować w nim trzecią kolumnę. (5): Przestawiliśmy wiersze, aby uzyskać jawnie diagonalną podmacierz układu.

Ostatnia macierz układu oznacza, że wyjściowy układ doprowadziliśmy do postaci

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} -x_1 & + & x_2 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_3 & = & -2 \end{array} \right.$$

którego rozwiązanie od razu piszemy:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_2 & = & x_1 - 1 \\ x_3 & = & x_1 - 2 \end{array} \right.$$

lub, w równoważnej postaci (zmieniając jeszcze nazwę x_1 na λ)

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2) Układ równań:

$$\begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

jest sprzeczny.

Metoda redukcji wierszowej (i kolumnowej, gdzie analogiczne operacje przeprowadza się na kolumnach macierzy) mają szerokie zastosowanie jako metody rachunkowe do znajdowania jądra i obrazu operatora czy macierzy odwrotnej.

W analogii do rzędu kolumnowego, definiuje się też *rząd wierszowy*:

Def. Rząd wierszowy macierzy A: $\mathrm{rank}_w(A)$ to ilość liniowo niezależnych wierszy tej macierzy.

Okazuje się, że zachodzi *równość* tych dwu rzędów:

Tw. $\mathrm{rank}_w(A) = \mathrm{rank}_k(A)$.

Dowód.

Tu c.d.n.