Operatory hermitowskie, ortogonalne i unitarne

Tutaj V będzie przestrzenią wektorową (zarówno nad $\mathbf{R}$, jak i nad $\mathbf{C}$) z iloczynem skalarnym.

1 Izomorfizm z przestrzenią dualną za pomocą iloczynu skalarnego

Każdy $x \in V$ określa funkcjonał liniowy $x^b \in V^*$ wzorem

$$\langle x^b, y\rangle = (x|y) \qquad y \in V. \tag{1}$$

W ten sposób mamy określone odwzorowanie $F_b : V \to V^*$ (wprowadziliśmy je już w rozdziale o formach biliniowych, tyle że tam było ono określone nad $\mathbf{R}$) o własnościach:

1. $(x_1 + x_2)^b = x_1^b + x_2^b$; dla $x_1, x_2 \in V$ addytywność;
2. $(\lambda x)^b = \bar{\lambda} x^b$ dla $x \in V, \lambda \in \mathbf{K}$ (tzn. mamy jednorodność dla $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, antyjednorodność dla $\mathbf{K} = \mathbf{C}$);
3. $x^b = \mathbf{0} \Longrightarrow (x|x) = \langle x^b, x\rangle = 0 \Longrightarrow x = \mathbf{0}$.

Dwie pierwsze własności oznaczają, że b jest odwzorowaniem liniowym w przypdku $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, natomiast antyliniowym w przypadku $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Z równości wymiarów obu przestrzeni i faktu, że b jest injekcją (Ker$b = \mathbf{0}$ z p. 3) wynika, że b jest bijekcją.

Wniosek. Każdy funkcjonał $\phi \in V^*$ można zapisać jednoznacznie jako iloczyn skalarny z pewnym wektorem:

$$\langle \phi, y\rangle = \langle x^b, y\rangle = (x|y) \quad \text{dla} \quad y \in V.$$

2 Sprzężenie hermitowskie

Niech $V \in \mathrm{End}V$. Wyrażenie $(x|Fy)$ jako funkcja $y \in V$ (przy ustalonym $x \in V$) jest formą liniową na V, więc istnieje dokładnie jeden element $z_x \in V$ taki, że

$$(x|Fy) = (z_x|y) \quad \text{dla} \quad y \in V.$$

Łatwo sprawdzić, że przyporządkowanie $x \to z_x$ jest liniowe. Oznaczymy je jako $F^\dagger$ i nazywamy *operatorem hermitowsko sprzężonym* do F. Zatem $F^\dagger$ jest jedynym operatorem takim, że

$$(x|Fy) = (F^\dagger|y) \quad \text{dla} \quad x, y \in V. \tag{2}$$

Można wyrazić $F^\dagger$ przez odwzorowanie sprzężone $F^* : V^* \to V^*$, czego tu nie uczynimy, natomiast wypiszemy następujące własności operacji sprzężenia hermitowskiego $\dagger$ (łatwo je sprawdzić korzystając z (2)):

1. $(F+G)^\dagger = F^\dagger + G^\dagger$
2. $(\lambda F)^\dagger = \bar{\lambda} F^\dagger$
3. $(F^\dagger)^\dagger = F$
4. $(F \circ G)^\dagger = G^\dagger \circ F^\dagger$.

Sprawdźmy dla przykładu czwartą własność. Mamy:

$$(x|F \circ Gy) = (x|F(Gy)) = (F^\dagger x|Gy) = (G^\dagger(F^\dagger x)|y) = ((G^\dagger \circ F^\dagger)x|y)$$

2.1 Macierz operatora hermitowsko sprzężonego w bazie ortonormalnej

Ustalmy w V bazę o.n. $e = (e_1, \dots, e_n)$. Oznaczmy jako A macierz operatora F w tej bazie, natomiast jako B – macierz operatora $F^\dagger$: $A = (a^i{}_j) = [F]^e{}_e$, $B = (b^i{}_j) = [F^\dagger]^e{}_e$. Mamy:

$$b^i{}_j = (e_i|F^\dagger e_j) = (Fe_i|e_j) = \overline{(e_j|Fe_i)} = \overline{a^j{}_i}.$$

Macierz B określoną przez macierz A według powyższej reguły nazywamy *macierzą hermitowsko sprzężoną* do macierzy A i oznaczamy przez $A^\dagger$ (gdy mamy $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, to jest to po prostu macierz transponowana). Zatem *dla ortonormalnej bazy* e, macierz opertora hermitowsko sprzężonego do F jest macierzą hermitowsko sprzężoną do macierzy operatora F.

Uwaga. Gdy bierzemy macierz operatora w bazie *nieortonormalnej*, to wzór powyższy komplikuje się; proponujemy Czytelnikowi, aby wyprowadził go również dla tego, ogólniejszego przypadku.

3 Operatory zachowujące iloczyn skalarny

Mówimy, że $F \in \mathrm{End}V$ *zachowuje iloczyn skalarny*, jeżeli

$$(Fx|Fy) = (x|y) \quad \text{dla} \quad x, y \in V. \tag{3}$$

Odwzorowania takie posiadają następujące własności:

- są izomorfizmami: $||Fx|| = ||x||$, więc $Fx = \mathbf{0} \Longrightarrow x = \mathbf{0}$.
- zachowują odległość: $d(Fx, Fy) = ||Fx - Fy|| = ||F(x-y)|| = ||x-y|| = d(x,y)$,
- tworzą grupę (względem operacji składania).

Operatory takie noszą nazwę:
$\boxed{\text{dla } \mathbf{K} = \mathbf{R}\text{:}}$ operatory *ortogonalne* (odpowiednia grupa nosi nazwę *grupy ortogonalnej* $O(n)$);
$\boxed{\text{dla } \mathbf{K} = \mathbf{C}\text{:}}$ operatory *unitarne* (odpowiednia grupa nosi nazwę *grupy unitarnej* $U(n)$.

Stwierdzenie. Dla operatora $F \in \mathrm{End}V$ następujące warunki są równoważne:

1. F zachowuje iloczyn skalarny.
2. $F^\dagger F = I$.
3. $F^\dagger = F^{-1}$.
4. macierz $A = [F]^e_{\ e}$ w pewnej (a więc i każdej) bazie o.n. spełnia warunek $A^\dagger A = I$.
5. F przekształca pewną (a więc i każdą) bazę o.n. na bazę o.n.

Dowód. Równoważność 1 $\Longleftrightarrow$ 2 wynika natychmiastowo z (3) – wystarczy zapisać ten warunek w postaci:

$$(Fx|Fy) = (F^\dagger Fx|y) = (x|y).$$

Równoważność 2,3 i 4 jest oczywista. Pokażemy, że 1 $\Longleftrightarrow$ 5.
1 $\Longrightarrow$ 5. Jeśli e – baza o.n., to $(Fe_i|Fe_j) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}$, więc $(Fe_1, \ldots, Fe_n)$ też jest bazą o.n.
5 $\Longrightarrow$ 1. Jeśli F przekształca bazę o.n. e na bazę o.n., to $(Fe_i|Fe_j) = \delta_{ij} = (e_i|e_j)$, czyli

$$(Fx|Fy) = (F\sum_{i=1}^n x^i e_i|\sum_{i=1}^n y^j e_j) = \sum_{i,j=1}^n \bar{x^i} y^j (Fe_i|Fe_j) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \bar{x^i} y^j (e_i|e_j) = (\sum_{i=1}^n x^i e_i|\sum_{j=1}^n y^j e_j) = (x|y).$$

Uwagi.

1. Warunek $A^\dagger A = I$ oznacza $A^{-1} = A^\dagger$, tak więc macierz odwrotna do macierzy ortogonalnej (unitarnej) to macierz transponowana (sprzężona hermitowsko).
2. $A^\dagger A = I$ oznacza: $\sum_{j=1}^n \bar{a^j}_i a^j_{\ k} = \delta^i_{\ k}$, czyli warunek, że $a_1, \ldots, a_n$ jest bazą ortonormalną w $\mathbf{K}^n$ (tutaj a_j są kolumnami macierzy A). Analogiczna sytuacja ma miejsce z wierszami – wynika to z równości $AA^\dagger = I$.

4 Operatory hermitowsko samosprzężone (hermitowskie)

Mówimy, że $F \in \mathrm{End}V$ jest *hermitowsko samosprzężony* lub *hermitowski* (używa się też terminu *samosprzężony*), jeśli $F^\dagger = F$.

Jest tak wtedy, gdy macierz $A = [F]^e{}_e$ w bazie o.n. spełnia warunek $A^\dagger = A$, czyli $\bar{a^j}_i = a^i{}_j$. Macierz taką nazywa się *macierzą hermitowską* (dla $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ warunek mówi, że macierz jest *symetryczna*).

Stwierdzenie. Rzut jest hermitowski wtedy i tylko wtedy, gdy jest ortogonalny.

Dowód.

$\Longrightarrow$ Jeśli $V = E \oplus E'$ i $P = P^\dagger$ jest rzutem na E wzdłuż E', to dla $x \in E$, $y \in E'$ mamy

$$(x|y) = (Px|y) = (P^\dagger x|y) = (x|Py) = 0$$

(ponieważ $Py = \mathbf{0}$, więc $E' = E^\perp$.

$\Longleftarrow$ Jeśli $P = P_E$ jest rzutem ortogonalnym na podprzestrzeń E, to

$$(P^\dagger x|y) = (x|Py) = (Px+(I-P)x|Py) = (Px|Py) = (Px|Py+(I-P)y) = (Px|y).$$

Z racji istnienia izomorfizmu między V i V^*, realizowanego przez iloczyn skalarny, nie powinno być zaskoczeniem następujące

Stwierdzenie. Jeśli $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ i $F = F^\dagger$, to wzór

$$b(x,y) = (x|Fy)$$

określa symetryczną formę dwuliniową. Odpowiedniość $F \longleftrightarrow b$ jest wzajemnie jednoznaczna.

Rzeczywiście, mamy

$$b(y,x) = (y|Fx) = (Fy|x) = (x|Fy) = b(x,y).$$

Również na odwrót, forma b wyznacza jednoznacznie F (dowód tu pominiemy).

5 Twierdzenie spektralne

Tutaj dalej V będzie ustaloną n-wymiarową przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym.

5.1 Operatory normalne

Definicja. $F \in \mathrm{End}V$ nazywa się *normalny*, jeśli $FF^\dagger = F^\dagger F$.

Przykłady:

- $F = F^\dagger$ (tzn. F samosprzężony).

- $FF^\dagger = I$ (tzn. F jest ortogonalny bądź unitarny).

Operatory normalne posiadają następujące własności:

1. $||F^\dagger x|| = ||Fx||$. Istotnie, $||Fx||^2 = (Fx|Fx) = (F^\dagger Fx|x) = (FF^\dagger x|x) = (F^\dagger x|F^\dagger x) = ||F^\dagger x||^2$.

2. $\mathrm{Ker}F = \mathrm{Ker}F^\dagger$. Mamy bowiem: $Fx = \mathbf{0} \iff ||Fx|| = 0$, a z p. 1 wynika, że $||Fx|| = ||F^\dagger x||$, więc $||Fx|| = 0 \iff ||F^\dagger x|| = 0 \iff F^\dagger x = \mathbf{0}$.

3. $\mathrm{Ker}(F - \lambda I) = \mathrm{Ker}(F^\dagger - \bar{\lambda} I)$ (ponieważ – jak łatwo sprawdzić – operator $F - \lambda I$ też jest normalny). Pokazana właśnie równość oznacza, że $Fx = \lambda x \iff F^\dagger x = \bar{\lambda} x$.

4. Wektory własne odpowiadające *różnym* wartościom własnym są ortogonalne. Wynika to z tego, że jeżeli $Fx = \lambda x$ i $Fy = \mu y$, to
$$\mu(x|y) = (x|\mu y) = (x|Fy) = (F^\dagger x|y) = (\bar{\lambda} x|y) = \lambda(x|y).$$

Twierdzenie. Operator normalny w przestrzeni unitarnej jest diagonalizowalny i posiada o.n. bazę wektorów własnych.

Dowód. (Indukcja po $n = \dim V$). Niech $F \in \mathrm{End}\ V$ będzie normalny. Niech $\lambda \in \mathrm{Sp}\ F$, $Fx_0 = \lambda x_0$, $||x_0|| = 1$ (w przestrzeni zespolonej, operator posiada przynajmniej jeden wektor własny).

Podprzestrzeń $D := \langle x_0 \rangle^\perp$ jest niezmiennicza dla F i $F^\dagger$:
$$y \in E \iff (x_0|y) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} (x_0|Fy) = (F^\dagger x_0|y) = (\bar{\lambda} x_0|y) = 0, \\ (x_0|F^\dagger y) = (Fx_0|y) = (\lambda x_0|y) = 0. \end{cases}$$

Operator $F|_E$ (operator F obcięty do podprzestrzeni E) jest normalny (co łatwo sprawdzić zauważając, że $(F|_E)^\dagger = F^\dagger|_E$). Z założenia indukcyjnego istnieje baza o.n. w E złożona z wektorów własnych $F|_E$ (bo $\dim E = n - 1$). Ta baza łącznie z wektorem x_0 stanowi bazę o.n. wektorów własnych operatora F.

Opnieważ podprzestrzenie własne $V_i := \mathrm{Ker}(F - \lambda_i I)$, $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\} = \mathrm{Sp}\ F$ są do siebie prostopadłe, to operatory rzutowe P_i związane z rozkładem $V = \bigoplus_{i=1}^{r} V_i$ są rzutami ortogonalnymi (więc hermitowskimi). Zatem rzuty występujące w *rozkładzie spektralnym* F (por. miejsce gdzie było o strukturze endomorfizmu):
$$F = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i P_i \tag{4}$$
spełniają nie tylko warunki $P_i P_j = \mathbf{0}$ dla $i \neq j$, $P_i^2 = P_i$, $\sum_{i=1}^{r} P_i = I$, ale też $P_i^\dagger = P_i$. Okazuje się też, że istnienie rozkładu (4) jest również warunkiem dostatecznym na to, aby operator F był normalny.

Uwaga: Operator normalny w przestrzeni euklidesowej nie musi być diagonalizowalny. Na przykład obrót w $\mathbf{R}^2$ o kąt ϕ:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

jest operatorem ortogonalnym, więc hermitowskim, ale nie posiada niezerowych wektorów własnych.

5.2 Twierdzenie spektralne dla operatorów hermitowskich

Twierdzenie. Operator samosprzężony jest diagonalizowalny, a jego wielomian charakterystyczny ma tylko rzeczywiste pierwiastki.

Dowód (a właściwie pół dowodu): Niech $F^\dagger = F$.

1. Przypadek $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Jeśli $w_F(\lambda) = 0$, to istnieje $x \neq 0$ taki, że $Fx = \lambda x$ i mamy $(x|Fx) = \lambda(x|x)$; ale $(x|Fx) = (Fx|x) = (x|\bar{F}x)$ jest rzeczywiste, więc $\lambda \in \mathbf{R}$.

2. Przypadek $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Ten przypadek sprowadza się do zespolonego przez *kompleksyfikację* przestrzeni V. Ponieważ ten temat został pominięty w dotychczasowym wykładzie, a teraz brak już czasu – więc Czytelnik, którego to interesuje, musi to uzupełnić na własną rękę.

I TO JUŻ KONIEC!
POMYŚLNEGO ZDANIA EGZAMINÓW I UDANYCH WAKACJI
ŻYCZY
WYKŁADOWCA.