

WIELOMIANY

1 Wstępne wiadomości o wielomianach

Funkcja $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, gdzie \mathbb{K} – ciało, nazywa się *wielomianem* (nad \mathbb{K}), jeśli jest postaci

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad (1)$$

gdzie n jest liczbą naturalną lub zerem (przyjmujemy $x^0 = 1$) oraz $a_j \in \mathbb{K}$ dla $j = 0, 1, \dots, n$ (liczby a_0, \dots, a_n nazywamy *współczynnikami* wielomianu). Zbiór wszystkich wielomianów nad \mathbb{K} oznaczamy przez $\mathbb{K}[\cdot]$.

Wielomiany można dodawać i mnożyć: jeśli $f, g \in \mathbb{K}[\cdot]$, to ich suma i iloczyn są określone jako:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

Dla $\mathbb{K}[\cdot]$ z działaniami dodawania i mnożenia są spełnione wszystkie aksjomaty ciała z wyjątkiem istnienia elementu odwrotnego względem mnożenia (iloraz dwu wielomianów może nie być wielomianem). Wielomian *zerowy*: $f(x) \equiv 0$ jest elementem neutralnym względem dodawania, zaś wielomian tożsamościowo równy 1 jest elementem neutralnym względem mnożenia.

W zbiorze $\mathbb{K}[\cdot]$ dodatkowo jest jeszcze określona operacja mnożenia wielomianu przez liczbę: jeśli $f \in \mathbb{K}[\cdot]$ oraz $\lambda \in \mathbb{K}$, to wielomian λf jest zdefiniowany jako

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Uwaga. Zbiór P z elementami, na których można wykonywać działania dodawania i mnożenia nazywamy *pierścieniem*, jeśli działania te mają następujące własności: *i*) dodawanie jest przemienne, istnieje element neutralny oraz odwrotny do danego elementu; *ii*) mnożenie w pierścieniu jest łączne; *iii*) zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania. Zwróćmy uwagę, że *nie zakładamy* istnienia elementu neutralnego względem mnożenia, ani przemienności mnożenia. Pojęcie pierścienia jest bardzo ważne w algebrze; na razie niestety nie możemy poświęcić mu więcej uwagi. Czytelnik zechce sprawdzić, że zbiór wielomianów jest pierścieniem.

Udowodnimy teraz, że współczynniki wielomianu są przezeń jednoznacznie wyznaczone. Wynika to z następującego lematu.

Lemat. Jeśli $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{K}$, to $a_j = 0$ dla $j = 0, 1, \dots, n$.

Dowód: Zastosujemy metodę indukcji. Dla $n = 0$ teza ta jest oczywiście prawdziwa. Załóżmy, że teza ta jest prawdziwa dla $n - 1$ i niech zachodzi

$$g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$$

dla każdego $x \in \mathbb{K}$. Wielomian $g(x + 1)$ też jest wielomianem zerowym; przy potędze x^n ma on współczynnik a_n , zaś przy x^{n-1} współczynnik jest $(a_{n-1} + na_n)$. Stąd $g(x + 1) - g(x)$ jest wielomianem zerowym, który przy swojej najwyższej potędze x^{n-1} ma współczynnik $(n - 1)a_n$. Z założenia indukcyjnego wynika, że współczynnik ten jest zerem, czyli $a_n = 0$. Zatem $g(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$ i, korzystając jeszcze raz z założenia indukcyjnego widzimy, że $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

Wniosek (o jednoznaczności współczynników wielomianu): Niezerowy wielomian f posiada jedyne przedstawienie w postaci (1) dla pewnych a_0, \dots, a_n . Zachodzi przy tym: $a_n \neq 0$.

Założmy że jest przeciwnie, tzn. f ma dwa przedstawienia:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = f(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m,$$

gdzie $a_n \neq 0, b_m \neq 0, n \geq m$, to

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_m - b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + \dots + a_nx^n = 0$$

i z powyższego lematu wynika, że $n = m$ (w przeciwnym przypadku $a_n = 0$ wbrew założeniu) oraz $a_i = b_i$ dla $i = 0, \dots, n$.

Liczbę n nazywamy *stopniem* wielomianu f i oznaczamy przez $\deg f$. Przyjmujemy też że $\deg 0 = -\infty$. (Może się to wydawać dziwne, ale za chwilę podamy uzasadnienie).

Dla niezerowych $f, g \in \mathbb{K}[\cdot]$ mamy

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g, \quad \deg(f+g) \leq \max(\deg(f), \deg(g)), \quad \deg(\lambda f) = \deg f \quad (\lambda \neq 0).$$

Uwaga. Powyższe własności zachodzą także bez zastrzeżenia o niezerowaniu się, jeśli przyjąć regułę, że $-\infty + \text{cokolwiek} = -\infty$ (po to właśnie przyjęto taki dziwny stopień wielomianu zerowego).

Uwaga. Wielomiany stopnia większego od zera są *nieodwracalne*:

$$\deg f > 0, \quad fg = 1 \implies \deg g < 0 \text{ i } g \neq 0 \text{ (sprzeczność)}.$$

Stwierdzenie (o dzieleniu z resztą). Dla każdej pary wielomianów $f, g \in \mathbb{K}[\cdot]$, gdzie g jest niezerowy, istnieje dokładnie jedna para wielomianów $q, r \in \mathbb{K}[\cdot]$ taka, że

$$f = qg + r \quad \text{oraz} \quad \deg r < \deg g \tag{2}$$

(q nazywamy ilorazem, r – resztą).

Dowód:

1. Istnienie (indukcja względem stopnia f).

Jeśli $\deg f < \deg g$, to przyjmujemy $q = 0, r = f$.

Jeśli $n = \deg f \geq \deg g = m$, to mamy:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m,$$

przy czym $a_n \neq 0 \neq b_m$, to wielomian

$$f_1(x) := f(x) - \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x)$$

ma stopień mniejszy od n i z założenia indukcyjnego możemy wyrazić f_1 w postaci: $f_1 = q_1g + r$, gdzie $\deg r < \deg g$, skąd mamy żądane przedstawienie f w postaci (2):

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x) = q_1(x)g(x) + r(x) + \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}g(x) = \\ &= \left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + q_1(x) \right) g(x) + r(x). \end{aligned}$$

2. Jednoznaczność. Jeśli mamy dwa przedstawienia w postaci (2):

$$f = qg + r = q'g + r', \quad \deg r < \deg g, \quad \deg r' < \deg g,$$

to $(q - q')g = r - r'$ i gdyby było $q \neq q'$, to $\deg(q' - q) \geq 0$, i mielibyśmy

$$\deg g > \deg(r - r') = \deg(q' - q) + \deg g \geq \deg g,$$

czyli otrzymaliśmy sprzeczność. Zatem $q = q'$ oraz $r - r' = 0 \cdot g = 0$, czyli $r = r'$.

Mówimy, że wielomian f *dzieli się* przez niezerowy wielomian g , jeśli istnieje wielomian q taki, że $f = qg$. Mówimy wtedy także, że g *dzieli* f , co zapisujemy: $g|f$.

Uwagi:

1. $g|f \iff$ resztą z dzielenia f przez g jest zero.
2. Jeśli $f(a) = 0$ (czyli a jest pierwiastkiem f), to $(x - a)|f$.
3. Jeśli $g|f$ to $\deg g \leq \deg f$.

Mamy następujące, proste do stwierdzenia fakty:

1. $h|f$ i $h|g \implies h|(f + g)$.
2. $h|f \implies h|(gf)$.
3. $g|f$ i $f|g \implies f = \lambda g$ (λ - niezerowa liczba).

Dla przykładu pokażemy ostatnią własność. Skoro $g|f$ i $f|g$ to $\deg g \leq \deg f$ i $\deg f \leq \deg g$, czyli $\deg g = \deg f$. Z podzielności f przez g wynika $f = qg$, skąd $\deg f = \deg q + \deg g$, a więc $\deg q = 0$, czyli q jest stałą (którą możemy oznaczyć jako λ).

2 Największy wspólny dzielnik

Wielomian w nazywa się *największym wspólnym dzielnikiem* (NWD) niezerowych wielomianów f i g , jeżeli

1. $w|f$ i $w|g$
2. $u|f$ i $u|g \implies u|w$. (Innymi słowy, wielomian w ma najwyższy stopień spośród wspólnych dzielników f i g).

Uwaga. Angielski odpowiednik NWD to GCD (greatest common divisor).

Jeśli NWD wielomianów f i g istnieje, to jest jedyny z dokładnością do czynnika liczbowego (wynika to z własności 3. ostatniego paragrafu; zachęcamy Czytelnika aby to pokazał).

Twierdzenie. (Algorytm Euklidesa szukania NWD). Największy wspólny dzielnik dwóch wielomianów f, g (zakładamy, że $\deg f \geq \deg g$) istnieje i jest dany jako "ostatnia reszta" (tzn. r_k) w następującym algorytmie, polegającym na wykonywaniu kolejnych dzielen z resztą:

W pierwszym kroku dzielimy f przez g , otrzymując iloraz q_1 i resztę r_1 .

W drugim kroku dzielimy g przez r_1 , otrzymując iloraz q_2 i resztę r_2 .

W trzecim kroku dzielimy r_1 przez r_2 , otrzymując iloraz q_3 i resztę r_3 , itd. Mamy więc ciąg następujących równości:

$$\begin{array}{lll} f = q_1g + r_1 & r_1 \neq 0 & \deg r_1 < \deg g \\ g = q_2r_1 + r_2 & r_2 \neq 0 & \deg r_2 < \deg r_1 \\ r_1 = q_3r_2 + r_3 & r_3 \neq 0 & \deg r_3 < \deg r_2 \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k & r_k \neq 0 & \deg r_k < \deg r_{k-1} \\ r_{k-1} = q_{k+1} r_k + 0 & r_{k+1} = 0 & \end{array}$$

Dowód. Mamy następującą własność powyższego ciągu równości: jeśli dla równości

$$r_m = q_{m+2}r_{m+1} + r_{m+2} \tag{3}$$

$$r_{m+1} = q_{m+3}r_{m+2} + r_{m+3} \tag{4}$$

zachodzi: $h|r_m, h|r_{m+1}$ to wynika stąd: $h|r_{m+2}, h|r_{m+3}$ itd. (Zapisaćmy bowiem równość (3) w postaci: $r_{m+2} = r_m - q_{m+2}r_{m+1}$. Prawa strona jest podzielna przez h , a więc lewa, tzn. r_{m+2} także jest podzielna przez h .)

Zapisaćmy teraz równość (4) w postaci: $r_{m+3} = r_{m+1} - q_{m+3}r_{m+2}$. Skoro r_{m+1} i r_{m+2} dzielą się przez h , to r_{m+3} też. Itd.) Analogicznie: $h|r_{m-1}, h|r_{m-2}$ itd. Możemy obrazowo powiedzieć, że ma miejsce "propagacja" podzielności w górę i w dół.

Innymi słowy, jeśli wielomian h dzieli lewe strony dwu kolejnych równości (dzieli więc także prawe strony), to dzieli lewe (a więc i prawe) strony *wszystkich* równości.

Korzystając z tej własności mamy:

1. Ponieważ r_k dzieli dwie ostatnie lewe strony, to dzieli dwie pierwsze, więc $r_k|f$ i $r_k|g$, czyli r_k jest wspólnym dzielnikiem f i g .
2. Jeśli h dzieli f i g to dzieli dwie pierwsze lewe strony, więc dzieli też dwie ostatnie, czyli dzieli też r_k , a to znaczy, że r_k jest *największym* wspólnym dzielnikiem.

Stwierdzenie. Jeżeli w jest NWD wielomianów f i g to istnieją wielomiany u i v takie, że

$$w = uf + vg.$$

Dowód. Będziemy mówić, że wielomian h jest *kombinacją* wielomianów p i q , jeśli istnieją wielomiany a, b takie, że $h = ap + bq$. Wychodząc od ostatniej równości w algorytmie Euklidesa mamy:

$$\begin{aligned} r_k &= -q_k r_{k-1} + r_{k-2} \quad \text{tzn. } r_k \text{ jest kombinacją } r_{k-1} \text{ i } r_{k-2} \\ &= -q_k(r_{k-3} - q_{k-1}r_{k-2}) + r_{k-2} \quad \text{tzn. } r_k \text{ jest kombinacją } r_{k-2} \text{ i } r_{k-3} \\ &= -q_k(r_{k-3} - q_{k-1}(r_{k-4} - q_{k-2}r_{k-3})) + r_{k-4} - q_{k-2}r_{k-3} \quad \text{tzn. } r_k \text{ jest kombinacją } r_{k-3} \text{ i } r_{k-4} \\ &\dots\dots\dots \\ &= (\text{coś}) \cdot g + (\text{coś innego}) \cdot f \quad \text{tzn. } r_k \text{ jest kombinacją } g \text{ i } f \end{aligned}$$

Wniosek. $h|f$ i $h|g \implies$ istnieją wielomiany a, b takie, że $h = af + bg$ (bo h dzieli NWD f i g).

Mówimy, że w jest NWD niezerowych wielomianów f_1, \dots, f_n , jeśli

1. $w|f_k$ dla $k = 1, \dots, n$
2. $h|f_k$ dla $k = 1, \dots, n$ implikuje $h|w$.

Łatwo się przekonać, że NWD wielomianów f_1, \dots, f_n dany jest rekurencyjną formułą (w ten sposób mamy konstruktywny dowód istnienia):

$$\text{NWD}(f_1, \text{NWD}(f_2, \dots, \text{NWD}(f_{n-1}, f_n) \dots)).$$

Stwierdzenie. Jeśli w jest NWD wielomianów f_1, \dots, f_n , to istnieją wielomiany u_1, \dots, u_n takie, że

$$w = u_1 f_1 + \dots + u_n f_n. \quad (5)$$

Dowód: (indukcja po n): Niech v będzie NWD wielomianów f_1, \dots, f_{n-1} . Wtedy $w|v$ i $w|f_n$, więc $w = av + bf_n$ dla pewnych wielomianów a, b (p. Wniosek powyżej). Ale z założenia indukcyjnego v jest postaci: $v = g_1 f_1 + \dots + g_{n-1} f_{n-1}$ dla pewnych wielomianów g_1, \dots, g_{n-1} , więc

$$w = a(g_1 f_1 + \dots + g_{n-1} f_{n-1}) + b f_n,$$

czyli w jest postaci (5).

3 Rozkład wielomianu na czynniki, funkcji wymiernej na ułamki proste

3.1 Rozkładalność wielomianów

Definicja. Wielomian $p \in \mathbb{K}[\cdot]$ dodatniego stopnia jest *nierozkładalny* (używa się też nazwy: *pierwszy*), jeśli nie istnieją wielomiany $a, b \in \mathbb{K}[\cdot]$ stopni dodatnich takie, że $p = ab$.

Uwaga. (Nie)rozkładalność wielomianu zależy od ciała, nad którym ten wielomian jest określony. Np. wielomian $u = x^2 + 1$ jest rozkładalny nad ciałem \mathbb{C} (wtedy $u = (x + i)(x - i)$), natomiast jest nierozkładalny nad ciałem \mathbb{R} .

Definicja. Wielomian nazywa się *unormowany*, jeśli współczynnik przy najwyższej potędze jest równy 1.

Lemat. Jeśli p jest nierozkładalny oraz $p|fg$, to $p|f$ lub $p|g$.

Dowód. Czym może być NWD (p, f) ? Są dwie możliwości: *i*) $\text{NWD}(p, f) = p$ lub *ii*) $\text{NWD}(p, f) = 1$ (więcej możliwości nie ma, gdyż p , jako nierozkładalny, ma tylko dwa dzielniki: jedynekę oraz samego siebie). W przypadku *i*): $p|f$, co kończy dowód. W przypadku *ii*): istnieją wielomiany u i v takie, że $1 = up + vf$, skąd mamy: $g = upg + vfg$, a z założenia $p|fg$. Zatem p dzieli prawą stronę, więc zachodzi $p|g$.

Stwierdzenie. Każdy niezerowy wielomian przedstawia się jako stała razy pewna ilość wielomianów nierozkładalnych unormowanych. Rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do porządku czynników.

Dowód. Istnienie wykażemy indukcyjnie (ze względu na stopień). Załóżmy, że stwierdzenie jest prawdziwe dla wielomianów stopnia mniejszego od n . Niech f będzie wielomianem stopnia n . Jeśli jest on nierozkładalny, to $f = a_n \cdot \frac{f}{a_n}$ jest szukanym rozkładem (a_n – współczynnik przy najwyższej potędze). Jeśli f jest rozkładalny, to $f = gh$, gdzie $\deg g, \deg h < n$. Możemy więc przyjąć, że

$$g = \lambda p_1 \cdots p_k, \quad h = \lambda' p'_1 \cdots p'_l$$

gdzie p_i, p'_j ($i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$) są wielomianami nierozkładalnymi i unormowanymi, zaś λ i λ' pewnymi (niezerowymi) stałymi. Stąd $f = \lambda\lambda'p_1 \cdots p_k \cdot p'_1 \cdots p'_l$.

Dla dowodu jednoznaczności, przypuśćmy, że wielomian f ma dwa rozkłady, o których mowa w tezie:

$$f = \lambda p_1 \cdots p_k = \lambda' q_1 \cdots q_l.$$

gdzie wszystkie p_i, q_j są *nierozkładalne*. Musi zachodzić: $\lambda = \lambda'$. Skoro p_1 dzieli $\lambda'q_1 \cdots q_l$, to dzieli pewien czynnik q_m (p. powyższy Lemat), a więc $p_1 = q_m$ (uwaga 2 powyżej). Po podzieleniu obu stron przez ten wspólny czynnik mamy dwa rozkłady wielomianu f/q_m stopnia niższego niż $n = \deg f$:

$$p_2 \cdots p_k = q_1 \cdots q_{m-1} q_{m+1} \cdots q_l$$

i dowód dalej biegnie indukcyjnie, dając konkluzję, że czynniki p_i ($i \neq 1$) i q_j ($j \neq m$) są parami równe (dla odpowiednio dobranych par).

Mówimy, że dwa wielomiany f, g są *względnie pierwsze*, jeśli $\text{NWD}(f, g) = 1$. Jest tak wtedy i tylko wtedy, gdy w rozkładzie obu wielomianów na czynniki nierozkładalne nie ma wspólnego czynnika.

Wielomiany nierozkładalne dla $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ to wielomiany stopnia 1 (jest tak, gdyż wielomian stopnia wyższego niż 1 dzieli się przez $(z - z_0)$, gdzie z_0 jest pierwiastkiem f ; takie z_0 istnieje na mocy zasadniczego twierdzenia algebry).

Wniosek. (Pełniejsza wersja zasadniczego twierdzenia algebry): Każdy niezerowy wielomian $f \in \mathbb{C}[\cdot]$ jest iloczynem stałej i pewnej ilości czynników postaci $z - z_j$, gdzie z_j - pierwiastki wielomianu f ($j = 1, \dots, k$; zakładamy że f posiada k różnych pierwiastków):

$$f(z) = \lambda(z - z_1)^{n_1} \cdots (z - z_k)^{n_k}.$$

Liczba n_j nazywa się *krotnością* j -tego pierwiastka z_j . Krotność pierwiastka z_j można również określić jako największą liczbę naturalną m taką, że $(z - z_j)^m$ dzieli f . Suma krotności wszystkich pierwiastków jest równa stopniowi wielomianu: $n_1 + \cdots + n_k = n = \deg f$.

Wielomiany nierozkładalne dla $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ to wielomiany stopnia 1 lub wielomiany stopnia 2 o wyróżniku ujemnym. Istotnie, jeśli $f \in \mathbb{R}[\cdot]$ jest nierozkładalny i $\deg f > 1$, to f traktowany jako element $\mathbb{C}[\cdot]$ ma pierwiastek zespolony z_0 o niezerowej części urojonej: $z_0 = a + ib, b \neq 0$. Liczba sprzężona \bar{z}_0 też jest pierwiastkiem f (co wynika np. z wzoru na pierwiastki równania kwadratowego z wyróżnikiem ujemnym). Zatem f jest podzielny przez

$$p_2(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0) = z^2 - 2az + (a^2 + b^2)$$

Skoro $p_2(z)$ ma rzeczywiste współczynniki, to $p_2|f$ nie tylko w $\mathbb{C}[\cdot]$, ale także w $\mathbb{R}[\cdot]$. Stąd $f = \text{const} \cdot p_2$.

Wniosek. Każdy niezerowy wielomian $f \in \mathbb{R}[\cdot]$ rozkłada się na czynniki liniowe (tzn. wielomiany stopnia 1) i kwadratowe (tzn. stopnia 2) o wyróżniku ujemnym.

3.2 Rozkład na ułamki proste

Definicja. *Funkcja wymierna* to funkcja postaci f/g , gdzie f i g są wielomianami; dziedziną funkcji jest $\mathbb{R}(\mathbb{C})$ poza zbiorem zer mianownika.

Definicja. *Ułamek właściwy* to funkcja wymierna f/g , gdzie $\deg f < \deg g$.

Definicja. Ułamek prosty to ułamek właściwy f/g , gdzie $g = p^n$ ($n \in \mathbb{N}$), p – nierozkładalny, $\deg f < \deg p$.

Twierdzenie. Każdy ułamek właściwy jest sumą ułamków prostych.

Dowód. Będziemy mówić, że ułamek właściwy f/g jest *pojedynczy*, jeśli $g = p^n$, gdzie p – nierozkładalny (uwaga: warunek "pojedynczości": $\deg f < \deg(p^n)$ jest słabszy niż warunek prostoty, np. $x^2/(x+1)^3$ jest właściwy i pojedynczy, a nie jest prosty). Dowód rozbijemy na dwa etapy.

1. Każdy ułamek właściwy f/g jest sumą ułamków pojedynczych.

Niech $g = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ będzie rozkładem g na nierozkładalne czynniki. Przedstawmy g jako iloczyn $g = g_1 g_2$, gdzie g_1, g_2 są względnie pierwsze (biorąc np. $g_1 = p_1^{n_1}$, $g_2 = p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$), to

$$1 = u_1 g_1 + u_2 g_2$$

dla pewnych wielomianów u_1, u_2 . Stąd $f = f u_1 g_1 + f u_2 g_2$. Jeśli $f u_1 = q g_2 + v_2$, $\deg v_2 < \deg g_2$ (dzielenie z resztą $f u_1$ przez g_2), to

$$f = (q g_2 + v_2) g_1 + f u_2 g_2 = (q g_1 + f u_2) g_2 + v_2 g_1 = v_1 g_2 + v_2 g_1$$

dla pewnego v_1 . Stąd

$$\frac{f}{g} = \frac{v_1}{g_1} + \frac{v_2}{g_2},$$

przy czym $\deg(v_1 g_2) \leq \max(\deg f, \deg(v_2 g_1)) < \deg g$, a więc $\deg v_1 < \deg g_1$. Jeśli któryś z mianowników g_1, g_2 jest iloczynem wielomianów względnie pierwszych, to stosujemy do niego (indukcyjnie) to samo rozumowanie, co prowadzi ostatecznie do

$$\frac{f}{g} = \frac{a_1}{p_1^{n_1}} + \cdots + \frac{a_k}{p_k^{n_k}},$$

gdzie $\deg a_j < n_j \deg p_j$ dla $j = 1, \dots, k$.

2. Każdy ułamek pojedynczy $\frac{a}{p^n}$ jest sumą ułamków prostych.

Wykonując serię dzieleni:

$$\begin{array}{lll} a = q_1 p^{n-1} + r_1 & \deg q_1 < \deg p & \deg r_1 < (n-1) \deg p \\ r_1 = q_2 p^{n-2} + r_2 & \deg q_2 < \deg p & \deg r_2 < (n-2) \deg p \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ r_{n-2} = q_{n-1} p + r_{n-1} & \deg q_{n-1} < \deg p & \deg r_{n-1} < \deg p \\ r_{n-1} = q_n + 0 & \deg q_n < \deg p & \end{array}$$

otrzymujemy: $a = q_1 p^{n-1} + q_2 p^{n-2} + \cdots + q_{n-1} p + q_n$, czyli

$$\frac{a}{p^n} = \frac{q_1}{p} + \frac{q_2}{p^2} + \cdots + \frac{q_n}{p^n},$$

gdzie $\deg q_j < \deg p$ dla $j = 1, \dots, n$.

Uwaga. Z zastosowaniem powyższego twierdzenia (tzn. o rozkładzie funkcji wymiernej na ułamki proste) Czytelnicy wkrótce spotkają się na analizie, gdzie będzie omawiany algorytm całkowania funkcji wymiernych. Mając to na uwadze, przepiszmy powyższe twierdzenie w postaci bezpośrednio do zastosowania w analizie:

Rozważmy funkcję wymierną $f(x) = P(x)/Q(x)$, będącą ułamkiem właściwym, tzn. mamy $\deg P < \deg Q$. Zakładamy, że $Q(x)$ ma następujący rozkład na czynniki nad \mathbb{R} :

$$Q(x) = (x - x_1)^{n_1}(x - x_2)^{n_2} \dots (x - x_k)^{n_k}(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{m_1} \dots (x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{m_l}$$

Rozkład $f(x)$ na ułamki pojedyncze ma postać

$$f(x) = \frac{A_1(x)}{(x - x_1)^{n_1}} + \dots + \frac{A_k(x)}{(x - x_k)^{n_k}} + \frac{B_1(x)}{(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{m_1}} + \dots + \frac{B_l(x)}{(x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{m_l}}$$

gdzie $\deg A_1 < n_1, \dots, \deg A_k < n_k, \deg B_1 < 2m_1, \dots, \deg B_l < 2m_l$. Po rozłożeniu każdego z ułamków pojedynczych na ułamki proste, uzyskuje się ostatecznie

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_{1,1}}{x - x_1} + \frac{a_{1,2}}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{a_{1,n_1}}{(x - x_1)^{n_1}} \\ &+ \frac{a_{2,1}}{x - x_2} + \frac{a_{2,2}}{(x - x_2)^2} + \dots + \frac{a_{2,n_2}}{(x - x_2)^{n_2}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{a_{k,1}}{x - x_k} + \frac{a_{k,2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{a_{k,n_k}}{(x - x_k)^{n_k}} \\ &+ \frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{x^2 + \alpha_1x + \beta_1} + \frac{b_{1,2}x + c_{1,2}}{(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^2} + \dots + \frac{b_{1,m_1}x + c_{1,m_1}}{(x^2 + \alpha_1x + \beta_1)^{m_1}} \\ &+ \dots \\ &+ \frac{b_{l,1}x + c_{l,1}}{x^2 + \alpha_lx + \beta_l} + \frac{b_{l,2}x + c_{l,2}}{(x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^2} + \dots + \frac{b_{l,m_l}x + c_{l,m_l}}{(x^2 + \alpha_lx + \beta_l)^{m_l}} \end{aligned} \quad (6)$$

Postać $f(x)$, dana przez wzór (6), to właśnie rozkład na ułamki proste. (Wzór wygląda monstrualnie, ale – po bliższym przyjrzeniu się – jego struktura jest prosta. Poza tym w zastosowaniach występuje zazwyczaj tylko część członów obecnych w powyższej postaci).