1 Wyznaczniki

1.1 Odwzorowania wieloliniowe i formy

Niech V będzie n-wymiarową przestrzenią nad $\mathbb{K}$.

Def. Mówimy, że funkcja $f : \overset{k}{\underset{j=1}{\times}} V \to \mathbb{K}$ jest

1. *k-liniowa*, jeśli jest liniowa w każdym argumencie, tzn.

$$f(x_1, \ldots, \lambda x_j + \mu x'_j, \ldots, x_k) = \lambda f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_k) + \mu f(x_1, \ldots, x'_j, \ldots, x_k)$$

   $\forall\ 1 \leqslant j \leqslant k, x_1, \ldots, x_k, x'_j \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

2. *antysymetryczna*, jeśli przy zamianie dowolnych dwóch argumentów zmienia znak, tzn.

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_k) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_k)$$

   dla $i \neq j$.

Funkcje $f : \overset{k}{\underset{j=1}{\times}} V \to \mathbb{K}$, które są k-liniowe i antysymetryczne, nazywamy *k-formami* na V.

Łatwo sprawdzić, że k-formy tworzą przestrzeń wektorową.

Stw. Jeśli f jest k-formą na V, to

1. $f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}(\pi) f(x_1, \ldots, x_k)\ \forall \pi \in S_k$.
2. Jeśli $x_i = x_j$ dla pewnej pary $i \neq j$, to $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$.
3. Jeśli $x_1, \ldots, x_k$ są liniowo zależne, to $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$. **Dow.** Załóżmy, że j-ty wektor jest liniową kombinacją pozostałych: $x_j = \sum_{i \neq j} \lambda^i x_i$. Wtedy: $f(x_1, \ldots, x_{j-1}, \sum_{i \neq j} \lambda^i x_i, x_{j+1}, \ldots x_k) =$ $\sum_{i \neq j} \lambda^i f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_i, x_{j+1}, \ldots x_k) = 0$, bo w każdym z elementów sumy wektor x_i wystąpi dwukrotnie, więc na mocy własności 2. każdy taki człon sumy jest równy zeru.
4. Jeśli $k > n$, to $f(x_1, \ldots, x_k) = 0$. Zatem z sensem jest mówić o formach tylko dla $k \leqslant n = \dim V$.

Def. *Formy objętości* na V to n-formy na V, gdzie – przypomnijmy – $n = \dim V$ (tzn. forma objętości to k-forma dla $k = n$).

Jak duża jest przestrzeń form objętości? (tworzą one – jak pamiętamy – przestrzeń wektorową). Odpowiedź na to daje

Lemat. Niech $e = e_1, \ldots, e_n$ – baza V. Dla każdej liczby $\alpha \in \mathbb{K}$ istnieje dokładnie jedna forma objętości f taka, że $f(e_1, \ldots, e_n) = \alpha$.

Dow. Weźmy n wektorów $x_1, \ldots, x_n$. Rozkład każdego z nich w bazie e, np. j-tego, ma postać: $x_j = \sum\limits_{i_j=1}^{n} x_j^{i_j} e_{i_j}$. Jeśli f jest n-formą, to

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(\sum_{i_1=1}^{n} x_1^{i_1} e_{i_1}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} x_n^{i_n} e_{i_n}) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{i_n} f(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}) = \sum_{\pi \in S_n} x_1^{\pi(1)} \cdot \ldots \cdot x_n^{\pi(n)} f(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}).$$

Ponieważ $f(e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot f(e_1, \ldots, e_n)$, to mamy jednoznaczny wzór na szukane f: Wartość f na dowolnych wektorach $x_1, \ldots, x_n$ wynosi

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \alpha \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_1^{\pi(1)} \cdot \ldots \cdot x_n^{\pi(n)} \tag{1}$$

Wzór ten zapewnia, że $f(e_1, \ldots, e_n) = \alpha$.

Trzeba jeszcze pokazać, że spełnione są warunki definiujące formę objętości.

Liniowość w j-tym argumencie wynika z równości

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_1^{\pi(1)} \cdot \ldots \cdot (\lambda x_j^{\pi(j)} + \mu x_j'^{\pi(j)}) \cdot \ldots \cdot x_n^{\pi(n)} =$$

$$= \lambda \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_1^{\pi(1)} \cdot \ldots \cdot x_j^{\pi(j)} \cdot \ldots \cdot x_n^{\pi(n)} + \mu \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_1^{\pi(1)} \cdot \ldots \cdot x_j'^{\pi(j)} \cdot \ldots \cdot x_n^{\pi(n)}.$$

Aby pokazać antysymetrię w (dowolnych) miejscach i, j, zamieniamy sumowanie po π na sumowanie po $\sigma = \pi \circ (i, j)$; tu (i, j) jest transpozycją. Mamy:

$$\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot x_1^{\pi(1)} \cdot \ldots \cdot x_i'^{\pi(j)} \cdot \ldots \cdot x_j'^{\pi(j)} \cdot \ldots \cdot x_n^{\pi(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma \circ (i, j)) \cdot x_1^{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot x_n^{\sigma(n)}$$

a że $\operatorname{sgn}(\sigma \circ (i, j) = \operatorname{sgn}(\sigma)$, to mamy żądaną własność antysymetrii.

Uwagi.

- Z tezy lematu wynika, że przestrzeń form objętości ma wymiar 1.
- Ile wynosi wymiar przestrzeni k-form na przestrzeni n-wymiarowej? Odpowiedź będzie na analizie, gdy będzie mowa o formach różniczkowych i tw. Stokesa; lub np. w książce W.I. Arnolda, „Metody matematyczne mechaniki klasycznej").
- Ile wynosi wymiar przestrzeni *wszystkich* odwzorowań k-liniowych $f : \times_{j=1}^{k} V \to \mathbb{K}$? tu $V = \mathbb{K}^n$.

2 Wyznaczniki i ich podstawowe własności

Def. *Wyznacznikiem* (stopnia n) nazywamy formę objętości det na $V = \mathbb{K}^n$ wyznaczona warunkiem $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$, gdzie $e_1, \ldots, e_n$ – baza standardowa.

Uwaga. Z tezy lematu wynika, że dowolna forma objętości na $\mathbb{K}^n$ jest proporcjonalna do det, przy czym:

$$f = f(e_1, \ldots, e_n) \cdot \det$$

Def. *Wyznacznikiem macierzy* $A \in \mathbb{K}^n{}_n$ nazywamy wyznacznik jej kolumn: $\det A = \det(a_1, \ldots, a_n)$. Zgodnie z wzorem (1)

$$\det A = \det(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot a^{\pi(1)}{}_1 \cdot \ldots \cdot a^{\pi(n)}{}_n. \tag{2}$$

Na wyznacznik stosuje się też oznaczenie:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} a^1{}_1 & \ldots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & \ldots & a^n{}_n \end{bmatrix} = \det \begin{vmatrix} a^1{}_1 & \ldots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & \ldots & a^n{}_n \end{vmatrix}$$

Z wzoru (2) otrzymujemy znane nam (prawdopodobnie) postaci wyznaczników dla $n = 2$:

$$\mathrm{det} A = \det(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 \end{vmatrix} = a^1{}_1 a^2{}_2 - a^1{}_2 a^2{}_1$$

oraz dla $n = 3$:

$$\mathrm{det} A = \det(a_1, a_2, a_3) = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & a^1{}_2 & a^1{}_3 \\ a^2{}_1 & a^2{}_2 & a^2{}_3 \\ a^3{}_1 & a^3{}_2 & a^3{}_3 \end{vmatrix}$$

$$= a^1{}_1 a^1{}_2 a^3{}_3 + a^2{}_1 a^3{}_2 a^1{}_3 + a^3{}_1 a^1{}_2 a^2{}_3 - a^2{}_1 a^1{}_2 a^3{}_3 - a^1{}_1 a^3{}_2 a^2{}_3 - a^3{}_1 a^2{}_2 a^1{}_3$$

które to wzory łatwo zapamiętać wg (prawdopodobnie Czytelnikowi) znanej *reguły Sarrusa. Uwaga-ostrzeżenie:* Reguła ta działa tylko dla $n = 2$ i $n = 3$!

Stw. $\det A = \det A^T$.

Dow. Oznaczmy $B = A^T$. Mamy:

$$\det A = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot a^{\pi(1)}{}_1 \cdot \ldots \cdot a^{\pi(n)}{}_n = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sgn}(\pi) \cdot a^1{}_{\pi^{-1}(1)} \cdot \ldots \cdot a^n{}_{\pi^{-1}(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot a^1{}_{\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a^n{}_{\sigma(n)} = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot b^{\sigma(1)}{}_1 \cdot \ldots \cdot b^{\sigma(n)}{}_n$$

Przy trzeciej równości zamieniliśmy sumowanie po π sumowaniem po $\sigma = \pi^{-1}$; znak σ jest przy tym taki sam jak znak π.

Tw. (Cauchy'ego o mnożeniu wyznaczników). Dla $A, B \in \mathbb{K}^n{}_n$ mamy: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Dow. Wyrażenie $\det(AB) = \det(Ab_1, \ldots, Ab_n)$ jest n-liniową, antysymetryczną funkcją kolumn $(b_1, \ldots, b_n)$ macierzy B. Zatem $\det(AB) = \alpha \det B$, gdzie stała α jest wartością tej funkcji na wektorach $(b_1, \ldots, b_n) = (e_1, \ldots, e_n)$, co odpowiada $B = I_n$ (macierz jednostkowa):

$$\alpha = \det(AI_n) = \det A.$$

Stw. Dla macierzy $A \in \mathbb{K}^n{}_n$ następujące warunki są równoważne:

1. A jest odwracalna
2. $\det A \neq 0$
3. A ma liniowo niezależne kolumny
4. $\mathrm{rank}\, A = n$.

Dowód:

1. $\Longrightarrow$ 2.: Jeśli istnieje A^{-1}, to $\det(A^{-1})\det(A) = \det(AA^{-1}) = \det I = 1$.

2. $\Longrightarrow$ 3.: Wyznacznik liniowo niezależnego układu wektorów jest równy zeru (była dowodzona taka własność dla formy objętości, a wyznacznik jest do niej proporcjonalny).

3. $\Longrightarrow$ 4.: Oczywiste. 4. $\Longrightarrow$ 1.: A jest „na", jest więc bijekcją (wymiary obrazu i przeciwobrazu są równe).

Uwagi.

- Z dowodu 1. $\Longrightarrow$ 2. wynika, że dla A odwracalnej zachodzi $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.
- Macierze odwracalne nazywa się też *nieosobliwymi* (a nieodwracalne – osobliwymi).

2.1 Operacje elementarne a wyznaczniki

Operacje elementarne na kolumnach macierzy $A = (a_1, \ldots, a_n)$ w następujący sposób odbijają się na jej wyznaczniku:

$$\det(a_{\pi(1)}, \ldots, a_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}\pi \cdot \det(a_1, \ldots, a_n).$$

$$\det(a_1, \ldots, \lambda a_j, \ldots, a_n) = \lambda \det(a_1, \ldots, a_n).$$

$$\det(a_1 + \lambda_1 a_j, \ldots, a_j, \ldots, a_n + \lambda_n a_j) = \det(a_1, \ldots, a_n).$$

gdzie λ, λ_i $(i \neq j)$ są liczbami z $\mathbb{K}$.

Ze względu na równość wyznacznika macierzy i macierzy transponowanej, operacje stosowane do wierszy macierzy mają analogiczne własności.

Ćwiczenie: Jaki jest związek między $\det(\lambda A)$ oraz $\det(A)$?

2.2 Rozwinięcie Laplace'a

Przedstawmy j-tą kolumnę jako kombinację liniową wektorów bazy:

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j e_i, a_{j+1}, \ldots, a_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} A^j{}_i a^i{}_j,$$

gdzie $A^j{}_i = \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \ldots, a_n)$. Zastosujmy do $A^j{}_i$ operację elementarną typu III (tzn. do każdej kolumny, powiedzmy k, dodajmy j-tą kolumnę ze współczynnikami $-a^i{}_k$). Mamy:

$$A^j{}_i =$$

$$\begin{vmatrix} a^1{}_1 & \ldots & a^1{}_{j-1} & 0 & a^1{}_{j+1} & \ldots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{i-1}_1 & \ldots & a^{i-1}_{j-1} & 0 & a^{i-1}_{j+1} & \ldots & a^{i-1}_n \\ a^i{}_1 & \ldots & a^i{}_{j-1} & 1 & a^i{}_{j+1} & \ldots & a^i{}_n \\ a^{i+1}_1 & \ldots & a^{i+1}_{j-1} & 0 & a^{i+1}_{j+1} & \ldots & a^{i+1}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \ldots & a^n_{j-1} & 0 & a^n_{j+1} & \ldots & a^n_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^1{}_1 & \ldots & a^1{}_{j-1} & 0 & a^1{}_{j+1} & \ldots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{i-1}_1 & \ldots & a^{i-1}_{j-1} & 0 & a^{i-1}_{j+1} & \ldots & a^{i-1}_n \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a^{i+1}_1 & \ldots & a^{i+1}_{j-1} & 0 & a^{i+1}_{j+1} & \ldots & a^{i+1}_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^n_1 & \ldots & a^n_{j-1} & 0 & a^n_{j+1} & \ldots & a^n_n \end{vmatrix}.$$

Przenosząc j-tą kolumnę na pierwsze miejsce (wykonujemy przy tym $j-1$ transpozycji), a następnie i-ty wiersz na pierwsze miejsce ($i-1$ transpozycji), otrzymujemy

$$A^j_i = (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a^1_1 & \ldots & a^1_{j-1} & a^1_{j+1} & \ldots & a^1_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^{i-1}_1 & \ldots & a^{i-1}_{j-1} & a^{i-1}_{j+1} & \ldots & a^{i-1}_n \\ 0 & a^{i+1}_1 & \ldots & a^{i+1}_{j-1} & a^{i+1}_{j+1} & \ldots & a^{i+1}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a^n_1 & \ldots & a^n_{j-1} & a^n_{j+1} & \ldots & a^n_n \end{vmatrix} = (-1)^{i+j} \det A^{\neq i}_{\neq j},$$

gdzie $A^{\neq i}_{\neq j}$ jest macierzą powstałą z A po skreśleniu i-tego wiersza i j-tej kolumny. Liczbę $(-1)^{i+j}\det A^{\neq i}_{\neq j}$ nazywa się *dopełnieniem algebraicznym elementu* $a^i{}_j$.

Mamy więc ostatecznie

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} A^j{}_i a^i{}_j, \tag{3}$$

gdzie $A^j{}_i$ jest dopełnieniem algebraicznym elementu $a^i{}_j$. Wzór (3) nosi nazwę *rozwinięcia Laplace'a wyznacznika* $\det A$ *względem* j*-tej kolumny*.

Analogicznie, rozwijając $\det A^T$ względem i-tej kolumny otrzymamy rozwinięcie Laplace'a wyznacznika $\det A$ względem i-tego wiersza:

$$\det A = \det A^T = \det B = \sum_{i=1}^{n} B^i{}_j b^j{}_i = \sum_{i=1}^{n} a^i{}_j A^j{}_i,$$

(oznaczyliśmy tu $B = A^T$), ponieważ

$$B^i_j = (-1)^{i+j} \det B^{\neq j}_{\neq i} = (-1)^{i+j} \det (B^{\neq j}_{\neq i})^T = (-1)^{i+j} A^{\neq i}_{\neq j} = A^j_i.$$

Przykład. Wyznacznik Vandermonde'a.

3 Wzory Cramera

3.1 Macierz dopełnień

Pamiętamy, że dla macierzy

$$\begin{bmatrix} a^1{}_1 & \ldots & a^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ a^n{}_1 & \ldots & a^n{}_n \end{bmatrix}$$

zachodzi wzór:

$$\det(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} A^j{}_i a^i{}_j$$

(przypomnienie rozwinięcia Laplace'a względem j-tej kolumny – p. wz. (3); tu $A^j{}_i$ oznacza dopełnienie algebraiczne elementu $a^i{}_j$).

Zauważmy, że dla $i \neq j$

$$\sum_{i=1}^{n} A^j{}_i a^i{}_k = 0, \tag{4}$$

ponieważ

$$\sum_{i=1}^{n} \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, e_i, a_{j+1}, \ldots, a_n) a^i_k = \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, \sum_{i=1}^{n} a^i_k e_i, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

$$= \det(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_k, a_{j+1}, \ldots, a_n) = 0,$$

ponieważ kolumna a_k występuje w dwóch miejscach. Stosując wygodny symbol (*deltą Kroneckera* zwany – być może Czytelnikowi już znany, a przez wzór poniżej określany)

$$\delta^j_k = \begin{cases} 1 & \text{gdy} \quad j = k \\ 0 & \text{gdy} \quad j \neq k \end{cases} \tag{5}$$

można wzory (3) i (4) napisać w postaci jednego („dwa w jednym”):

$$\sum_{i=1}^{n} A^j{}_i a^i{}_k = \delta^j_k \det A. \tag{6}$$

Analogicznie, używając (4) dla macierzy transponowanej, otrzymujemy równość

$$\sum_{j=1}^{n} a^i{}_j A^j{}_k = \delta^i_k \det A. \tag{7}$$

Oznaczmy przez A^D macierz, której elementami są dopełnienia algebraiczne elementów macierzy A (zwiemy ją *macierzą dopełnień*):

$$A^D = \begin{bmatrix} A^1{}_1 & \dots & A^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ A^n{}_1 & \dots & A^n{}_n \end{bmatrix}$$

Równości (6) i (7) można teraz zapisać w postaci

$$A^D\, A = I \det A = A\, A^D \tag{8}$$

(bo elementy macierzy jednostkowej I są dane przez deltę Kroneckera).

Przypomnijmy sobie, że macierz A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A \neq 0$. Teraz ze wzoru (8) otrzymujemy wzór na *macierz odwrotną*:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^D \tag{9}$$

(oczywiście dla $\det A \neq 0$).

Uwaga. Wzór (9) rzadko stosuje się w praktyce liczenia macierzy odwrotnych; aby z niego macierz odwrotną wyznaczyć, trzeba policzyc n^2 wyznaczników $n-1 \times n-1$. Ma on jednak duże znaczenie teoretyczne.

Przykład. Macierz odwrotna w ogólnym przypadku $A \in \mathbb{K}^2{}_2$.

3.2 Cramerowski układ równań

Mówimy, że układ równań liniowych $Ax = b$ jest *typu Cramera*, jeżeli A jest macierzą kwadratową ($A \in \mathbb{K}^n_n$) oraz $\det A \neq 0$. Wówczas istnieje dokładnie jedno rozwiązanie: $x = A^{-1}b$ (pamiętamy, że dla $\det A \neq 0$, A jest bijekcją). Wyprowadzimy teraz jawny wzór na j-tą składową szukanego rozwiązania x.

Równanie $Ax = b$ możemy zapisać w postaci

$$x^1 a_1 + \cdots + x^n a_n = b,$$

gdzie $a_1, \ldots, a_n$ są kolumnami macierzy A. Po przeniesieniu b na lewą stronę powyższej równości widać, że wektory

$$x^1 a_1 - b, a_2, \ldots, a_n$$

są liniowo zależne, zatem $\det(x^1 a_1 - b, a_2, \ldots, a_n) = 0$, czyli

$$x^1 \det(a_1, \ldots, a_n) = \det(b, a_2, \ldots, a_n).$$

Otrzymujemy stąd

$$x^1 = \frac{\det(b, a_2, \ldots, a_n)}{\det(a_1, \ldots, a_n)} = \frac{\det(b, a_2, \ldots, a_n)}{\det A}.$$

To samo rozumowanie można zastosować do układu wektorów

$$a_1, \ldots, a_{j-1}, x^j\, a_j - b, a_{j+1}, \ldots, a_n$$

dla dowolnego j, $1 \leqslant j \leqslant n$, co prowadzi do wyrażenia na x^j

$$x^j = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n)}{\det A}.$$

Są to tzw. *wzory Cramera* (znane zapewne Czytelnikowi dla przypadku $n = 2$ lub 3).

3.3 Rząd wyznacznikowy

Przez *podmacierz* danej macierzy A rozumiemy każdą macierz powstałą z A przez skreślenie pewnych wierszy i kolumn (z dopuszczeniem możliwości nieskreślenia żadnych kolumn lub wierszy). Kwadratowe podmacierze będziemy też nazywać *minorami.*

Przypomnijmy, że rzędem wierszowym (kolumnowym) macierzy nazywaliśmy ilość liniowo niezależnych wierszy (kolumn) macierzy i że oba te rzędy są równe. Wprowadzimy teraz trzeci rząd:

Def. *Rzędem wyznacznikowym* macierzy nazywamy maksymalny stopień (czyli rozmiar) jej nieosobliwego minora (-ów).

Stw. (Rząd 'wyznacznikowy' = rząd). Rząd macierzy jest równy jej rzędowi wyznacznikowemu.

Lemat. Macierz o r kolumnach ma rząd r wtedy i tylko wtedy gdy ma nieosobliwy minor stopnia r.

Dow. (lematu):

$\Longrightarrow$: W postaci kolumnowo zredukowanej, ograniczając się do wierszy odpowiadających wybranym jedynakom, otrzymujemy minor o rzędzie r. Minor macierzy r dla tego samego zbioru wierszy ma ten sam rząd, jest więc nieosobliwy.

$\Longleftarrow$: Pewien układ wierszy daje nieosobliwy minor. Jego kolumny są liniowo niezależne, a więc całe kolumny macierzy wyjściowej też są liniowo niezależne.

Koniec dowodu lematu

Dow. (stwierdzenia):

1. Jeśli rząd macierzy A wynosi r, to istnieje nieosobliwy minor stopnia r (to widać, jeśli weźmiemy r liniowo niezależnych kolumn i zastosujemy lemat)
2. Jeśli istnieje nieosobliwy minor stopnia k, to w macierzy znajduje się k liniowo niezależnych kolumn; wystarczy wziąć tu kolumny 'zahaczające' o minor.

□