

Zadania domowe do wykładu Algebra B

Seria 1, 16.10.2008

- Pokazać, że:
 - Zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, jest ciałem liczbowym. Oznaczamy je $Q(\sqrt{2})$; jest ono rozszerzeniem ciała liczb wymiernych.
 - Zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt[3]{2}$, gdzie a, b są liczbami wymiernymi, *nie jest* ciałem liczbowym.
 - Natomiast zbiór liczb postaci: $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, gdzie a, b, c są liczbami wymiernymi, jest już ciałem liczbowym.
 - Zbiór liczb postaci: $(a + bi) + (c + di)\sqrt{5}$, gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, jest ciałem liczbowym.
- Przedstawić w postaci $a + bi$ podane liczby zespolone:
 - $(2 + i)(3 - i) + (2 + 3i)(3 + 4i)$; b) $(1 - i)^3$; c) $(1 + i)^5$; d) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^3$; e) $(3 + i)^3 + (3 - i)^3$; f) i^{98} ; g) i^{77} ; h) i^{-57} ; i) $\frac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; j) $\frac{(1+i)^{n+2}}{(1-i)^n}$, $n \in \mathbb{N}$ k) $(1 + i)^{8n}$, $n \in \mathbb{Z}$; l) $(1 - i)^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}$; ;
- Rozwiązać równania:
 - $z^2 = i$; b) $z^2 = 3 - 4i$; c) $z^2 = 5 - 12i$; d) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$; e) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$
- Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego kwadratu (czyli spełniające równanie $\bar{z} = z^2$).
Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone sprzężone do swojego sześciąnu (czyli spełniające równanie $\bar{z} = z^3$).
- Obliczyć moduły liczb:
 - $\sqrt{3} - i$; b) $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$, $\lambda \in \mathbb{R}$; c) $(1 + i)^{99}$; d) $(-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i)^{2008}$
- Rozwiązać równania:
 - $z\bar{z} + (z - \bar{z}) = 3 + 2i$; b) $i(z + \bar{z}) + i(z - \bar{z}) = 2i - 3$. ;
- Rozwiązać równanie:
 - $z^6 = (\bar{z} + 1)^6$;
 - $\left(\frac{1 - \bar{z}}{1 + z}\right)^{2003} = 1$;
 - $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$, $n \in \mathbb{N}$
 - $z^3 + 4i|z| = 0$;
 - $z^2 - 12\bar{z} + 61 = 0$.
- Opisać geometrycznie i narysować zbiór:

- (a) $\{z \in \mathbb{C} \mid \left| \frac{z-1}{2z+1} \right| < 1\}$;
 (b) $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \arg \frac{z+i}{z-i} < \frac{\pi}{4}\}$;
 (c) $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \frac{2z-1}{z^2-z} > 0\}$;
 (d) $\{z \in \mathbb{C} \mid z = \frac{1+2i}{1+ti}, t \in \mathbb{R}\}$.

9. Rozwiązać układy równań:

$$a) \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i \end{cases} \quad \begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{cases}$$

10. Udowodnić równość:

$$\forall u, v \in \mathbb{C} : |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$$

Jakie jest jej geometryczne znaczenie?

11. Wyrazić w postaci wielomianów od $\sin x$ i $\cos x$ funkcje:

a) $\sin 4x$; b) $\cos 4x$; c) $\sin 5x$; d) $\cos 5x$.

12. Wykazać równości:

$$(a) \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(nx/2) \cos((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$(b) \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin(nx/2) \sin((n+1)x/2)}{\sin(x/2)}, \quad x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z};$$

$$(c) \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)\phi = \frac{\sin 2n\phi}{2 \sin \phi}, \text{ jeśli } \phi \neq 0;$$

$$(d) \sum_{k=1}^n \sin^2 k\phi = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)\phi \sin n\phi}{2 \sin \phi}, \text{ jeśli } \phi \neq 0;$$

$$(e) \cos 8^\circ + \cos 16^\circ + \cos 24^\circ + \dots + \cos 176^\circ = -\frac{1}{2};$$

$$(f) \sin^2 4^\circ + \sin^2 8^\circ + \sin^2 12^\circ + \dots + \sin^2 88^\circ = \frac{45}{4}.$$

13. Podać wzory dla sum:

$$(a) \cos x + 2 \cos 2x + \dots + n \cos nx,$$

$$(b) \sin x + 2 \sin 2x + \dots + n \sin nx$$

Wskazówka. Udowodnić najspierw (przez indukcję lub inaczej – metody zapożyczone z analizy są dozwolone) wzór:

$$z + 2z^2 + \dots + nz^n = z \frac{1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}}{(1-z)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > 1.$$

14. Dowieść, że:

$$(a) \quad x^{2n+1} - 1 = (x - 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi k}{2n+1} + 1 \right);$$

$$(b) \quad x^{2n} - 1 = (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{\pi k}{2n} + 1 \right)$$

Wyprowadzić analogiczne równości dla wielomianów $x^{2n+1} + 1$ oraz $x^{2n} + 1$ (tzn. przedstawić je jako iloczyny wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego).

15. Wypisać wszystkie pierwiastki: a) $\sqrt[3]{-8}$; b) $\sqrt[3]{-i}$; c) $\sqrt[6]{16}$. Zaznaczyć je na płaszczyźnie zespolonej.
16. Pokazać, że dla $\epsilon_0, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$ (pierwiastków n -tego stopnia z 1) zachodzą następujące równości:
a) $\epsilon_0 + \epsilon_1 + \dots + \epsilon_{n-1} = 0$; b) $\epsilon_0 \cdot \epsilon_1 \cdot \dots \cdot \epsilon_{n-1} = 1$.
17. Pokazać, że

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x + \epsilon y + \epsilon^2 z)(x + \epsilon^2 y + \epsilon z)$$

gdzie $\epsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.