

Algebra B, seria zadań No.9

01.03.2009

1. Sprawdzić, czy poniższe macierze są diagonalizowalne nad \mathbb{R} oraz \mathbb{C} :

$$\begin{aligned} a) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} & b) & \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\ c) & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & d) & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} & e) & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Wyznaczyć wartości własne i wektory własne operatorów liniowych danych w pewnej bazie przez macierze:

$$\begin{aligned} a) & \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} & b) & \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix} & c) & \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \\ d) & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} & e) & \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} & f) & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ g)^* & \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wskazówka do g^):* Najpierw rozwiązać podpunkty $a)$ i $f)$, następnie poprzez odpowiednią zmianę bazy sprowadzić macierz do postaci blokowo-diagonalnej.

3. Znaleźć wartości i wektory własne macierzy cyklicznej

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Wskazówka. Sprawdzić, że wektory $\begin{pmatrix} \epsilon_k \\ \epsilon_k^2 \\ \vdots \\ \epsilon_k^n \end{pmatrix}$, gdzie ϵ_k oznacza k -

ty pierwiastek n -tego stopnia z jedynki, są wektorami własnymi powyższej macierzy. Patrz również zadanie 5 z poprzedniej serii zadań.

4. Niech $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć wartości i wektory własne operatora zadanego poprzez:

$$\begin{pmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć wartości własne macierzy

$$\begin{pmatrix} A & * & \dots & * \\ 0 & A & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A \end{pmatrix}.$$

5. * Rozważmy operator $\frac{d}{dx} : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ zadany poprzez $C^\infty \ni f \mapsto \frac{df}{dx} \in C^\infty(\mathbb{R})$. Znaleźć wektory (funkcje) i wartości własne tego operatora. Jakie równanie spełniają wektory własne danego operatora liniowego T . Jakie równanie różniczkowe spełniają funkcje własne operatora $\frac{d}{dx}$?
6. Pokazać, że dla macierzy diagonalizowalnej A o różnych wartościach własnych $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ zachodzi $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ oraz $\text{Tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.
7. Wykazać, że jeśli operator liniowy T jest nieosobliwy, to T i T^{-1} mają te same wektory własne. Wyznaczyć wartości własne T^{-1} .
8. Wykazać, że powłoka liniowa dowolnego układu wektorów własnych operatora liniowego T jest niezmiennicza względem T .
9. Wykazać, że wszystkie wartości własne macierzy są różne od zera wtedy i tylko wtedy, gdy macierz jest nieosobliwa.
10. Wykazać, że wartości własne macierzy kwadratowej A oraz A^T są jednakowe.

11. Niech $A \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$, $n \geq k$. Wykazać, że niezerowe wartości macierzy $A^T A$ oraz AA^T są jednakowe.

Wskazówka. Pokazać, że wektor $A^T v$ jest wektorem własnym $A^T A$, dla v będącego wektorem własnym AA^T o wartości własnej $\lambda \neq 0$.

12. Wyznaczyć wartości własne i podprzestrzenie pierwiastkowe operatora liniowego danego w pewnej bazie macierzą:

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Udowodnić zależność $\det \exp(A) = \exp(\text{Tr}(A))$ dla przypadku, gdy A jest macierzą diagonalizowalną.

14. * Oznaczmy przez $SO(n)$ grupę ortogonalnych macierzy zachowujących orientację przestrzeni \mathbb{R}^n , tzn. $S \in SO(n) \Leftrightarrow S^T S = S S^T = I$, $\det S = 1$. Dowolną taką macierz można zapisać jako $S = \exp(A)$, gdzie A jest pewną macierzą antysymetryczną. Pokazać, że dla nieparzystych n oraz dowolnej macierzy $S \in SO(n)$ istnieje wektor v niezmienniczy dla S , tzn. $Sv = v$.

Wskazówka. Wyznacznik macierzy antysymetrycznej nieparzystego wymiaru wynosi 0.

Uwaga. Pozwala to wywnioskować, że grupą obrotów \mathbb{R}^3 jest $SO(3)$. W szczególności możemy również wnioskować, że złożenie obrotów jest obrotem (wokół pewnej osi wyznaczonej przez wektor v , dla którego $Sv = v$).

15. * Podać przykład macierzy w grupie $SO(4)$ nie mającej wektorów własnych.