

1. SERIA ZADAŃ Z ALGEBRY

Zadanie 1. Złóż permutacje w podanej kolejności:

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix},$
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 4 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix},$
- (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$
- (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$

Zadanie 2. Przedstaw w postaci iloczynu cykli rozłącznych

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 3 & 6 & 2 \end{pmatrix},$
- (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 6 & 7 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix},$
- (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$
- (4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & n+1 & \dots & 2n \\ n+1 & n+2 & \dots & 2n & 1 & \dots & n \end{pmatrix},$
- (5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}.$

Zadanie 3. Wyznacz znak wszystkich permutacji z zadań 1 i 2.

Zadanie 4. Przedstaw trzy dowolnie wybrane permutacje z zadań 1 i 2 w postaci iloczynu transpozycji.

Zadanie 5. Niech $\mathcal{K} = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subset S_4$.

- (1) Sprawdź, że \mathcal{K} jest podgrupą normalną¹ w S_4 ,
- (2) zbadaj S_4/\mathcal{K} ,
- (3) rozstrzygnij, czy $\mathcal{K} \simeq \mathbb{Z}_4$ czy $\mathcal{K} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Zadanie 6. Czy permutacje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

są sprzężone?

Zadanie 7. Wykaż, że odwzorowanie $\sigma : \sqrt[12]{\mathbb{I}} \rightarrow \sqrt[12]{\mathbb{I}}$ dane wzorem $\sigma(z) = z^5$ jest permutacją zbioru $\sqrt[12]{\mathbb{I}}$. Rozłóż tę permutację na cykle i znajdź jej znak. Sprawdź czy istnieje permutacja π zbioru $\sqrt[12]{\mathbb{I}}$ taka, że jeśli oznaczymy przez ε_k element $e^{k\frac{2\pi i}{12}} \in \sqrt[12]{\mathbb{I}}$, to

$$\pi \sigma \pi^{-1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 & \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \varepsilon_4 & \varepsilon_5 & \varepsilon_6 & \varepsilon_7 & \varepsilon_8 & \varepsilon_9 & \varepsilon_{10} & \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_4 & \varepsilon_1 & \varepsilon_8 & \varepsilon_7 & \varepsilon_0 & \varepsilon_{11} & \varepsilon_9 & \varepsilon_3 & \varepsilon_2 & \varepsilon_{10} & \varepsilon_6 & \varepsilon_5 \end{pmatrix}.$$

¹jeśli nie wiadomo, co to jest podgrupa normalna, to sprawdź, że \mathcal{K} jest podgrupą i zignoruj punkt (2)