

ALGEBRA B – PYTANIA NA EGZAMIN USTNY

1. Pojęcie ciała. Ciało liczb zespolonych.
2. Liczby zespolone – postać trygonometryczna. Pierwiastki n -tego stopnia z liczby zespolonej.
3. Zasadnicze twierdzenie algebry.
4. Pierścienie. Pierścień wielomianów i algorytm Euklidesa.
5. Rozkład wielomianu na czynniki oraz funkcji wymiernej na ułamki proste.
6. Grupy. Grupy permutacji. Rozkład na cykle. Parzystość permutacji.
7. Przestrzenie wektorowe. Przykłady. Kombinacje liniowe i generowanie. Baza.
8. Liniowa niezależność a jednoznaczność rozkładu. Suma algebraiczna i suma prosta.
9. Odwzorowania liniowe odwracalne i nie. Jądro i obraz odwzorowania. Rząd kolumnowy. Macierz odwzorowania w bazie.
10. Działania na macierzach. Dodawanie i mnożenie macierzy.
11. Zmiana macierzy operatora przy zmianie bazy.
12. Układ równań liniowych. Metoda redukcji wierszowych. Rząd wierszowy.
13. Formy i wyznaczniki.
14. Wyznaczniki a operacje elementarne. Rozwinięcie Laplace'a.
15. Wzory Cramera. Macierz dopełnień.
16. Wzór na macierz odwrotną. Rząd wyznacznikowy.
17. Endomorfizm. Algebra endomorfizmów. Funkcja od operatora.
18. Wektory własne, wartości własne i wielomian charakterystyczny operatora. Podprzestrzeń niezmiennicza.
19. Operatory rzutowe. Podprzestrzenie pierwiastkowe.
20. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona. Twierdzenie o rozkładzie na podprzestrzenie pierwiastkowe.
21. Funkcje od operatora – metody liczenia.
22. Przestrzeń sprzężona. Baza dualna. Odwzorowanie sprzężone.
23. Formy biliniowe i kwadratowe. Odpowiedniość między formami bilinowymi symetrycznymi i formami kwadratowymi.

24. Diagonalizacja formy kwadratowej metodą Lagrange'a.
25. Postać kanoniczna formy kwadratowej (przypadek \mathbb{C} i \mathbb{R}).
26. Twierdzenie Sylwestera o bezwładności.
27. Znajdowanie sygnatury formy kwadratowej metodą wyznaczników.
28. Przestrzenie z iloczynem skalarnym. Nierówność Schwarz. Norma.
29. Ortogonalność. Ortogonalizacja Grama-Schmidta.
30. Dopelnienie ortogonalne. Rzut ortogonalny na podprzestrzeń.
31. Geometria metryczna: odległość (odstęp) punktu od podprzestrzeni, odległość dwu podprzestrzeni afinicznych, objętość.
32. Sprzężenie hermitowskie operatora. Macierz operatora sprzężonego hermitowsko.
33. Operatory hermitowsko samosprężone (hermitowskie).
34. Operatory normalne. Twierdzenie spektralne dla operatorów normalnych i hermitowskich.
35. Kompleksyfikacja i urzeczywistnienie.
36. Twierdzenie spektralne dla operatorów symetrycznych.
37. Rozkład biegunowy.
38. Klasyfikacja kwadryk na \mathbb{R}^3 . jeśli zdążę na wykładzie to będzie to pytanie obowiązkowe; w przeciwnym razie będzie to pytanie nadobowiązkowe.

Pytania dodatkowe nadobowiązkowe: (ilość gwiazdek oznacza obszerność tematu)

1. (*) Równania trzeciego stopnia. Wzory Cardano. Przypadek równania o współczynnikach rzeczywistych. (np. SZ, str. 6 – 9).
2. (*) Równania czwartego stopnia (np. A. Mostowski, M. Stark, *Elementy algebry wyższej*, str. 241 – 243).
3. (**) Operatory nilpotentne. Baza i postać kanoniczna Jordana. (SZ, str. 62-68)
4. (**) Przestrzeń stanów układu kwantowego. Operatory samosprężone w mechanice kwantowej. (Kostrikin & Manin, str. 135 – 138, oraz 153 – 159).

Wymagania egzaminacyjne.

- Egzamin składa się z części pisemnej i ustnej. Do oceny końcowej brane są wyniki obu części z równą wagą.

- Do egzaminu dopuszczone są osoby, które mają zaliczone ćwiczenia (bezwzględnie lub warunkowo).
 - Kto ma ćwiczenia zaliczone bezwzględnie (tzn. uzyskał z ćwiczeń $\geq 50\%$ punktów), dopuszczony jest do obu części egzaminu.
 - Kto ma zaliczenie warunkowe, (tzn. uzyskał z ćwiczeń $50\% - \epsilon$, $\epsilon > 0$ punktów) będzie dopuszczony do części ustnej, jeśli z części pisemnej uzyska $50\% + \epsilon$ punktów.
- Wymagania na egzaminie ustnym:
 - Na ocenę **dostateczną** wymagane jest poprawne sformułowanie definicji oraz twierdzeń;
 - Na ocenę **dobrą** wymagane są ponadto dowody podstawowych twierdzeń,
 - zaś na ocenę **bardzo dobrą** trzeba znać dowody wszystkich twierdzeń.
- Pytania dodatkowe dostępne są dla osób, które mają przynajmniej ocenę dobrą z egz. ustnego. Wyczerpująca (tzn. z dowodami) odpowiedź na pytania 1 i 2 pozwoli podnieść ocenę o pół stopnia, a na 3 lub 4 – o stopień.