

- Niech  $V := R_2[\cdot]$  (przestrzeń wielomianów stopnia  $\leq 2$ ). Sprawdzić, że wektory  $f_1, f_2, f_3$  tworzą bazę w  $V$  i znaleźć współrzędne wektora  $w$  w tej bazie;  $f_1(x) := x+1$ ,  $f_2(x) := x-1$ ,  $f_3(x) := x^2+x$ ,  $w(x) := 2x^2+3x+1$ ,
- Niech  $W := \{x \in R^3 : 2x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$  a  $V := \{x \in R^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ . Znaleźć  $V + W$  i  $V \cap W$ .
- Znaleźć wymiar i podać bazę podprzestrzeni rozpiętej na kolumnach macierzy:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

- Podać wymiary i bazy podprzestrzeni:  $E, F, E \cap F, E + F$  dla:

$$E := \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle, F := \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

- Wykazać, że  $V := R_3[\cdot]$  (wielomiany stopnia nie wyższego niż 3 o wsp. rzeczywistych) jest sumą prostą  $U := R_1[\cdot]$  oraz  $W := \{v \in V : v(1+i) = 0\}$ . Znaleźć rozkład  $w(t) := t^3$  na składowe w  $U$  i  $W$ .

- Rozwiązać układy równań:

$$\begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ 7x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + 7y - 4z - 6t = 3 \end{cases}; \begin{cases} 3x - 4y + z = 1 \\ -5x + 2y + 3z = 2 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 7x + 3y + z = 1 \\ 4x + 2y + 2z - t = 1 \\ 2y + 10z - 7t = 1 \\ 5x + y - 5z + 4t = 1 \end{cases}; \begin{cases} 2x - 5y - 8z = 8 \\ 4x + 3y - 9z = 9 \\ 2x + 3y - 5z = 7 \\ x + 8y - 7z = 12 \end{cases}$$

- Podać bazę przestrzeni rozwiązań układu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = 0;$$

- Dla jakich  $\lambda \in R$  wektor  $\begin{bmatrix} \lambda \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$  jest kombinacją liniową wektorów:  $\begin{bmatrix} 4 \\ \lambda + 1 \\ \lambda \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 + \lambda \\ \lambda \\ \lambda + 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}$  ?

- W zależności od wartości  $a$  zbadać liniową niezależność wektorów:  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 + 2a \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ 5 \\ 3 + a \\ -3a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 + a \\ -13a \end{bmatrix}$ .

- Niech  $g := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I_3 \end{bmatrix}$ , gdzie  $I_3$  oznacza macierz jednostkową  $3 \times 3$ . Definiujemy  $L := \{A \in M_4(R) : A^T g + g A^T = 0\}$ . Sprawdzić, że  $L$  jest podprzestrzenią wektorową oraz dla  $A, B \in L$   $[A, B] := AB - BA \in L$ .

- Znaleźć macierze odwrotne do podanych poniżej:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 10 & 8 & -3 \\ -6 & -5 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$