ALGEBRA "B", SERIA ZADAŃ No. 8

22. 03. 2006

1. Obliczyć wyznaczniki:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ .. & .. & .. & \ddots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 \\ .. & .. & .. & \cdots & .. & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & .. & 0 \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

2. Obliczyć wyznaczniki przez sprowadzenie ich do postaci trójkątnej:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ n & n & n & \cdots & n \end{vmatrix}; \quad \mathbf{c)} \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b & b \\ b & a & \cdots & b & b \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ b & b & \cdots & a & b \\ b & b & \cdots & b & a \end{vmatrix}.$$

3. Obliczyć wyznaczniki:

$$\mathbf{a)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \cdots & 3^n \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \cdots & (n+1)^n \end{vmatrix}; \quad \mathbf{b)} \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

   Wskazówka do a): Wyznacznik Vandermonde'a.

4. Pokazać, że wartość wyznacznika macierzy antysymetrycznej nieparzystego wymiaru wynosi 0.

5. Pokazać, że wyznacznik *macierzy cyklicznej*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

   jest równy iloczynowi $f(\epsilon_1)\,f(\epsilon_2)\cdots f(\epsilon_n)$, gdzie $f(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, zaś $\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_n$ są kolejnymi pierwiastkami $n-$tego stopnia z 1.
   Wskazówka. Obliczyć wyznacznik iloczynu powyższej macierzy cyklicznej oraz macierzy:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \epsilon_3 & \cdots & \epsilon_n \\ \epsilon_1^2 & \epsilon_2^2 & \epsilon_3^2 & \cdots & \epsilon_n^2 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ \epsilon_1^n & \epsilon_2^n & \epsilon_3^n & \cdots & \epsilon_n^n \end{bmatrix}$$

6. Korzystając z wyniku poprzedniego zadania, obliczyć wyznaczniki:

$$\mathbf{a)}\ \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix};\quad \mathbf{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ a^{n-1} & 1 & a & \cdots & a^{n-2} \\ a^{n-2} & a^{n-1} & 1 & \cdots & a^{n-3} \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ a & a^2 & a^3 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Znaleźć rozwiązania układów równań w zależności od parametru:

$$\mathbf{a)}\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix};\quad \mathbf{b)}\ \begin{bmatrix} 3a-1 & 2a & 3a+1 \\ 2a & 2a & 3a+1 \\ a+1 & a+1 & 2a+2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{c)}\ \begin{bmatrix} a-5 & 2 & 1 \\ 2 & a-2 & 2 \\ 1 & 2 & a-5 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$