20.03.2009

Algebra I, funkcje od operatora

Zadanie 1. Znajdź macierz funkcji $f(z)$ od macierzy A jeśli:

(a) $f(z) = \sin(z),\ A = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix};$

(b) $f(z) = e^z,\ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$

(c) $f(z) = \ln(z)$ gdzie $\ln(z) = \ln|z| + i\arg(z)$, $-\pi < \arg(z) < \pi$. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix};$

(d) $f(z) = z^{50},\quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};$

(e) $f(z) = z^{64},\quad A = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 14 & -8 \end{pmatrix};$

(f) $f(z) = \ln(z)$ - patrz punkt (c), $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix};$

Zadanie 2. Obliczyć macierz e^{tA} dla:

$$\text{(a)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. Znaleźć rozwiązanie równanie różniczkowego $\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = A\vec{x}(t)$ z warunkiem początkowym $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, gdzie A jest macierzą postaci $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Zadanie 4. Znaleźć ogólny wyraz ciągu x_n, jeśli

(a) $x_0 = 0, x_1 = 1$ oraz $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$;
(b) $x_1 = e, x_2 = \pi$ oraz $x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n$.

Zadanie 5. Rozważmy przestrzeń $V = \mathbb{C}_2[x]$ wielomianów stopnia co najwyżej 2. Niech $A \in L(V)$ będzie operatorem różniczkowania

$$Aw(x) = \frac{1}{i}\frac{d}{dx}.$$

Znaleźć macierz operatora e^{itA} w bazie standardowej $1, x, x^2$. Wykazać, że e^{itA} jest operatorem przesunięcia:

$$e^{itA}w(x) = w(x+t).$$

Zadanie 6. Rozważmy przestrzeń $V = \mathbb{C}_2[x]$ wielomianów stopnia co najwyżej 2. Niech $A \in L(V)$ będzie operatorem różnicowym

$$Aw(x) = \frac{1}{i}(w(x+1) - w(x)).$$

Znaleźć macierz operatora e^{itA} w bazie standardowej $1, x, x^2$.

Zadanie 7. Rozważmy odwzorowanie liniowe $T : M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ dane wzorem:

$$T(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} A - A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Opisać odwzorowanie liniowe e^{tT}.