Algebra z geometrią: zadania z form dwuliniowych i kwadratowych

Zadanie 1. Niech V będzie podprzestrzenią przestrzeni liniowej $C^\infty(\mathbb{R})$ rozpiętą na wektorach

$$e_1 = \sin x,\ e_2 = \cos x,\ e_3 = \sin 2x,\ e_4 = \cos 2x\,, \dots\,,\ e_{2n-1} = \sin nx,\ e_{2n} = \cos nx\,.$$

Niech $b : V \times V \to \mathbb{R}$ będzie przekształceniem określonym wzorem

$$b(u, v) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(-x)v'(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

a) Wykazać, że b jest formą dwuliniową.

ą) Znaleźć część symetryczną i antysymetryczną tej formy.

b) Znaleźć macierz tej formy w bazie $(e_1, \dots, e_{2n})$.

c) Dla $n = 5$ znaleźć macierz tej formy w bazie $(f_1, \dots, f_{2n})$, której wektory dane są jako:

$$f_1 = \sin x,\ f_2 = \cos x,\ f_3 = \sin 2x,\ f_4 = \cos^2 x\,, \dots\,,\ f_{2n-1} = \sin nx,\ f_{2n} = \cos^n x\,.$$

Wskazówka: Znaleźć przekształcenie liniowe wiążące $\cos n\alpha$ i $\sin n\alpha$ z $\cos(n-2)\alpha$ i $\sin(n-2)\alpha$, po czym obliczyć jego potęgi.

ć) Czy forma kwadratowa $Q : V \to \mathbb{R}$ określona wzorem $Q(v) = b(v, v)$ jest dodatnio określona?

d) Zdiagonalizować formę kwadratową Q metodą Lagrange'a.

e) Jaka jest sygnatura formy kwardatowej Q?

Zadanie 2. Dla jakich wartości λ forma kwadratowa jest określona ujemnie?

a) $-x_1^2 + \lambda x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$,

ą) $\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2(x_1x_2 - x_1x_3 + x_2x_3)$.

Zadanie 3. Wyznaczyć symetryczną formę dwuliniową związaną z formą kwadratową

a) $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$,

ą) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$.