

ZADANIE 1 (3 pkt.)

Mamy przestrzeń Hilberta $\mathcal{H} = (\mathbb{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ z iloczynem skalarnym $\langle \cdot | \cdot \rangle$ spełniającym warunki:

- $\langle \psi | \psi \rangle \geq 0$, z $\langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff |\psi\rangle = 0$,
- $\langle \psi | \phi \rangle = \alpha \langle \psi | \phi_1 \rangle + \beta \langle \psi | \phi_2 \rangle$, dla dowolnego $|\phi\rangle = \alpha |\phi_1\rangle + \beta |\phi_2\rangle \in \mathcal{H}$, α i $\beta \in \mathbb{C}^1$,
- $\langle \psi | \phi \rangle^* = \langle \phi | \psi \rangle$.

Korzystając z tych własności dowieść tzw. wzór polaryzacyjny dla iloczynu skalarnego:

$$\langle \psi | \phi \rangle = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^3 (-i)^n \langle \psi + i^n \phi | \psi + i^n \phi \rangle.$$

ZADANIE 2 (3 pkt.)

W przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$ mamy ortonormalną bazę $\{|a\rangle\}$. Dla dowolnego $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ wykazać, że wektor:

$$|\eta\rangle = |\psi\rangle - \sum_a \alpha_a |a\rangle$$

jest ortogonalny do wszystkich liniowych kombinacji postaci:

$$\sum_a \beta_a |a\rangle$$

wtedy i tylko wtedy gdy $\alpha_a = \langle a | \psi \rangle$.

ZADANIE 3 (3 pkt.)

Dowieść, że warunkiem koniecznym i dostatecznym dla zachodzenia równości w nierówności Schwarza:

$$|\langle \psi | \phi \rangle|^2 = \langle \psi | \psi \rangle \langle \phi | \phi \rangle,$$

jest liniowa zależność wektorów $|\phi\rangle$ i $|\psi\rangle$.

ZADANIE 1 (4 pkt.)

A i B są operatorami hermitowskimi. Udowodnić, że:

1. $A + B$ jest operatorem hermitowskim.
2. AB jest operatorem hermitowskim gdy $[A, B] = 0$.
3. $AB + BA$ oraz $i(AB - BA)$, są operatorami hermitowskimi.
4. Jeśli U jest unitarne, to $UAU^\dagger$ jest operatorem hermitowskim.