

ZADANIE 1 (3 pkt.)

Operator liniowy $\hat{A}$ odwzorowujący stany qubitów w stany qubitów, ma następującą postać macier-zową w bazie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

gdzie a, b, c, d to liczby zespolone. Dla takiego operatora, znaleźć $A^\dagger$, obliczyć $\det\{A\}$ i $\text{Tr}\{A\}$. Wyprowadzić warunki na a, b, c, d , dla których:

1. Istnieje A^{-1} . Znaleźć A^{-1} .
2. A jest samosprężony.
3. A jest unitarny.
4. A jest normalny, tzn. $AA^\dagger = A^\dagger A$.

ZADANIE 2 (3 pkt.)

Na wykładzie wykazaliśmy, że stan czysty qubitów dany jest wzorem: $\rho(\vec{b}) = \frac{1}{2}(1 + \vec{b} \cdot \vec{\sigma})$, gdzie $\vec{b} = (\cos \varphi \sin \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \theta)$ to wektor jednostkowy na sferze Blocha, a $\vec{\sigma}$ to macierze Pauliego. Mamy dwa stany qubitów zadane następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \frac{1}{N_1} \int_0^{2\pi} d\varphi \rho(\vec{n}), \\ \rho_2 &= \frac{1}{N_2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \rho(\vec{n}), \end{aligned}$$

gdzie $N_{1,2}$ to dwie dodatnie stałe.

1. Wykazać, że $\rho_{1,2}$ są operatorami hermitowskimi i nieujemnymi.
2. Sprawdzić, czy można tak dobrać stałe normalizacyjne aby: $\text{Tr}\{\rho_{1,2}\} = 1$.
3. Obliczyć $\text{Tr}\{\rho_1^2, \rho_2^2\}$. Na tej podstawie stwierdzić, czy są to stany czyste czy mieszane?

ZADANIE 3 (3 pkt.)

Udowodnić następujące działanie operacji odwracania czasu:

$$T|\psi\rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \tilde{\psi}^*(p) | -p\rangle ,$$

$$T \vec{L} T^{-1} = -\vec{L} ,$$

gdzie $\tilde{\psi}(p)$ to funkcja falowa stanu w reprezentacji pędowej, oraz $\vec{L}$ to operator orbitalnego momentu pędu.

ZADANIE 4 (3 pkt.)

Mamy następującą transformację liniową qubitów:

$$U = e^{i\alpha} U_{\vec{n}}(\theta) ,$$

gdzie α to faza, oraz $U_{\vec{n}}(\theta) = e^{\frac{i\theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}}$ opisuje obrót o kąt θ , wokół kierunku jednostkowego $\vec{n}$.

1. Wykazać, że U jest transformacją unitarną. Znaleźć macierzową postać U w bazie $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.
2. Wykazać, że można tak dobrać parametry tej transformacji, że U staje się jedną z następujących bramek kwantowych podanych na wykładzie:

$$\text{---}\boxed{X}\text{---}, \quad \text{---}\boxed{Y}\text{---}, \quad \text{---}\boxed{Z}\text{---}, \quad \text{---}\boxed{H}\text{---}, \quad \text{---}\boxed{S}\text{---}, \quad \text{---}\boxed{T}\text{---}.$$

3. Wykazać następujące tożsamości dla bramek kwantowych:

$$H X H = Z, \quad H Y H = -Y, \quad H Z H = X .$$