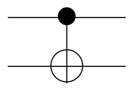
ZADANIE 1 (3 pkt.)

Bramka CNOT oznaczona symbolem:



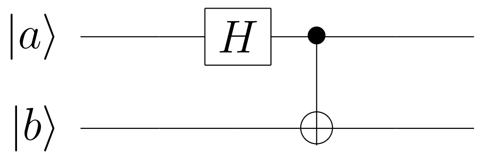
zadana jest następującym operatorem, działającym na qubity Alicji i Boba:

$$C_{\mathrm{NOT}} = |0\rangle\langle 0| \otimes I + |1\rangle\langle 1| \otimes X \, .$$

1. Znaleźć jawną postać tej transformacji w bazie qubitów $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ Alicji i Boba.
2. Udowodnić, że taka transformacja jest unitarna. Wykazać, że $C_{\mathrm{NOT}}^2 = I$.

ZADANIE 2 (3 pkt.)

Mamy następującą bramkę kwantową złożoną z bramki Hadamarda i bramki CNOT:



1. Znaleźć stany $|\psi_{\mathrm{out}}\rangle$, dla wszystkich możliwych stanów początkowych qubitów $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ Alicji i Boba:

2. Wykazać, że tak otrzymane stany są ortonormalne.
3. Wykazać, że tak otrzymane stany są splątane.
4. Wykazać, że tak otrzymane stany są zupełne w przestrzeni 2 qubitów.

ZADANIE 3 (3 pkt.)

Stan splątany 2 oscylatorów Alicji i Boba, ma następującą postać:

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle n\rangle^{\frac{n}{2}}}{(\langle n\rangle + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \, |n\rangle_a \otimes |n\rangle_b \, ,$$

gdzie $\langle n\rangle$ jest średnią liczbą wzbudzeń termicznych. Dla takiego stanu, obliczyć funkcję falową w reprezentacji położeniowej: $\Psi(q_a, q_b) = \langle q_a, q_b|\Psi\rangle$.

Wskazówka Zobacz zadanie 2, Seria # 3.

ZADANIE 4 (3 pkt.)

Na wykładzie zostało wykazane, że powyższy stan (zadanie 3) w granicy $\langle n\rangle \to \infty$, przesunięty w położeniu i pędzie o (x, k) ma postać ($\hbar = 1$):

$$|\Psi_{x,k}\rangle = \int e^{ikq}|q + x, q\rangle \, .$$

Wykazać że:

1. Stany te są ortonormalne: $\langle \Psi_{x,k}|\Psi_{x',k'}\rangle = 2\pi\delta(k - k')\delta(x - x')\,.$
2. Stany te są zupełne: $\int \frac{dxdk}{2\pi}|\Psi_{x,k}\rangle\langle\Psi_{x,k}| = I\,.$