

ZADANIE 1 (3 pkt.)

Dla funkcji Wignera dowolnego stanu ρ udowodnić:

1. Własność marginalną (brzegową):

$$\int dq W(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \langle p | \rho | p \rangle.$$

2. Własność przekrywania:

$$\text{Tr}\{\rho_1 \rho_2\} = 2\pi\hbar \int dq \int dp W_{\rho_1}(q, p) W_{\rho_2}(q, p).$$

ZADANIE 2 (3 pkt.)

Stan czysty układu zadany jest następującą funkcją falową (zmiennie bezwymiarowe):

$$\psi(q) = N \left(\exp\left(-\frac{(q - q_0)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(q + q_0)^2}{2}\right) \right),$$

gdzie N i q_0 to stałe.

1. Obliczyć funkcję Wignera dla takiego stanu.
2. Z warunku normalizacyjnego dla funkcji Wignera, wyznaczyć stałą N .
3. Czy funkcja Wignera dla takiego stanu jest nieujemna?
4. Jak wygląda ta funkcja, gdy $q_0 = 0$. Czy jest nieujemna?

ZADANIE 3 (3 pkt.)

Dla stanu splątanego 2 oscylatorów (Alicji i Boba) z zadania 2 seria #4:

1. Obliczyć funkcję Wignera $W(q_a, p_a; q_b, p_b)$.
2. Wykazać, że marginalne (brzegowe) funkcje:

$$\int dq_a \int dp_a W(q_a, p_a; q_b, p_b) \quad i \quad \int dq_b \int dp_b W(q_a, p_a; q_b, p_b),$$

dają funkcje Wignera stanu termicznego.

3. Czy jest taka wartość $\langle n \rangle$, dla której zachodzi:

$$W(q_a, p_a; q_b, p_b) = W(q_a, p_a)W(q_b, p_b).$$

ZADANIE 4 (3 pkt.)

Udowodnić, że spinowa P -funkcja dla dowolnej macierzy gęstości qubitów ρ_{ij} (gdzie $(i, j) = 0, 1$), ma następującą postać:

$$P(\theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi}(\rho_{00} + \rho_{11} + 3(\rho_{00} - \rho_{11}) \cos \theta + 3\rho_{10} \sin \theta e^{i\varphi} + 3\rho_{01} \sin \theta e^{-i\varphi}).$$

Wskazówka: Szukać P -funkcji w postaci: $P(\theta, \varphi) = \sum_{l,m} p_{lm} Y_l^m(\theta, \varphi)$.