**ZADANIE 1** (3 pkt.)

Nierówność Bella (CHSH) w postaci: $|B| \leq 2$, została wyprowadzona na wykładzie na podstawie nierówności:

$$-2 \leq a(b + b') + a'(b - b') \leq 2\,,$$

dla lokalnych realności spinowych Alicji i Boba, zawartych w przedziale $[-1, 1]$. Dla lokalnych realności opisujących współczynniki transmisji, zawartych w przedziale $[0, 1]$:

$$x = \frac{1}{2}(1 + a), \quad x' = \frac{1}{2}(1 + a'), \quad y = \frac{1}{2}(1 + b), \quad y' = \frac{1}{2}(1 + b')\,,$$

wyprowadzić następującą nierówność:

$$-1 \leq xy + xy' + x'y - x'y' - x - y \leq 0\,.$$

Na tej podstawie uzasadnić nierówność Bella (CHSH) dla łacznych prawdopodobieństw pomiarów spinów (notacja z wykładu): $-1 \leq S \leq 0$. Uzasadnić czym jest $S$.

**ZADANIE 2** (3 pkt.)

Wykazać, że krytyczna wartość sprawności kwantowej $\eta$ polaryzatorów, dla których zachodzi łamanie nierówności Bella (CHSH): $-1 \leq S \leq 0$ wynosi:

$$\eta_{\mathrm{kr}} = \frac{2}{1 + \sqrt{2}}\,.$$

**Wskazówka:** Kwantową sprawność uwzględnia się wprowadzając dla polaryzatorów fenomenologiczne parametry $0 \leq \eta_{a,b} \leq 1$, mnożące operatory rzutowe na odpowiednie kierunki $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Założyć, że $\eta = \eta_a = \eta_b$.

**ZADANIE 3** (3 pkt.)

Wykazać, że dla 3 qubitów w $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_C$, operatory:

$$O_1 = \sigma_x \otimes \sigma_y \otimes \sigma_y, \quad O_2 = \sigma_y \otimes \sigma_x \otimes \sigma_y, \quad O_2 = \sigma_y \otimes \sigma_y \otimes \sigma_x\,,$$

mają tę własność, że: $O_1 O_2 O_3 = -O$, gdzie $O = \sigma_x \otimes \sigma_x \otimes \sigma_x$.

Dla stanu GHZ (splątane 3 qubity):

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0, 0, 0\rangle - |1, 1, 1\rangle)\,,$$

obliczyć funkcję korelacji:

$$E(\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c) = \langle \sigma(\varphi_a) \otimes \sigma(\varphi_b) \otimes \sigma(\varphi_c) \rangle\,,$$

gdzie polaryzatory o kątach $\varphi_{a,b,c}$ znajdują się w płaszczyźnie $x, y$.

**ZADANIE 4** (3 pkt.)

Mamy następujący stan mieszany qubitów Alicji i Boba:

$$\rho = \frac{1}{2}\left(|0,1\rangle\langle 0,1| + |1,0\rangle\langle 1,0|\right) .$$

1. Obliczyć zredukowane macierze gęstości Alicji $\rho_A$ i Boba $\rho_B$. Czy $\rho = \rho_A \otimes \rho_B$?
2. Dla takiego stanu obliczyć funkcję korelacji: $E(\vec{a};\vec{b}) = \langle \sigma(a) \otimes \sigma(b) \rangle$. Czy $E(\vec{a};\vec{b}) = E(\vec{a})E(\vec{b})$?
3. Czy stan ten łamie nierówność Bella $|B| \leq 2$?

**Wskazówka:** Stany $|0\rangle, |1\rangle$ to spiny $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$. Zastosować takie kąty polaryzatorów, jak dla stanu EPR.