

ZADANIE 1 (3 pkt.)

Stan qubitów Alicji zadany jest dowolną macierzą gęstości ρ_A . Udowodnić, że operacja transpozycji macierzy gęstości qubitów: $T_A : \rho_A \rightarrow \rho_A^T$, oraz transformacja jednostkowa $I_A : \rho_A \rightarrow \rho_A$, spełniają wszystkie cztery własności odwzorowania dodatniego $\Phi(\rho)$.

ZADANIE 2 (3 pkt.)

Mamy następujący stan mieszany qubitów Alicji i Boba:

$$\rho = \frac{1}{2} (|0, 1\rangle\langle 0, 1| + |1, 0\rangle\langle 1, 0|) .$$

1. Znaleźć jawną postać tej macierzy w bazie zero-jedynkowej Alicji i Boba.
2. Znaleźć jawną postać macierzy: $\Phi(\rho) = (T_A \otimes I_B)\rho$. Operacja ta to transpozycja qubitów A i operacja jednostkowa qubitów B .
3. Czy $\Phi(\rho)$ spełnia wszystkie cztery własności odwzorowania dodatniego?

ZADANIE 3 (3 pkt.)

Stan qubitów Alicji i Boba zadany jest stanem Bella:

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 1\rangle - |1, 0\rangle) .$$

1. Znaleźć jawną postać macierzy gęstości ρ dla tego stanu w bazie zero-jedynkowej Alicji i Boba.
2. Znaleźć jawną postać macierzy: $\Phi(\rho) = (T_A \otimes I_B)\rho$. Operacja ta to transpozycja qubitów A i operacja jednostkowa qubitów B .
3. Czy $\Phi(\rho)$ spełnia wszystkie cztery własności odwzorowania dodatniego?

ZADANIE 4 (3 pkt.)

Stan qubitów Alicji i Boba zadany jest stanem Wernera:

$$\rho = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-p)\frac{I_A}{2} \otimes \frac{I_B}{2}$$

1. Znaleźć jawną postać macierzy gęstości ρ dla tego stanu w bazie zero-jedynkowej Alicji i Boba.
2. Znaleźć jawną postać macierzy: $\Phi(\rho) = (T_A \otimes I_B)\rho$. Operacja ta to transpozycja qubitów A i operacja jednostkowa qubitów B .
3. Dla jakich wartości parametru p , takie $\Phi(\rho)$ spełnia wszystkie cztery własności odwzorowania dodatniego?

Wskazówka: Własności odwzorowania dodatniego to:

- Liniowość i wypukłość: $\Phi(p\rho_1 + (1-p)\rho_2) = p\Phi(\rho_1) + (1-p)\Phi(\rho_2)$, $0 \leq p \leq 1$
- Hermitowskość: $\Phi^\dagger(\rho) = \Phi(\rho)$.
- Dodatniość: $\Phi(\rho) \geq 0$.
- Unormowanie: $\text{Tr}\{\Phi(\rho)\} = 1$.