

ZADANIE 1

Dla qubitu mamy układ trzech POVM (dodatnich miar o wartościach operatorowych):

$$\sum_{a=1}^3 \hat{F}_a = I,$$

gdzie:

$$\hat{F}_1 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} |1\rangle\langle 1|, \quad \hat{F}_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} \frac{(|0\rangle - |1\rangle)(\langle 0| - \langle 1|)}{2}.$$

1. Znaleźć jawną postać $\hat{F}_3$.
2. Wykazać, że $\hat{F}_a$ spełniają własności POVM (hermitowskość, dodatniość i normalizację).
3. Obliczyć $\hat{F}_a^2$. Czy są to operatory rzutowe?

ZADANIE 2

Dla poprzedniego zadania, obliczyć odpowiednie operacyjnych skłonności $\text{pr}(a) = \text{Tr}\{\hat{F}_a \rho\}$, dla dowolnego operatora gęstości qubitu:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{bmatrix}.$$

Stosując jawne wzory na $\text{pr}(a)$ wykazać, że $\sum_a \text{pr}(a) = 1$.

ZADANIE 3 (3 pkt.)

Na wykładzie badane było oddziaływanie qubitu z filtrem. Hamiltonian oddziaływania miał postać:

$$H = p_0 \hat{q} \delta(t) \sigma_z.$$

Przed pomiarem, stan qubitu i filtru był iloczynowy: $\rho \otimes |F\rangle\langle F|$. Dla takiego pomiaru wykazać, że macierz gęstości qubitu po pomiarze ma postać:

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{00} & \rho_{01}\Lambda(p_0) \\ \rho_{10}\Lambda(p_0) & \rho_{11} \end{bmatrix}.$$

Obliczyć jawną postać funkcji $\Lambda(p_0)$ zakładając, że funkcja falowa filtru, w reprezentacji pędowej, ma postać $\langle p|F\rangle = N \exp(-\frac{p^2}{4\sigma^2})$ (obliczyć stałą normalizacyjną N).

ZADANIE 4 (3 pkt.)

Na wykładzie zostało wykazane, że operacyjna skłonność pomiaru położenia lub pędu ma postać:

$$\begin{aligned} pr(q) &= \int dq' |\psi(q')|^2 |F(q - q')|^2, \\ pr(p) &= \int \frac{dp'}{2\pi\hbar} |\tilde{\psi}(p')|^2 |\tilde{F}(p - p')|^2, \end{aligned}$$

gdzie $(\psi, \tilde{\psi})$ i $(F, \tilde{F})$ to funkcje falowe układu mierzonego i filtru pomiarowego, w reprezentacjach położeniowych i pędowych.

1. Wykazać, że:

$$\int dq pr(q) = 1, \quad \int \frac{dp}{2\pi\hbar} pr(p) = 1.$$

2. Wyrazić operacyjne średnie i dyspersje położeniowe i pędowe:

$$\begin{aligned} \bar{q} &= \int dq q pr(q), \quad \bar{q}^2 = \int dq q^2 pr(q), \quad (\delta q)^2 = \bar{q}^2 - \bar{q}^2, \\ \bar{p} &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} p pr(p), \quad \bar{p}^2 = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} p^2 pr(p), \quad (\delta p)^2 = \bar{p}^2 - \bar{p}^2, \end{aligned}$$

przez odpowiednie średnie i dyspersje właściwych operatorów położenia i pędów układu i filtru.