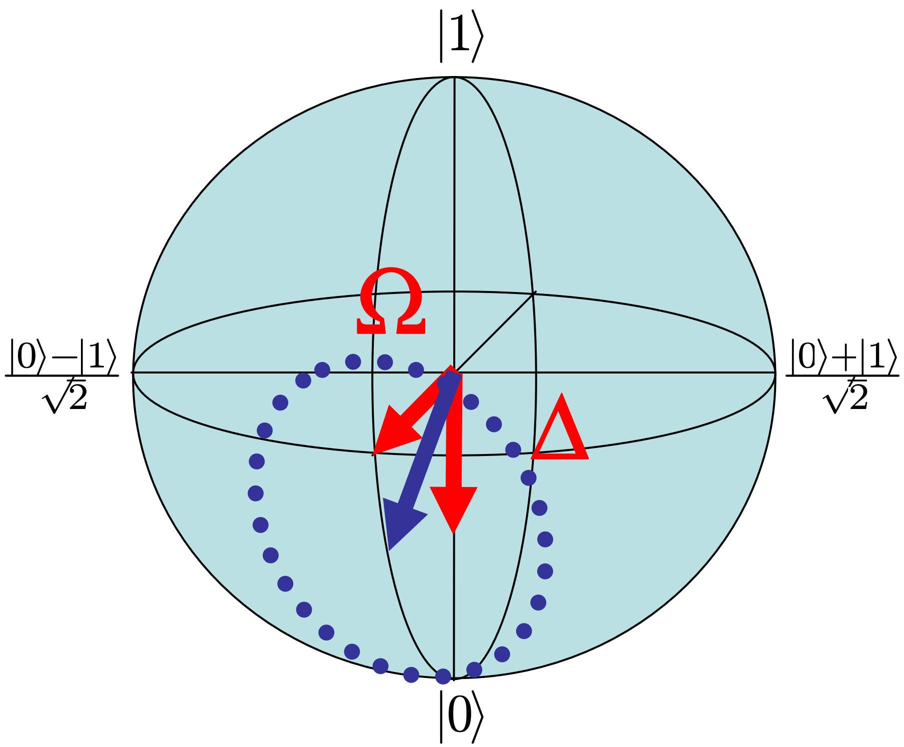
Kwantowe pole E-M
Emisja spontaniczna

Proste kwantowanie.
Dwie strony fotonu.
Detekcja.

Powtórzenie

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \frac{\sigma_z + 1}{2} + \hbar(\Omega\sigma_- + \Omega^*\sigma_+)$$



$$\Omega = \vec{d}_{10} \cdot \vec{E}_0 e^{i\omega t}/2$$

$$\vec{d}_{10} = \langle 1|e\vec{r}|0\rangle$$

$$\langle\psi(t)|e\vec{r}|\psi(t)\rangle = \mathrm{Tr}\{\hat{\rho}(t)e\vec{r}\} = \Re\{(\sigma_x - i\sigma_y)\vec{d}\}$$

Pole elektryczne od oscylującego dipola

Dla momentu dipolowego oscylującego z częstościa ω i amplitudą **d**

$$\vec{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{e^{ikr}}{r}\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{d})$$

moc wypromieniowana: $$P = \frac{\omega^4}{3c^3}|d|^2$$

Jackson, Elektrodynamika klasyczna, rozdz. 9.2

Rozkład pola E-M na mody

- Klasyczne pola D(**x**,t) i B(**x**,t) można rozłożyć w bazie rozwiązań równań Maxwella:

$$\vec{D} = \sum_n -p_n(t)\vec{u}_n(\vec{x}) \qquad \vec{B} = \sum_n q_n(t)\vec{v}_n(\vec{x})$$

$$\vec{v}_n = \nabla \times \vec{u}_n$$

wtedy współczynniki p i q spełniają znane równania

$$\dot{q}_n = p_n/\epsilon, \quad \dot{p}_n = -\epsilon\omega_n^2 q_n$$

Chcemy, żeby problem stał się formalnie identyczny z zestawem oscylatorów harmonicznych, o częstościach ω_n i masach ε.

$$H = \int d^3r \left(\frac{D^2}{2\epsilon} + \frac{B^2}{2\mu}\right) \to \sum_k \left(\frac{p_k}{2\epsilon} + \frac{\epsilon\omega_k^2 q_k^2}{2}\right)$$

wymusza to normalizacje modów u

I. & Z. Białyniccy, QED in Encyclopedia of Modern Optics, Elsevier

Kwantowanie

Kwantujemy każdy oscylator harmoniczny

wymuszamy $[\hat{q}_n, \hat{p}_m] = i\hbar\delta_{nm}$

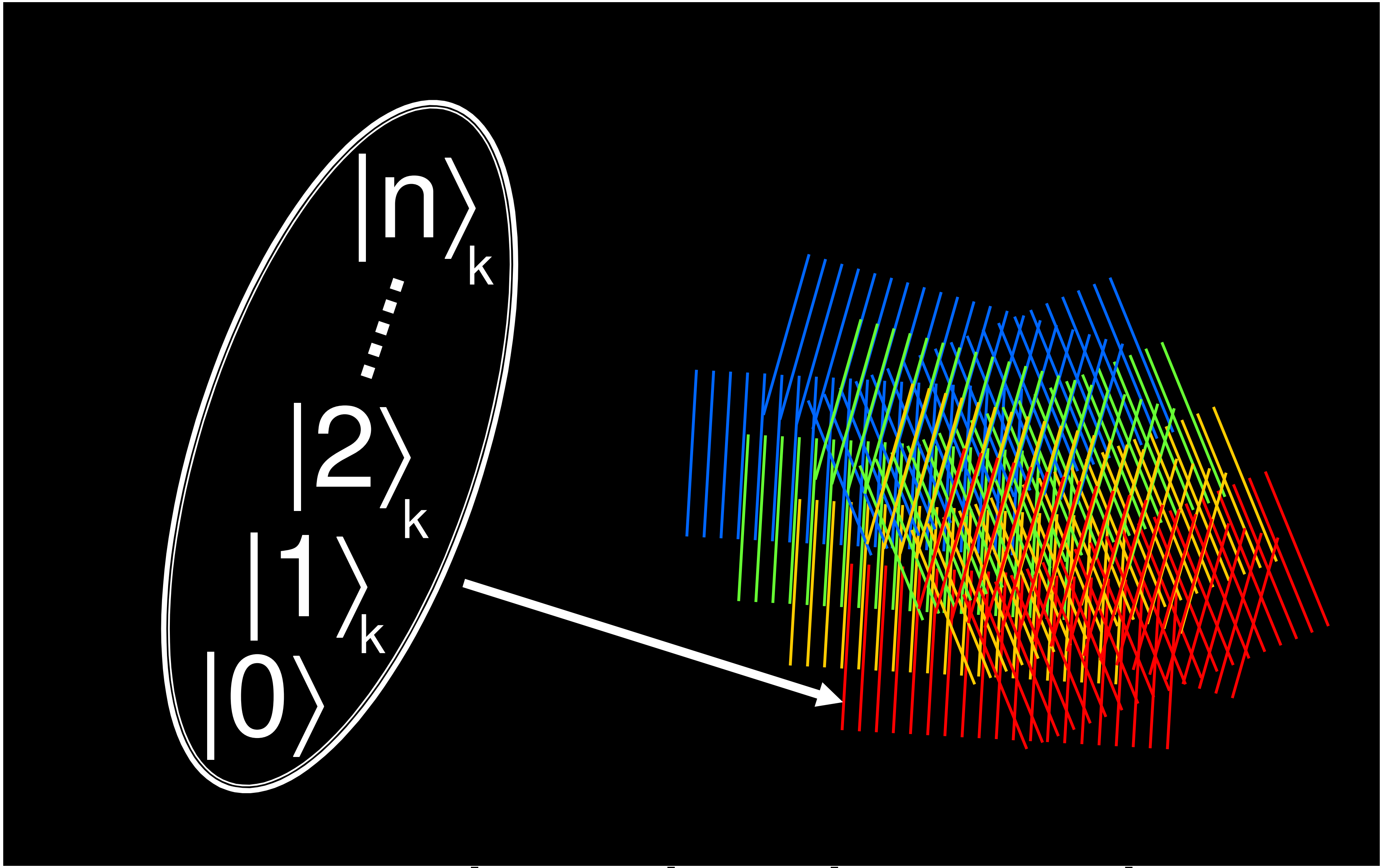
wprowadzamy $\hat{a}_n = \sqrt{\frac{\epsilon\omega_n}{2\hbar}}\left(\hat{q}_n + i\frac{\hat{p}_n}{\epsilon\omega}\right)$ $\quad [\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm}$

hamiltonian $H = \sum_k \hbar\omega_k(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + 1/2)$

operator pola $\hat{D} = \sum_n -\hat{p}_n(t)\vec{u}_n(\vec{x})$

stany o ustalonej energii

$$|n_k, n_l, \ldots, n_m\rangle = \hat{a}_k^{\dagger n_k} \hat{a}_l^{\dagger n_l} \ldots \hat{a}_m^{\dagger n_m} |0\rangle$$



statystyka i charakterystyka
modowa

Ważne stany

stany Foka
$$|n_1, n_2, \ldots\rangle = \frac{\hat{a}_1^{\dagger n_1} \hat{a}_2^{\dagger n_2} \ldots}{\sqrt{n_1! n_2! \ldots}} |0\rangle$$

$$\langle n|E|n\rangle = 0$$

stany koherentne
$$|\alpha_1, \alpha_2, \ldots\rangle = \left(\prod_n e^{-|\alpha_n|^2/2} e^{\alpha_n \hat{a}_n^\dagger} \right) |0\rangle$$

$$\langle E\rangle = \sum \ldots \alpha_n u_n$$

Sposoby na impuls

$$|\alpha_1, \alpha_2, \ldots\rangle = \left(\prod_n e^{-|\alpha_n|^2/2} e^{\alpha_n \hat{a}_n^\dagger} \right) |0\rangle$$

$$\langle E \rangle = \sum \ldots \alpha_n u_n$$

tu chowamy ewolucje czasową

$$\hat{b} = \sum \frac{\alpha_n}{\ldots} \hat{a}_n$$

$$[b, b^\dagger] = 1$$

Baza fal płaskich

$$u_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$$

$$\hat{\vec{E}}(\vec{x},t) = i \sum_{\vec{k},\lambda} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon V}} \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) + H.c.$$

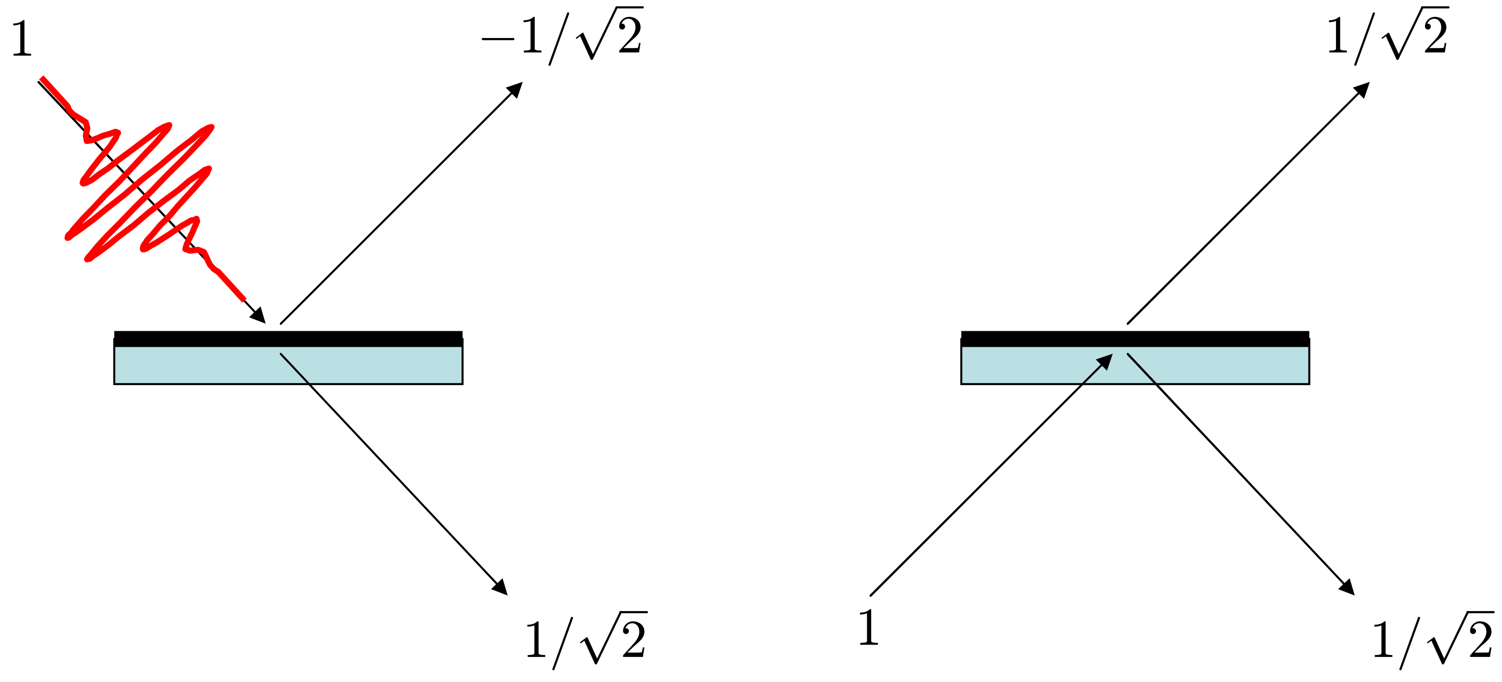
$$\hat{\vec{E}}(\vec{x},t) = i \sum_{\lambda} \int d^3\vec{k} \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon(2\pi)^3}} \hat{a}_{\vec{k},\lambda} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x}) + H.c.$$

$$u_{\vec{k},\lambda} = \frac{1}{2\pi^{3/2}} \vec{e}_{\vec{k},\lambda} \exp(i\vec{k}\cdot\vec{x})$$

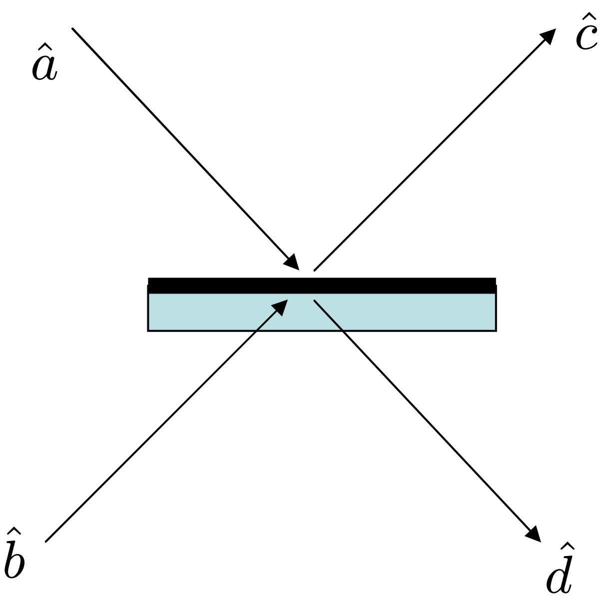
w obrazie oddziaływania

$$\hat{a} \cdot e^{-i\omega t}$$

Klasyczny beamsplitter



Odbicie od beamsplittera

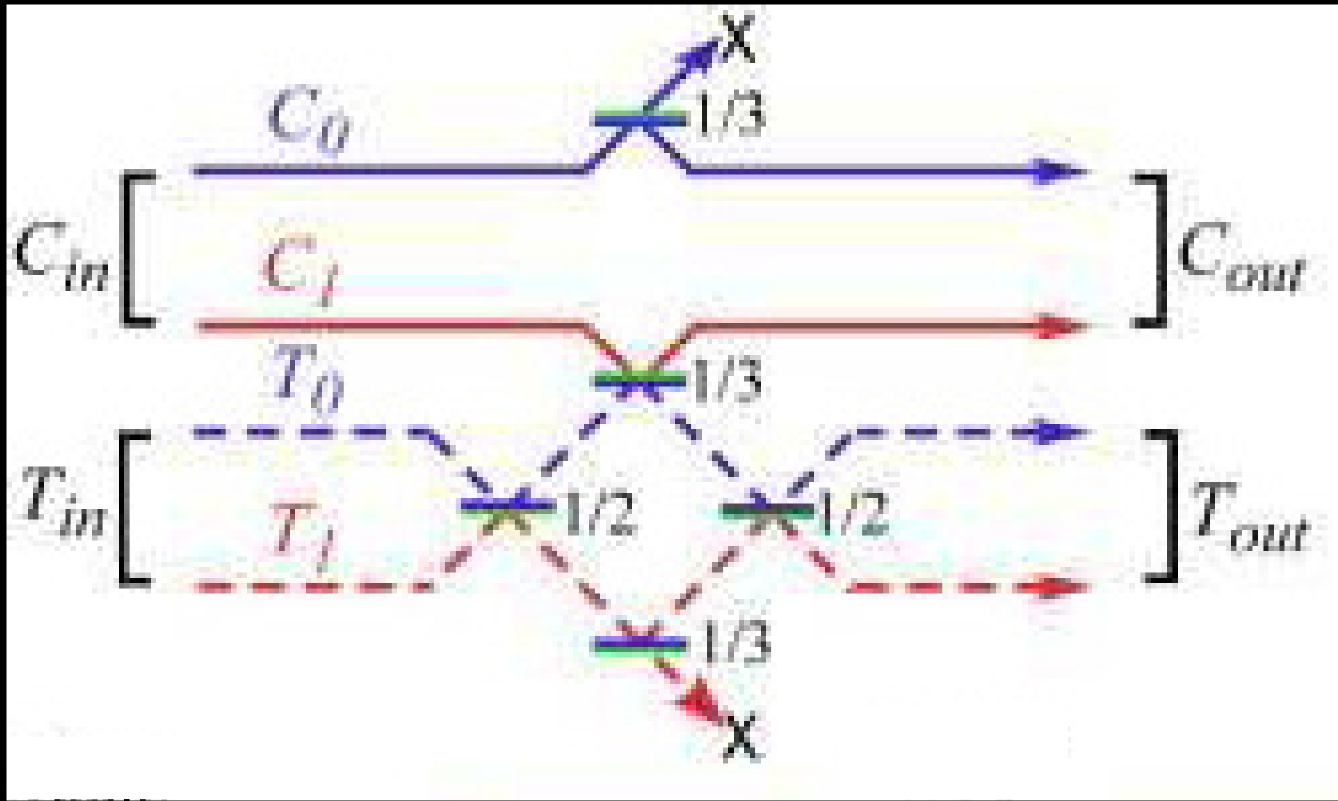


$$\hat{a} \to \frac{\hat{d} - \hat{c}}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{b} \to \frac{\hat{d} + \hat{c}}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{|2,0\rangle \pm |0,2\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{a^{\dagger 2} \pm b^{\dagger 2}}{2}|0\rangle$$

$$\frac{|2,0\rangle + |0,2\rangle}{\sqrt{2}} \qquad |1,1\rangle$$



O'Brien *et al.*, Nature **426**, 46 (2003).

Bramka C-NOT

Jeden foton

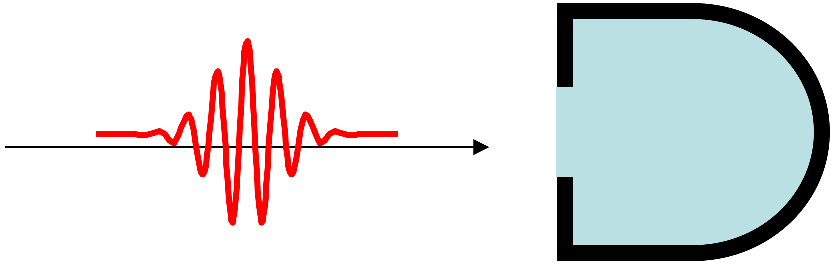
stan własny operatora całkowitej liczby wzbudzeń z wartością własną równą 1.

$$\hat{n}_{tot} = \sum_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$$

Da się zapisać jako: $$\sum_k c_k \hat{a}_k^\dagger |0\rangle$$

$$\sum_k |c_k|^2 = 1$$

Detekcja: zliczanie fotonów



$$\int_{t}^{t+\Delta t} dt\, a^\dagger(t) a(t)$$

$$\hat{a}(t) = \int d\omega \hat{a}(\omega) e^{-i\omega t}$$

Jeden foton monochromatyczny

$$\hat{E} = \sum_n -\frac{\hat{p}_n(t)}{\epsilon_0}\vec{u}_n(\vec{x})$$

$$\hat{p}_n = \sqrt{\hbar\epsilon\omega}\frac{\hat{a} - \hat{a}^\dagger}{i\sqrt{2}}$$

$$\hat{a}_n = \sqrt{\frac{\epsilon\omega_n}{2\hbar}}\left(\hat{q}_n + i\frac{\hat{p}_n}{\epsilon\omega}\right)$$

$$|\langle p|a^\dagger|0\rangle|^2 = \langle 0|\hat{a}\delta(p - \hat{p})\hat{a}^\dagger|0\rangle$$

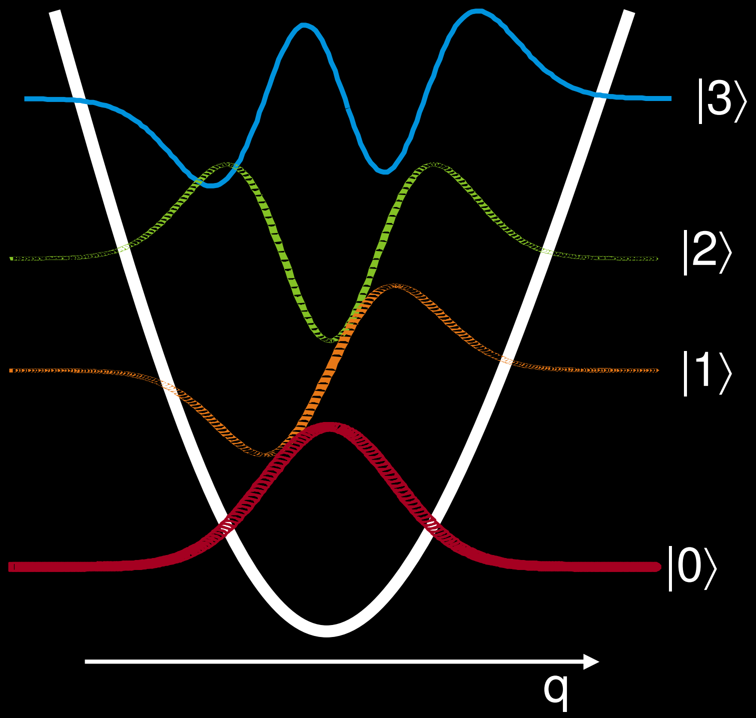
$$\int \frac{d\xi}{2\pi}e^{i(\hat{p}-p)\xi}$$

$$\langle p|1\rangle = \sqrt{2}\sqrt[4]{\epsilon\omega\pi\hbar}\exp\left(-\frac{m\omega p^2}{2\hbar}\right)\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}p$$

$$\dot{q} = p/m$$

$$\dot{p} = -m\omega^2 q$$

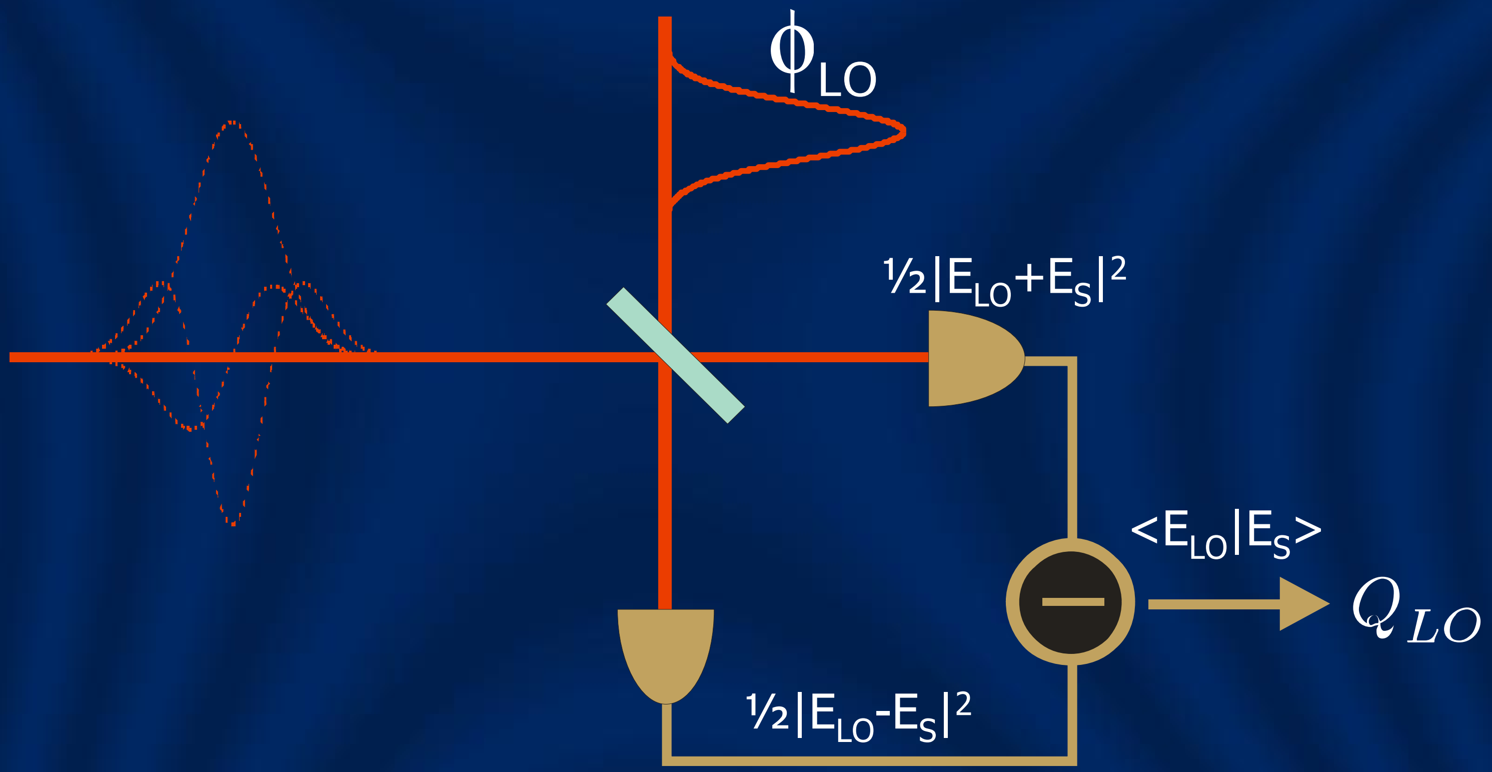
$$a=(q+ip)/2^{1/2}$$



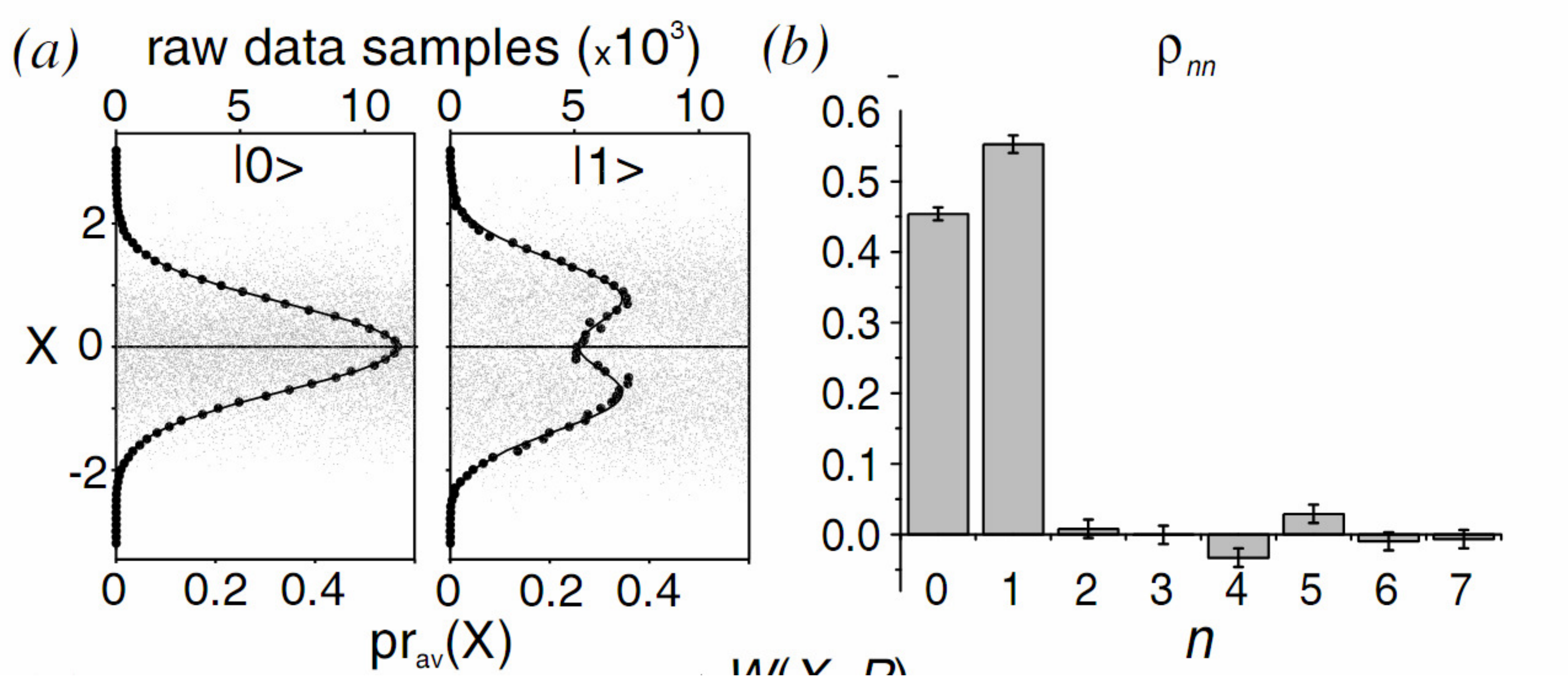
$$|1\rangle = a^{\dagger}|0\rangle$$

Oscylator harmoniczny

Detekcja homodynowa



1 foton

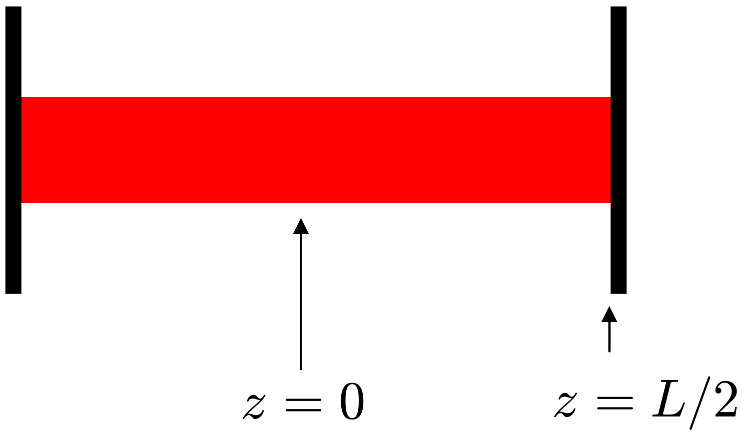


Lvovsky et al., Phys. Rev. Lett. 87, 050402 (2001)

Oddziaływanie z atomem

Atom we wnęce.
Emisja spontaniczna.
Oddziaływanie kolektywne i fale spinowe.

Mody wnęki



$$E(x,z) = \int dk_x e^{ik_x x} \tilde{E}(k_x, z)$$

$$\tilde{E}(k_x, z) = \int \frac{dx}{2\pi} e^{-ik_x x} E(x,z)$$

$$\tilde{E}(k_x, L/2) = E(k_x, 0) e^{i\sqrt{k_0^2 - k_x^2} L/2} \simeq E(k_x, 0) e^{i[k_0 - k_x^2/(2k_0)]L/2}$$

$$E_o(x, L/2) = E_p(x, L/2) e^{-ik_0 x^2/(2R)}$$

$$\tilde{E}' = e^{ikL} e^{-i\frac{L{k'_x}^2}{4k}} \int dk_x \int \frac{dx}{2\pi} e^{i(k_x - k'_x)x - i\frac{kx^2}{2R}} e^{-i\frac{Lk_x^2}{4k}} \tilde{E}$$

$$\tilde{E}' = \int dk_x C(k'_x, k_x) \tilde{E}$$

Mody wnęki

$$\tilde{E}' = \int dk_x C(k'_x, k_x)\tilde{E}$$

$$C(k', k) = \exp\left(-\frac{i}{4k_0}[(L-2R)(k'^2+k^2)+4Rk'k]\right)$$

$$w_0 = \frac{L\lambda}{\sqrt{4\pi}}\sqrt{\frac{1+g}{1-g}} \qquad g = 1 - R/L$$

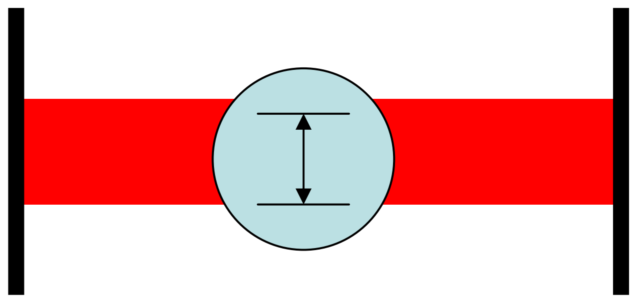
$$C(k', k) = \sum_n e^{in\phi} u_n(k') u_n(k)$$

$$u_n(k) = \sqrt{\frac{w_0}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}} H_n(kw_0) e^{-k^2 w_0^2/2}$$

Siegman, Lasers, rozdz. 19

http://mathworld.wolfram.com/MehlersHermitePolynomialFormula.html

Wnęka rezonansowa



krótka: duża odległość między rezonansami

Hamiltonian Jaynesa–Cummingsa

$$H_A = \hbar\omega_0\sigma_z/2$$

$$H_R = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a}$$

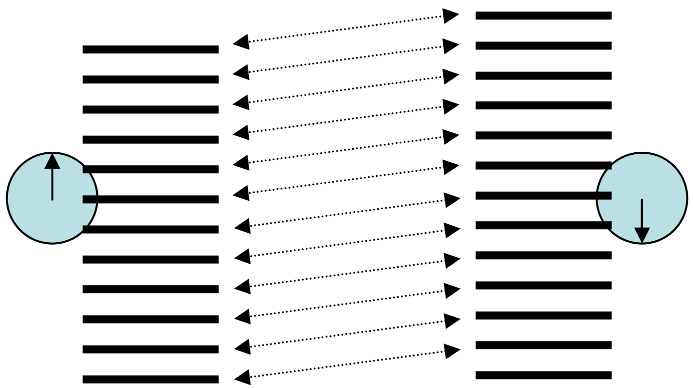
$$H_{int} = \hat{E}\cdot\hat{d} \simeq \tfrac{\hbar\Omega}{2}(\hat{a}^\dagger_\omega\sigma_- + \hat{a}_\omega\sigma_-)$$

$$2\sigma_\pm = \sigma_x \pm i\sigma_y$$

$$[\sigma_+, \sigma_-] = \sigma_z$$

$$[\sigma_z, \sigma_\pm] = \pm 2\sigma_\pm$$

Całkowita liczba wzbudzeń zachowana $N = \hat{a}^\dagger\hat{a} + \sigma_z$



pole

zachodzą oscylacje pomiędzy

$$|n,\uparrow\rangle \leftrightarrow |n+1,\downarrow\rangle$$

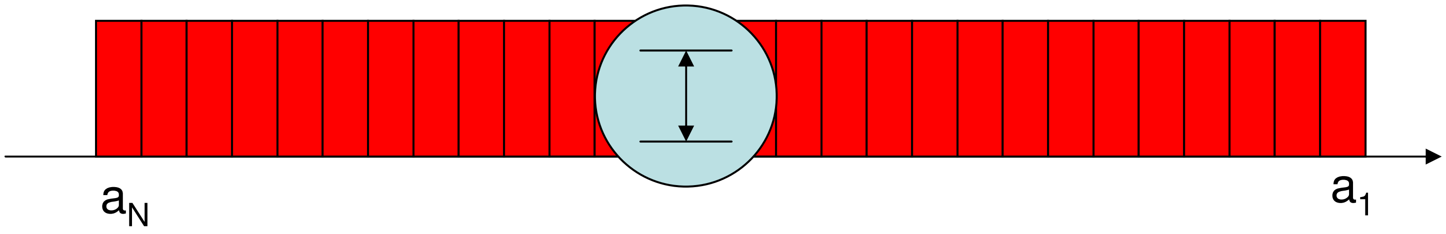
$$\Omega_n = \sqrt{\Delta + \Omega^2(n+1)}$$

Za: Wikipedia

Emisja spontaniczna

Dostaliśmy oscylacje, bo foton odbija się i wraca do atomu

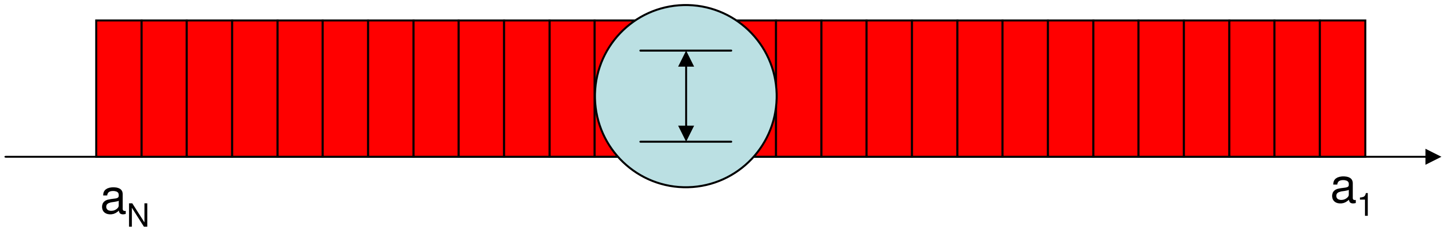
to spróbujmy inaczej:



$$u_n(t) = 1/\sqrt{\tau} \text{ lub } 0$$

a skoro tak, to $\Omega = Ed \propto 1/\sqrt{\tau}$

Emisja spontaniczna 2



niech początkowo $|\psi\rangle(t=0) = |0,\uparrow\rangle$

dla małych t $|\psi\rangle(t) \simeq (1-\Omega_0^2 t^2/2)|0,\uparrow\rangle + \Omega_0 t|1,\downarrow\rangle$

a teraz uwaga: przekładamy atom do drugiej wneki

$$|\psi\rangle(2t) \simeq (1-\Omega_0^2 t^2/2)^2|0,0,\uparrow\rangle + (1-\Omega_0^2 t^2/2)\Omega_0 t|0,1,\downarrow\rangle + \Omega_0 t|1,0,\downarrow\rangle$$

po czasie T=Nt $$p_\uparrow = \left(1 - \frac{\Omega_0^2 T^2}{2N^2}\right)^{2N}$$

$$\boxed{p_\uparrow \to \exp(-\Gamma t)}$$

$$\Omega_0 = \Omega = Ed \propto 1/\sqrt{t}$$

Eksperyment…

Quantum interference between two single photons emitted by two single trapped atoms

http://www.acqao.org/workshops/Kioloa_2006/Messin.pdf

W domu

W płaszczyźnie z=0 zmierzono
(wk>>1, $\tau\omega$>>1)

$$\langle \hat{a}^\dagger(x,y,t)\hat{a}(x,y,t)\rangle = N \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2} - \frac{t^2}{\tau^2}\right)$$

$$\langle \hat{a}(x,y,t)\rangle \propto e^{-i\omega t}$$

1. znajdź wielomodowy stan koherentny który spełnia ten warunek.
2. podobnie znajdź stan jednofotonowy. Jakie będzie N?
3. co stoi zamiast kropek we wzorach na slajdzie “sposoby na impuls” ?
4. Zapisz końcowy stan pola ze slajdu “Emisja spontaniczna 2”