Uniwersytet Warszawski Wydział Fizyki

Wojciech Wasilewski Nr albumu: 196013

Korelacje we fluorescencji parametrycznej

Praca magisterska na kierunku fizyka w zakresie optyki

> Praca wykonana pod kierunkiem prof. dr hab. Czesława Radzewicza w laboratorium procesów ultraszybkich Instytutu Fizyki Doświadczalnej Wydziału Fizyki Uniwesytetu Warszawskiego

Warszawa 4 listopada 2005

Oświadczenie kierującego pracą

Oświadczam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i stwierdzam, że spełnia ona warunki do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przez mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersją pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora pracy

Streszczenie

Wprowadziłem teorię opisującą wielomodowe ściskanie we wzmacniaczu parametrycznym. Korzystając z jego liniowości pokazuje, że ściska on niezależne mody, podaję także procedurę znalezienia ich kształtu. Powiazałem z nimi korelacjie pola i natężeniowe. Podałem przybliżenie gaussowskie pierwszego rzędu w stałej oddziaływania umożliwiające obliczenie korelacji pola w przypadku emisji wąskopasmowych par fotonów. Wprowadziłem równania ewolucji korelacji pola, pozwolające obliczyć zależność natężenia fluorescencji od różnicy prędkości grupowych oddziałujących pól. Wyniki tego modelu są zgodne z przedstawionymi pomiarami.

Pokazałem, że na zmierzone korelacje oraz rozkład kątowy fluorescencji parametrycznej istotnie wpływają efekty związane z dużym wzmocnieniem.

Słowa kluczowe

Optyczny generator parametryczny, stan ściśnięty światła, korelacja natężeniowa

Dziedzina pracy 13.2 Fizyka

Klasyfikacja tematyczna 1101-508 Optyka

Wielu jest u nas jeszcze pracowników, którzy z pewną nieufnością lub ostrożnością odnoszą się do wszystkich spraw związanych z nauką fizyki. Uważają oni bowiem, że fizyka — to teoria, to laboratoria i podobne zawiłe rzeczy, które człowiekowi prostemu są zupełnie niepotrzebne i bez znajomości których każdy rzemieślnik, a nawet maszynista, może obejść się i dobrze wykonywać swoją pracę.

Tak jednak nie jest.

Teobald Neumann Podręcznik maszynisty parowozowego

Rozdział 1

Wstęp

W ciągu ostatnich 20. lat spontaniczna fluorescencja parametryczna (SPDC — spontaneous parametric downconversion) stała się bodaj najpopularniejszym procesem, za pomocą którego otrzymuje się światło o nieklasycznych właściwościach. Powstaje ona we wzmacniaczu parametrycznym, który jest wprawdzie pompowany, natomiast nie jest zasiewany, tj. nie wzmacnia żadnego zewnętrznego pola optycznego.

1.1 Wzmacniacz parametryczny w literaturze

Poniżej postaram się dokonać krótkiego przeglądu najważniejszych prac traktujących o wzmacniaczach i wzmacnianiu parametrycznym. Na koniec streszczę również prace dotyczące zastosowań światła wytwarzanego przez takie wzmacniacze.

Korelacje we fluorescencji parametrycznej były od dawna postrzegane jako zasadniczy element czyniący ją niezwykle użyteczną. Jak pokażę to w rozdziale 2.2 niezdegenerowany wzmacniacz parametryczny produkuje dwie wiązki o takiej samej, choć losowej, liczbie fotonów (*twin beams*). Spodziewamy się że zmierzona różnica natężeń tych wiązek będzie zawsze wynosiła zero, co łamie klasyczne ograniczenie zwane granicą szumu śrutowego¹.

Pierwszymi którym udało się zmierzyć nieklasyczne korelacje energii dwóch impulsów wzmacnianych we wzmacniaczu parametrycznym byli Raymer i współpracownicy [1]. Autorzy używali impulsowego lasera neodymowego, którego druga harmoniczna pompowała OPA (*optical parametric amplifier*) pracujący w II typie (patrz rodział 3.1), zasiewany małą częścią wiązki fundamentalnej. Energie impulsów były mierzone za pomocą dwóch fotodiod, ładunki z których precyzyjnie odejmowano a wynik wzmacniano.

Pomiaru łącznej statystyki liczby fotonów w bliźniaczych wiązkach dokonano dopiero 5 lat temu przy użyciu detekcji homodynowej [2].

Światło fluorescencji parametrycznej charakteryzuje się również korelacjami pomiędzy kwadraturami pola w wiązce sygnałowej i jałowej. Ich pomiar jest trudniejszy, wymaga bowiem detekcji homodynowej [3], ale dostarcza dużo więcej informacji o stanie pola. Na przykład, korelacje kwadratur wytwarzane we wzmacniaczu parametrycznym mogą posłużyć do demonstracji paradoksu EPR. Oryginalnie, Einsten, Podolsky i Rosen zażądali, żeby pomiar położenia lub pędu jednej cząstki umożliwiał wyznaczanie położenia lub pędu drugiej cząstki jedynie z ograniczoną dokładnością [4]. Ponieważ dla dowolnych dwóch operatorów hermitowskich A i B zachodzi²:

$$\Delta A \Delta B \ge \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle | \tag{1.1}$$

¹zgodnie z półklasyczną teorią detekcji promieniowania każdy detektor wprowadza do zmierzonego natężenia światła I szum $\propto \sqrt{I}$ niezależny statystycznie od wszystkich innych szumów w układzie. Zatem różnica natężeń zmierzonych przez dwa różne detektory nigdy nie może spaść poniżej pewnej granicy — szumu śrutowego bądź granicy poissonowskiej.

 $^{^{2}}$ wyprowadzenie — np. [5], zad. 1.51

gdzie $\Delta A = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$, to biorąc jako te operatory $x_{inf} = x_1 - x_2$ oraz $p_{inf} = p_1 - p_2$ gdzie x i p to operatory położenia i pędu cząstki, a cząstki 1 i 2 są niezależne, tak żeby było $[x_i, p_i] = i\hbar \delta_{i,j}$ dostajemy, że:

$$\Delta x_{inf} \Delta p_{inf} \ge \hbar \,. \tag{1.2}$$

Jeśli nierówność ta nie jest spełniona, znaczy to że cząstki nie są niezależne, co dla cząstek odizolowanych i odległych jest paradoksalne. Weryfikacja tej nierówności była tematem pracy [6]. Autorzy przedstawiają wyniki eksperymentu w którym mierzą kwadratury wiązki sygnałowej i jałowej generowanych we wzmacniaczu parametrycznym. Kwadratury dla jednej wiązki spełniają analogiczne związki komutacyjne jak pęd i położenie, wobec czego dla pary wiązek powinno być:

$$\Delta X_{inf} \Delta Y_{inf} \ge 1 \tag{1.3}$$

gdzie ΔX_{inf} i ΔY_{inf} oznaczają dokładność z jaką możemy wnioskować (chwilowe) wartości kwadratur jednej wiązki z wartości kwadratur drugiej. Autorzy podają, że w ich układzie $\Delta X_{inf} \Delta Y_{inf} = 0.70(1)$ i tym samym występuje paradoks EPR. Wartość ta wynika ze skończonego wzmocnienia, idealne korelacje kwadratur dostalibyśmy przy nieskończonym wzmocnieniu³.

Korelacje przestrzenne Fotony we fluorescencji parametrycznej skorelowane są również w pędach i położeniach. Wyniki potwierdzających to pomiarów przedstawione są w pracy [7]. Autorzy mierzą w reżimie produkcji pojedynczych par pęd lub położenie każdego fotonu z osobna i badają zachowanie nie-równości (1.2). Również i tym razem okazuje się, że fotony pochodzące z fluorescencji parametrycznej łamią tą nierówność.

W reżimie dużego natężenia fluorescencji parametrycznej występujące w niej korelacje są trudniejsze do opisu. W pracy [8] autorzy badają teoretycznie korelacje natężenia światła z SPDC w bliskim i dalekim polu. Szacują charakterystyczne rozmiary tych korelacji w przypadku pompowania płaską, monochromatyczną falą pompującą. Symulują proces downconversji badając ewolucje punktów z przestrzeni fazowej wylosowanych zgodnie z rozkładem równym funkcji Wignera stanu początkowego tj. rozwiązują numerycznie równania propagacji impulsów pompującego, sygnałowego i biernego jeśli te dwa ostatnie na początku są wylosowane zgodnie z rozkładem wynikającym z funkcji Wignera. W ten sposób uzyskują dobre przybliżenie stanu końcowego po oddziaływaniu, z którego obliczają charakterystyczne rozmiary funkcji korelacji natężeń w bliskim i dalekim polu (tj. bezpośrednio za kryształem i w polu dalekim od płaszczyzny wyjściowej). W ten sposób potwierdzają przybliżone oszacowania oraz pokazują, że korelacje w przypadku pompowania wiązką (acz monochromatyczną) wciąż występują. Słabym punktem pracy jest pominięcie w symulacjach zależności czasowych. Ci sami autorzy opublikowali szereg prac korzystając z tych samych metod rachunkowych; pokazują w nich, między innymi, że występują korelacje w polaryzacjach [9]

W pracy [10] autorzy prezentują wyniki pomiarów korelacji w polu dalekim. Mierzą oni za pomocą kamery ICCD kierunki par fotonów opuszczających kryształ I typu pompowany laserem He-Cd. Warunki eksperymentu, a w szczególności czas bramkowania kamery ICCD dobrane są w taki sposób, aby w pojedynczym obrazie widoczne były co najwyżej dwa fotony. Uzyskane przez autorów wyniki zgadzają się z krzywą dopasowania fazowego (por. rys. 3.3), o ile założyć nieco inną orientację kryształu (o 0.5^{o}) niż występująca w rzeczywistości.

Przegląd przestrzennych właściwości wielomodowego światła ze spontanicznej parametrycznej downconversji (SPDC) można znaleźć w pracy [11].

Šciskanie Pole świetlne spontanicznej fluorescencji parametrycznej znajduje się w stanie ściśniętym. Jest to taki stan, w którym fluktuacje pola w jednej z jego kwadratur są zredukowane poniżej poziomu fluktuacji próżni [13]. Światło o takich właściwościach było pierwszym światłem nieklasycznym

 $^{^{3}}$ przy dużych wzmocnieniach korelacje ograniczone są przez wydajność detekcji, która maleje wraz ze stratami (np. na odbicie od powierzchni elementów optycznych) oraz zmianą pola lokalnego oscylatora w stosunku do idealnego (patrz 2.2)



Rysunek 1.1: Schemat klasycznego eksperymentu korelacyjnego. Skorelowany projektor kinowy wyświeca dwie wiązki a i b dla każdej klatki filmu. Jakie są ograniczenia korelacji tych wiazek? Praktycznie rzecz biorąc wszystkie wynikają z niemożności redukcji szumu poniżej szumu śrutowego.

otrzymanym w eksperymentach w latach 80. [14, 15] a wśród pierwszych jego potencjalnych zastosowań wymieniano redukcję zaburzającego pomiary optyczne szumu śrutowego [16] oraz zwiększenie przepustowości kanałów komunikacyjnych [17].

Wzmacnianie parametryczne nie jest jedynym sposobem generacji stanów ściśniętych pola elektromagnetycznego. Do innych należą: modulacja wywołana efektem Kerra w parach atomowych [14, 18] oraz światłowodach [19] jak też optyczne tłumienie parametryczne (*optical parametric deamplification*) [20].

1.1.1 Zastosowania wzmacniacza parametrycznego

Źródła par fotonów W tzw. reżimie spontanicznym, czyli kiedy w każdym zdarzeniu powstaje mniej niż jedna para, zjawisko to jest jednym z nielicznych pozwalających otrzymać pojedyncze fotony oraz pary fotonów, w szczególności pary splątane. Przy użyciu źródeł opartych o SPDC zademonstrowano łamanie nierówności Bella [21], kwantową teleportację w rozmaitych jej wcieleniach [22] a niedawno również proste bramki kwantowe [23]. Wiele listów do najszacowniejszych redakcji zrodziło się również z badań pojedynczego fotonu [24]. Pojedyncze fotony służą również do demonstracji możliwości kodowania i przesyłania informacji przy użyciu kwantowych korelacji [25].

Kwantowe obrazowanie W pracy [28] autorzy opisują wyniki eksperymentu, w którym powstaje tzw. obraz-duch dwóch szczelin. Jeśli zbuduje się układ, w którym niezdegenerowane pary fotonów splątanych generowane w krysztale II typu rozdzielane są polaryzacyjnie, i jeden foton z pary przechodzi (bądź nie) przez dwie szczeliny po czym trafia na nieruchomy detektor, a drugi trafia (bądź nie) do ruchomego detektora to w funkcji położenia ruchomego detektora widoczne będą prążki w koincydencjach zliczeń. Jest to konsekwencją zachowania poprzecznej składowej wektora falowego w procesie downconversji. Praca ta dała impuls do badań i szeregu kolejnych doniesień, w których opisywane są rozmaite aspekty "kwantowego obrazowania", czyli obrazowania w którym przedmiot znajduje się w jednym ramieniu, za nim detektor bez rozdzielczości przestrzennej, zaś kamera w drugim, bramkuje się ją za pomocą detektora i uśrednia tak zebrane obrazy. De facto problem takiego obrazowania, jeśli zastanowić się nad obrazowaniem małego otworka, redukuje się do problemu korelacji natężeniowych między wiązkami (dokładniej opisanych w punkcie 2.3). Zasadnicze pytanie jest następujące: jakie korelacje można osiągnąć przy użyciu źródeł klasycznych (rys. 1.1), a jakie godzi się nazwać kwantowymi?

W artykule [29] autorzy pokazują, że można uzyskać te same wyniki używając jako źródła światła lasera He-Ne ze skanerem zmieniajacym kierunek wiązki oraz beam-splitterem.

W kolejnych pracach uczeni bliscy byli konkluzji, że jeśli uda się za pomocą tego samego źródła wytworzyć zarówno obraz koincydencyjny w polu bliskim jak i dalekim, to musi ono mieć korelacje

kwantowe. Że można by tego faktu użyć do "odróżnienia splątania od klasycznych korelacji" dla źródeł fluorescencji parametrycznej o dowolnym natężeniu piszą autorzy w pracy [30].

W pracy [31] autorzy pokazują formalną analogię pomiędzy źródłami par splątanych a źródłami światła niespójnego. Pokazują, że podobną rolę grają rozkład natężenia wiązki pompującej kryształ generujący pary co rozkład natężenia źródła światła niespójnego, a funkcja falowa dwóch fotonów co funkcja korelacji 4. rzędu. W szczególności pokazują, że twierdzenie van Citterta-Zernikego (wiążące spójność w polu bliskim ze spójnością w polu dalekim) ma swój odpowiednik dla par fotonów, a także istnieją formalne analogie pomiędzy wzorami opisującymi powstawanie obrazów.

Kontrowersje wokół możliwości obrazowania przy pomocy klasycznych źródeł światła w dużej mierze rozstrzyga praca [32]. Autorzy badają korelacje pomiędzy dwoma wiązkami światła termicznego uzyskanymi poprzez rodzielenie wiązki z jednego źródła wielomodowego, o termicznej statystyce liczby fotonów w każdym modzie, za pomocą płytki światłodzielącej. Pokazują, że wiązki takie są silnie skorelowane zarówno bezpośrednio za płytką światłodzielącą jak i w dowolnej innej płaszczyźnie powiązanej z tą pierwszą płaszczyzną transformacja fresnela (byle taką samą dla obu wiązek), w szczególności w polu dalekim. Jeśli wprowadzić kowariancję

$$C(a,b) := \frac{\langle N_a N_b \rangle - \langle N_a \rangle \langle N_b \rangle}{\sqrt{\Delta^2 N_a \Delta^2 N_b}}$$
(1.4)

pomiędzy zliczeniami (natężeniami) w obszarach a i b (a w wiązce 1 i b w wiązce 2) to okazuje się, że dla wiązek ze spontanicznej parametrycznej downconversji może ona osiągać 1, zaś dla podzielonego światła termicznego ograniczona jest przez szum śrutowy, czyli zbliża się do 1 dopiero dla odpowiednio dużej liczby fotonów ($C < 1 - 1/\langle N \rangle$). Drugim wskaźnikiem porównawczym jest widzialność

$$V(a,b) := \frac{\langle N_a N_b \rangle - \langle N_a \rangle \langle N_b \rangle}{\langle N_a N_b \rangle}$$
(1.5)

która jest miarą tego, na ile trudno jest dokładnie wykonać odejmowanie potrzebne przy liczeniu korelacji. Im większa widzialność tym mniej pomiarów trzeba wykonać aby poznać C z zadaną dokładnością. Dla wiązek z SPDC widzialność sięga 1 dla bardzo małych średnich liczb fotonów, dla większych spada. Dla podzielonego światła termicznego widzialność nie przekracza 1/2. Konkludując, autorzy stwierdzają, że dla dużych natężeń dwie wiązki skorelowane pochodzące wprost z kryształu SPDC są nie do odróżnienia od jednej z nich (przy pompowaniu takim, że SPDC jest 2 razy silniejsze) podzielonej na beamspliterze, jeśli chodzi o właściwości związane z korelacjami nateżeniowymi. Wszelkie różnice wynikają jedynie z tego, że korelacje w SPDC są silniejsze niż dopuszcza to klasyczna granica szumu śrutowego, ta zaś, względnie rzecz biorąc, jest coraz mniej znacząca wraz ze wzrostem średniej liczby fotonów.

Zgodnie z wynikami powyższej pracy uzyskanie obrazów koincydencyjnych przy pomocy klasycznych źródeł o małym natężeniu byłoby bardzo trudne ze względu na wysoki poziom szumów śrutowych w stosunku do sygnału. Dlatego jeśli z jakiś powodów chcemy pracować w reżimie bardzo małych natężeń światła, to opłaca się używać źródeł opartych o fluorescencję parametryczną. W szczególności w reżimie produkcji pojedynczych par, jak to eksperymentalnie zademonstrowano w pracy [33] możliwa jest redukcja szumów zakłócających obraz oraz tła do zera.

Źródło stanów ze splątanymi kwadraturami pola Zainteresowanie światłem fluorescencji parametrycznej i stanami ściśniętymi utrzymuje sie do chwili obecnej za sprawą jego potencjalnych zastosowań w przetwarzaniu kwantowej informacji i kwantowej komunikacji. W tym kontekście proces powstawania fluorescencji parametrycznej rozpatruje sie głównie jako sposób na otrzymanie splątania kwadratur pola [34], które to splątanie służy do, na przykład, teleportacji kwantowej [22], kwantowych obliczeń [35], kryptografi kwantowej [36] czy manipulacji stanami atomowymi [37]. Owo splątanie, tzw. splątnie zmiennych ciągłych (kwadratur, w przeciwieństwie do dyskretnych polaryzacji) postrzegane jest jako niezwykle obiecujący zasób dla technologii kwantowego przetwarzania informacji po tym jak rozwinięto techniki korekcji błedów [38] i protokoły puryfikacji spątania [39]

1.2 Pomiar wielomodowego wzbudzenia pola elektromagnetycznego

Od czasów pracy [40], w której autorzy wykonali tomografię stanu kwantowego na wyjściu swojego wzmacniacza parametrycznego (opisanego w [1]), zainteresowanie badaniem stanu pola stale rośnie. Wiemy, że za pomocą detekcji homodynowej jest *a priori* możliwe zmierzenie pełnego stanu pola (jego macierzy gęstości) [41].

Kilka lat temu pojawiły się pierwsze prace doświadczalne w których zademonstrowano możliwość jednoczesnego pomiaru stanu wielu modów pola elektromagnetycznego przy pomocy macierzy detektorów. W pracy [42] autorzy dokonali pomiaru stanu kwantowego różnych modów przestrzennych wiązki światła metodą tomografii stanu kwantowego. W pracy [43] z kolei autorzy zmierzyli Q-funkcje dla różnych modów czasowych badanego impulsu.

Nowe są prace eksperymentalne w których autorzy wychodzą poza przybliżenie, że ich źródła emitują stan kwantowy w jednym modzie czasoprzestrzennym promieniowania, analizują problem wielomodowy i opisują w ten sposób eksperyment z większą dokładnością [44]. Autorzy tej pracy zadają sobie następujące pytanie: jeśli dokonać diagonalizacji macierzy gęstości stanu którym dysponują w eksperymencie

$$\hat{\rho} = \sum_{i} \lambda_{i} |\psi_{i}\rangle \langle\psi_{i}| \tag{1.6}$$

to ile wartości własnych λ_i jest istotnie niezerowych? Okazuje się że kilka. Przy okazji takiego postępowania otrzymujemy funkcje $|\psi_i\rangle$, które tworzą bazę ortogonalną. W szczególnym przypadku, gdy są to funkcje falowe fotonu, to właśnie ich szczególnie wygodnie użyć jako bazy modów drugiego kwantowania (por. rozdział 2.2), zamiast tradycyjnych fal płaskich.

Problem rozkładu fluorescencji parametrycznej na mody pojawia się w literaturze podczas rozważań o homodynowej detekcji ściskania we fluorescencji. Przy takiej detekcji bada się stopień ściśnięcia w modzie lokalnego oscylatora. Wynik zależy wobec tego od kształtu impulsu lokalnego oscylatora, stąd też badania nad optymalnym kształtem tego impulsu, umożliwiającym wykrycie największego ściśnięcia [45]. Problem jest o tyle istotny, że znakomita wiekszość zastosowań stanów ze splątanymi kwadraturami pola wymaga homodynowej detekcji ściskania [34, 35, 36, 38, 39] przeprowadzonej możliwie bezstratnie.

Pierwszą pracą w której pojawiło się spostrzeżenie, że fluorescencja parametryczna ma mody własne i tym samym najlepiej byłoby wybrać lokalny oscylator tak, żeby pasował tylko do jednego z nich, jest praca [46]. Niemniej jednak pozostawia ona istotne wątpliwości co do sposobu w jaki jej autorzy otrzymali kształt tych modów. W przygotowaniu jest praca w której znajdą się uzasadnione wyniki obliczeń takich modów w przypadku oddziaływania w światłowodzie [47].

1.3 Cel i struktura pracy

W niniejszej pracy postaram się opisać stan światła fluorescencji parametrycznej ze szczególnym zwróceniem uwagi na jego przestrzenną i czasową strukturę. Obliczę, używając prostego modelu teoretycznego, oraz przedstawię wyniki pomiarów, korelacji przestrzenno-częstotliwościowych w tym promieniowaniu. Model teoretyczny pozwoli mi również przewidzieć, że badane promieniowanie składa się ze wzajemnie niezależnych stanów ściśniętych obsadzających ortogonalne mody czasoprzestrzenne.

Właściwa praca składa się z dwóch rozdziałów: drugiego, poświęconego modelowaniu teoretycznemu wzmacniacza parametrycznego, oraz trzeciego, poświęconego badaniom eksperymentalnym.

Rozdział 2

Model wzmacnianiacza parametrycznego

Wzmacniacz parametryczny jest jednym z niewielu układów, które dadzą się zadowalająco opisać kwantowo, pomimo że ulega w nim oddziaływaniu bardzo wiele modów. Przyczyniają się do tego dwa fakty: po pierwsze w eksperymentach fluorescencja parametryczna jest na tyle słaba, że nie zmienia impulsu pompującego i tym samym wzmacnianie jest liniowe, po drugie zaś, jak to wykażę, zawsze można tak dobrać funkcje modowe w zagadnieniu, aby sprowadzić je do wielu wzajemnie niezależnych procesów ściskania.

Ponieważ zagadnienie jest liniowe, zaczniemy jego znalizę od przyjrzenia się przypadkowi klasycznemu, który łatwo kwantuje się formalnie. Okaże się, że wzmacniacz niektóre fale czy też kombinacje fal wzmacnia, inne — osłabia. Po przetłumaczeniu tego wyniku na język optyki kwantowej okaże się, iż wzmacniacz produkuje stany ściśnięte.

2.1 Klasyczny wzmacniacz parametryczny

Niech w krysztale nieliniowym o niezerowym tensorze $\chi^{(2)}$ [48] oddziałują ze sobą trzy pola — pompy E_p , sygnałowe E_s i jałowe E_i (patrz rys. 2.1). Jeśli tylko ich widma są niezbyt szerokie w porównaniu z częstościami średnimi, to możemy przejść do wygodnego opisu za pomocą obwiedni:

$$E_p = A_p \exp\left(ik_{0,p}z - i\omega_{0,p}t\right) \tag{2.1a}$$

$$E_s = A_s \exp\left(ik_{0,s}z - i\omega_{0,s}t\right) \tag{2.1b}$$

$$E_i = A_i \exp\left(ik_{0,i}z - i\omega_{0,i}t\right) \tag{2.1c}$$

przy czym częstości centralne spełniają warunek $\omega_p = \omega_s + \omega_i$. Aby zapoznać się z właściwościami wzmacniacza parametrycznego rozważmy najpierw

2.1.1 Przypadek fal monochromatycznych płaskich

Jeśli we wzmacniaczu oddziałują ze sobą duże wiązki i możemy pominąć efekty związane z zależnością od współrzędnych poprzecznych, to przybliżamy te wiązki za pomocą fal płaskich. W takim przypadku obwiednie A stają się funkcjami zależnymi tylko od współrzędnej z równania ich ewolucji przyjmują postać [49]:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_s = \chi A_p A_i^* e^{i\Delta kz} \tag{2.2a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A_i = \chi A_p A_s^* e^{i\Delta kz} \tag{2.2b}$$

gdzie o fali pompującej założyliśmy, że jest bardzo silna i się nie zmienia, χ jest stałą sprzężenia nieliniowego, zaś Δk to niedopasowanie fazowe:

$$\Delta k = k_{0,s} + k_{0,i} - k_{0,p} \tag{2.3}$$



Rysunek 2.1: Podstawowe konfiguracje jednoprzejściowego wzmacniacza parametrycznego. Zdegenerowana (lewa strona), w której fala pompująca A_p oddziałując w krysztale nieliniowym z falą sygnałową A_s powoduje powstanie polaryzacji pobudzającej falę sygnałową, oraz niezdegenerowana (prawa strona), w której fala pompująca A_p oddziałując z falą sygnałową A_s powoduje powstanie polaryzacji pobudzającej falę jałową A_i . Wiązki narysowane są pod kątem ze względu na przejrzystosć rysunku. Zazwyczaj wszystkie są współliniowe (w szczególności w przykładach w dlaszej częsci tej pracy). Długość kryształu będę oznaczać przez L, kierunek wzdłuż którego propaguje się fala pompująca przez z, zaś kryształ będę umieszczał miedzy z = 0 a z = L lub między z = -L/2 a z = L/2.

Biorąc sprzężenie równania (2.2b) dostajemy układ równań liniowych. Dalej podstawiamy $r = \chi A_p$ i $\Delta k = 2r \sin \delta$, dzięki czemu ogólne rozwiązanie przyjmuje zwartą postać:

$$\begin{bmatrix} A_s \\ A_i^* \end{bmatrix} (z) = c_1 e^{urz} \begin{bmatrix} 1 \\ u \end{bmatrix} + c_2 e^{-u^* rz} \begin{bmatrix} 1 \\ -u^* \end{bmatrix}$$
(2.4)

gdzie c_1 i c_2 to dowolne liczby zespolone, zaś $u = \exp(i\delta)$. Zauważmy, że dla $c_2 = 0$ i dowolnego c_1 (czyli rozwiązania wzmacniane) suma faz wiązki sygnałowej i biernej jest taka sama, choć każda z nich z osobna może mieć dowolna fazę. Podobnie jest dla rozwiązania tłumionego, choć dlań suma faz nie różni się o π od analogicznej sumy dla rozwiązania tłumionego. Rozwiązania te dla niezerowego δ wydają się na pierwszy rzut oka tworzyć bazę skośną, tym samym po skwantowaniu nie moglibyśmy mówić o ich niezależności. Zastosujmy wobec tego odpowiednią manipulację algebraiczną. Najpierw przepiszemy rozwiązanie (2.4) do postaci wiążącej amplitudy na wyjściu z wejściowymi, znajdując wartości c dla z = 0 (w takiej postaci są częściej podawane, np. [8]):

1

$$A_s(L)e^{i\Delta kL/2} = UA_s(0) + VA_i^*(0)$$
 (2.5a)

$$A_i(L)e^{i\Delta kL/2} = UA_i(0) + VA_s^*(0)$$
 (2.5b)

gdzie:

$$U = \cosh(\Gamma L) + i \frac{\Delta k}{2\Gamma} \sinh(\Gamma L)$$
(2.6a)

$$V = \frac{r}{\Gamma} \sinh(\Gamma L) \tag{2.6b}$$

$$\Gamma = \sqrt{r^2 - \frac{\Delta k^2}{4}} \tag{2.6c}$$

Sprawdziwszy, że

$$|U|^2 - |V|^2 = 1 \tag{2.7}$$

możemy zapisać prościej:

$$A_{s}(L)e^{i\Delta kL/2} = e^{i\phi}\sqrt{1+R}A_{s}(0) + \sqrt{R}A_{i}^{*}(0)$$

$$A_{i}(L)e^{i\Delta kL/2} = e^{i\phi}\sqrt{1+R}A_{i}(0) + \sqrt{R}A_{s}^{*}(0)$$
(2.8)



Rysunek 2.2: Kierunki fazorów pola sygnałowego A_s i biernego A_i reprezentujących najsilniej wzmacniany (lewa strona) i najsilniej tłumiony (prawa strona) mod wzmacniacza. Jeżeli oba fazory obróci się o określony kąt, choć w przeciwnych kierunkach, to nadal pole im odpowiadające będzie wzmacniane (lub tłumione) z taką samą siłą — wzmacniacz jest czuły jedynie na sumę faz fali sygnałowej i biernej.

gdzie ϕ i R to parametry rzeczywiste¹, których wartości można znaleźć przez porównanie powyższego równania z (2.5).

Można to jeszcze przekształcić do postaci, która w wersji kwantowej byłaby wyrażeniem opisującym transformację ściskania kwadratur pola:

$$A_s(L)e^{i\Delta kL/2 - i\phi/2} + A_i^*(L)e^{-i\Delta kL/2 + i\phi/2} = (\sqrt{1+R} + \sqrt{R})\left(e^{i\phi/2}A_s(0) + e^{-i\phi/2}A_i^*(0)\right)$$
(2.10a)

$$A_s(L)e^{i\Delta kL/2 - i\phi/2} - A_i^*(L)e^{-i\Delta kL/2 + i\phi/2} = \frac{1}{\sqrt{1+R} + \sqrt{R}} \left(e^{i\phi/2}A_s(0) - e^{-i\phi/2}A_i^*(0) \right)$$
(2.10b)

Taki prosty wzmacniacz ma 2 mody, przy czym ułożone są one w parę — mod który się wzmacnia ma swój tłumiony odpowiednik (por. (2.36)). Mod wzmacniany od tłumionego różni się jedynie fazą pomiędzy falą sygnałową i bierną a pompującą i dlatego wzmacniacz nazywamy fazoczułym. Graficznie zilustrowałem ten podstawowy fakt na rysunku 2.2.

Odpowiednie przekształcenia umożliwiają dla każdego określonego L znalezienie ortogonalnych modów własnych. Warto zauważyć, że mody te zależą od długości wzmacniacza L. W szczególności działanie wzmacniacza o długości 2L niełatwo przedstawić jako dwukrotne działanie wzmacniacza o długości L. Gdybyśmy chcieli tak zrobić, korzystając ze wzoru (2.10) to okazało by się, że mody wzmacniany i osłabiany w pierwszej części wzmacniacza nie przechodzą bezpośrednio na odpowiednie mody części drugiej, ale mieszają się ze sobą. Mimo to, wybierając odpowiedni rozkład modów na wejściu całego wzmacniacza, inny niż wybralibyśmy na wejściu pierwszej jego części, możemy przedstawić działanie wzmacniacza jako ściskanie jednego i wzmacnianie drugiego modu.

Przypadek zdegenerowany Równanie ewolucji jedynej amplitudy przyjmuje postać:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_s = \chi A_p A_s^* e^{i\Delta kz} \tag{2.11}$$

rozwiązaniem dla idealnego dopasowania fazowego $\Delta k = 0$ i rzeczywistego A_p jest:

$$A_s(z) = c_1 e^{\chi A_p z} + i c_2 e^{-\chi A_p z}$$
(2.12)

$$\sqrt{1+R} + \sqrt{R} = e^{\zeta}, \qquad \qquad \frac{1}{\sqrt{1+R} + \sqrt{R}} = \sqrt{1+R} - \sqrt{R} = e^{-\zeta}$$
(2.9)

Ja przyjąłem za parametr średnią liczbę fotonów na wyjściu $R = \left\langle a_{\text{out}}^{\dagger} a_{\text{out}} \right\rangle$.

¹ Zależnie od osobistych preferencji, czasem wygodniej przyjać notację $\sqrt{1+R} = \cosh \zeta$, $\sqrt{R} = \sinh \zeta$. Gdzie (rzeczywiste) ζ jest parametrem ściskania. Wtedy w równaniu 2.10 mielibyśmy:

gdzie c_1 i c_2 są liczbami rzeczywistymi. Podobnie okazuje się, że wzmacniacz jest czuły na fazę, w tym przypadku po prostu fazę wiązki wzmacnianej. Współczynniki c_1 i c_2 odpowiadają stopniowi pobudzenia drgań dwóch kwadratur ($\propto \cos(\omega t)$ oraz $\propto \sin(\omega t)$) w polu elektrycznym wiązki sygnałowej E_s . Jedna z nich jest wzmacniana, druga zaś — osłabiana. Ilustruje to rysunek 2.3.

Analogicznie jak w przypadku niezdegenerowanym, ogólne rozwiązanie, przy niezerowym niedopasowaniu, najlepiej będzie napisać w postaci, która kwantowo wyrażałaby ściśkanie kwadratur pola:

$$A_s(z)e^{i\Delta kz/2 - i\phi/2} + A_s^*(z)e^{-i\Delta kz/2 + i\phi/2} = (\sqrt{1+R} + \sqrt{R})\left(e^{i\phi/2}A_s(0) + e^{-i\phi/2}A_s^*(0)\right)$$
(2.13a)

$$A_s(z)e^{i\Delta kz/2 - i\phi/2} - A_s^*(z)e^{-i\Delta kz/2 + i\phi/2} = (\sqrt{1+R} - \sqrt{R})\left(e^{i\phi/2}A_s(0) - e^{-i\phi/2}A_s^*(0)\right)$$
(2.13b)

gdzie R i ϕ są rzeczywiste i można je wyrazić za pomocą χA_p oraz Δk (patrz np. [8]).

2.1.2 Przypadek wiązek quasimonochromatycznych

Od tej pory dodatkowo dobieramy centralne częstości i wektory falowe w równaniach (2.1) tak, aby zachodziło dopasowanie fazowe:

$$k_{0,p} = k_{0,s} + k_{0,i} \,. \tag{2.14}$$

Przypadek zdegenerowany

W przypadku, gdy fale sygnałowa i bierna są nie do odróżnienia, czyli opisywane są jedną obwiednią, mówimy o degeneracji. Oddziaływanie pól ograniczonych w czasie i przestrzeni w krysztale możemy opisać za pomocą równań propagacji wolnozmiennych obwiedni [8, 50]:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_p = \hat{L}_p A_p + \chi A_s A_s \tag{2.15a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A_s = \hat{L}_s A_s + \chi A_p A_s^* \tag{2.15b}$$

gdzie \hat{L} są operatorami propagacji liniowej, które najprościej określić na falach monochromatycznych płaskich:

$$\hat{L}_{j}e^{ik_{x}x+ik_{y}y-i\omega t} = (ik_{z,j}(\omega+\omega_{0,j},k_{x},k_{y})-ik_{0,j})e^{ik_{x}x+ik_{y}y-i\omega t} \qquad j=p,\,s,\,i$$
(2.16)



Rysunek 2.3: Zdegenerowany wzmacniacz parametryczny jest czuły na fazę. Na lewym rysunku obrazowo przedstawiłem przykładowe pole elektryczne, którego faza jest losowa, na wejściu do wzmacniacza zdegenerowanego. Takie pole we wzmacniaczu o wzmocnieniu 3 ulegnie tzw. ściśnięciu — co przedstawia rysunek po prawej stronie. Polega ono na tym, że wzmacniacz wybiera jedną kwadraturę pola $(\propto \cos(\omega t))$ i ją wzmacnia zaś drugą $(\propto \sin(\omega t))$ — osłabia.

W każdym równaniu pierwszy człon jest odpowiedzialny za propagację liniową — występowanie prędkości grupowej, walk-off'u, dyspersji, dyfrakcji itp., zaś drugi człon odpowiada za oddziaływanie nieliniowe. Ponieważ $A_p \gg A_s$ to w równaniu (2.15a) możemy pominąć człon nieliniowy (tak jak to już milcząco robiliśmy w punkcie 2.1.1). Wtedy równanie propagacji fali pompującej odsprzęga się i możemy je rozwiązać "z góry"; ponadto równanie (2.15b) staje się liniowe. Dzięki temu zagadnienie ulega znakomitemu uproszczeniu, możemy bowiem, dla każdej długości wzmacniacza z, znaleźć funkcje Greena K_z i K'_z , zawierające pełną informację o wzmacniaczu i wyrazić przez nie pole wyjściowe:

$$A_s(z, \mathbf{r}_\perp, t) = \int dt' d^2 \mathbf{r}'_\perp K_z(\mathbf{r}_\perp, t, \mathbf{r}'_\perp, t') A_s(\mathbf{r}'_\perp, t') + K'_z(\mathbf{r}_\perp, t, \mathbf{r}'_\perp, t') A^*_s(\mathbf{r}'_\perp, t')$$
(2.17)

Funkcje greena K_z i K'_z są w rzeczywistych przypadkach regularne. Ich charakterystyczny obszar zmienności w funkcji argumentów jest związany z odwrotnością pasma spektralnego i kątowego przenoszenia wzmacniacza, które jest zawsze ograniczone. Dzięki temu możemy K_z i K'_z przybliżać macierzami i tak też myśleć o nich w przypadku wątpliwości natury matematycznej.

Czasem (w szczególności w obliczeniach numerycznych) wygodnie jest używać macierzowego przybliżenia K_z i K'_z w bazie $\langle 1, i \rangle$. Wówczas elementy tych macierzy przenoszą składowe rzeczywiste i zespolone wejściowej obwiedni na rzeczywiste i zespolone obwiedni wyjściowej:

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}(z) = \underbrace{\begin{bmatrix} \Re(K+K') & -\Im(K-K') \\ \Im(K+K') & \Re(K-K') \end{bmatrix}}_{\mathbf{S}} \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}(0)$$
(2.18)

gdzie wprowadziłem rzeczywistą kwadratową macierz **S**, zaś $q = \Re(A_s)$ a $p = \Im(A_s)$ (czyli w języku kwantowym kwadratury położeniowe i pędowe).

Dalsze, bardzo istotne, uproszczenie transformacji (2.18) (tym samym też i (2.17)) możemy uzyskać po dokonaniu rozkładu na wartości singularne (rozkładu Schmidta) macierzy **S**:

$$\mathbf{S} = \sum_{w} \left(\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)}\right) \begin{bmatrix} q_{\text{out}}(w) \\ p_{\text{out}}(w) \end{bmatrix} \cdot \left[q_{\text{in}}(w) \ p_{\text{in}}(w)\right]$$
(2.19)

Wartości osobliwe zostały zapisane w tak osobliwy sposób, bo R(w) okaże się średnią liczbą fotonów emitowanych w mod w (por. przypis 1 na stonie 12). Z ogólnych właściwości tego rozkładu (który można przeprowadzić dla dowolnej macierzy $m \times n$) wektory "in" są do siebie wzajemnie ortogonalne (podobnie wektory "out"):

$$q_{\rm in}(w) \cdot q_{\rm in}(w') + p_{\rm in}(w) \cdot p_{\rm in}(w') = \delta_{ww'}$$
(2.20)

Żądamy, żeby działanie macierzą **S** na wektor złożony z niezależnych operatorów położenia i sprzężonych z nimi operatorów pędu $[\hat{q}_1, \hat{q}_2, \ldots \hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots]$ (jak to będziemy robili po skwantowaniu problemu) produkowało analogiczny wektor złożony z operatorów które wciąż maja własności komutacyjne operatorów położenia i pędu (tj. $[\hat{p}_k, \hat{q}_l] = i\delta_{k,l}$). Klasycznie oznacza to żądanie, żeby pod działaniem transformacji (2.18) objętość przestrzeni fazowej nie uległa zmianie. Okazuje się, że jeżeli tak ma być, to macierz **S** musi być symplektyczna (definicja w dodatku A). Macierz **S** jest dodatkowo rzeczywista dzięki czemu okazuje się, że jeśli w jej rozkładzie singularnym pojawiła się wartość singularna σ z wektorami $[q_{\rm in}, p_{\rm in}]$ oraz $[q_{\rm out}, p_{\rm out}]$ to istnieje w nim także wartość singularna $1/\sigma$ z wektorami $[p_{\rm in}, -q_{\rm in}]$ oraz $[p_{\rm out}, -q_{\rm out}]$ (dowód w dodatku A.1)

Uporządkujmy wektory rozkładu (które dalej będziemy nazywać modami²) w taki sposób, żeby

$$R(1) \ge R(2) \ge R(3) \ge \dots \ge 1 \ge \dots \ge R(-2) \ge R(-1).$$
(2.22)

Wtedy z własności (2.21) rozkładu singularnego rzeczywistej macierzy symplektycznej wynikają dwa bardzo ważne wnioski. Po pierwsze — dla każdego członu o wartości własnej R(w) > 1 istnieje człon bliźniaczy o wartości własnej R(-w) < 1 a co więcej:

$$(\sqrt{1+R(w)} + \sqrt{R(w)})(\sqrt{1+R(-w)} + \sqrt{R(-w)}) = 1$$
(2.23)

Druga własność wypływa z dalszej analizy (2.21). Skonstruujmy wektory zespolone

$$u(w) = q_{\rm in}(w) + ip_{\rm in}(w)$$
 (2.24a)

$$v(w) = q_{\text{out}}(w) + ip_{\text{out}}(w). \qquad (2.24b)$$

Bliźniaczy wektor okazuje się być po prostu "obrócony" u(-w) = -iu(w). Przepisując wzór (2.20) dla wektorów u(w) (analogicznie będzie też dla wektorów v(w)) dostajemy następujące określenie ortogonalności:

$$u^{*}(w) \cdot u(w') + u(w) \cdot u^{*}(w') = 2\delta_{ww'}$$
(2.25)

Stosując ten wzór dla $w' \neq w$ i $w' \neq -w$ dostajemy że przy tych warunkach $u^*(w) \cdot u(w') = 0$. Rozważając dodatkowo przypadek w = -w' możemy dostać ogólne wyrażenie:

$$u^{*}(w) \cdot u(w') = \delta_{ww'} + i\delta_{w,-w'}$$
 dla $w > w'$ (2.26)

W szczególności wyciągając część zespoloną tego iloczynu skalarnego dochodzimy do wyrażenia, które za jakiś czas stanie się wartością ważnego komutatora:

$$p_{\rm in}(w) \cdot q_{\rm in}(w') - q_{\rm in}(w) \cdot p_{\rm in}(w') = \delta_{w,-w'} \qquad \text{dla } w > w'$$
(2.27)

i analogicznie dla wektorów wyjściowych.

Czytelnik może znaleźć dowód analogicznych właściwości wprost dla K i K' w pracy [51].

Powróćmy jeszcze do funkcji K i K' i napiszmy ich postać po rozkładzie singularnym:

$$K(\mathbf{r}_{\perp}, t, \mathbf{r}'_{\perp}, t') = \frac{1}{2} \sum_{w} \sqrt{1 + R(w)} v(w; \mathbf{r}_{\perp}, t) u^{*}(w; \mathbf{r}'_{\perp}, t')$$
(2.28a)

$$K'(\mathbf{r}_{\perp}, t, \mathbf{r}'_{\perp}, t') = \frac{1}{2} \sum_{w} \sqrt{R(w)} v(w; \mathbf{r}_{\perp}, t) u(w; \mathbf{r}'_{\perp}, t')$$
(2.28b)

podstawiając te funkcje do (2.17) oraz korzystając z (2.26) dostajemy wzór analogiczny do (2.13), który opisuje wzmacnianie jednego modu a osłabianie drugiego.

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} v^*(w) A_s(z) + v(w) A_s^*(z) = (\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)}) \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u^*(w) A_s(0) + u(w) A_s^*(0)$$
(2.29a)

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} v^*(w) A_s(z) - v(w) A_s^*(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)}} \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u^*(w) A_s(0) - u(w) A_s^*(0)$$
(2.29b)

 $^{^2}$ Macierz **S** jest kwadratowa i ma wszystkie elementy rzeczywiste, wobec czego wektory jej rozkładu na wartości singularne są rzeczywiste, tzn. mają sens jako składowe rzeczywista i urojona obwiedni.

Przypadek niezdegenerowany

Równania propagacji przyjmują postać [8, 50]:

$$\frac{\partial}{\partial z}A_p = \hat{L}_p A_p + \chi A_s A_i \tag{2.30a}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A_s = \hat{L}_s A_s + \chi A_p A_i^* \tag{2.30b}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}A_i = \hat{L}_i A_i + \chi A_p A_s^* \tag{2.30c}$$

gdzie \hat{L} są operatorami propagacji liniowej (2.16). Ponownie, możemy dla każdej długości wzmacniacza z, znaleźć funkcję przejścia K_z , zawierającą pełną informację o wzmacniaczu:

$$A_{s}(z, \mathbf{r}_{\perp}, t) = \int dt' d^{2} \mathbf{r}_{\perp}' K_{z}^{(1)}(\mathbf{r}_{\perp}, t, \mathbf{r}_{\perp}', t') A_{s}(\mathbf{r}_{\perp}', t') + K_{z}^{(2)}(\mathbf{r}_{\perp}, t, \mathbf{r}_{\perp}', t') A_{i}^{*}(\mathbf{r}_{\perp}', t')$$
(2.31a)

$$A_{i}(z, \mathbf{r}_{\perp}, t) = \int dt' d^{2} \mathbf{r}_{\perp}' K_{z}^{(3)}(\mathbf{r}_{\perp}, t, \mathbf{r}_{\perp}', t') A_{s}^{*}(\mathbf{r}_{\perp}', t') + K_{z}^{(4)}(\mathbf{r}_{\perp}, t, \mathbf{r}_{\perp}', t') A_{i}(\mathbf{r}_{\perp}', t')$$
(2.31b)

Sprzęgając równanie (2.31b) doprowadzamy (2.31) do postaci transformacji liniowej. Wtedy funkcję przejścia K_z możemy poddać procedurze rozkładu na wartości i wektory osobliwe, który prowadzi do przedstawienia jej w postaci:

$$\begin{bmatrix} K_z^{(1)} & K_z^{(2)} \\ K_z^{(3)*} & K_z^{(4)*} \end{bmatrix} = \sum_w (\sqrt{1+R(w)} + \sqrt{R(w)}) \begin{bmatrix} v_s(w) \\ v_i^*(w) \end{bmatrix} \cdot [u_s^*(w) \ u_i(w)]$$
(2.32)

gdzie wektory $v(\mathbf{r}_{\perp}, t)$ i $u(\mathbf{r}'_{\perp}, t')$ tworzą bazę ortonormalną w przestrzeni odpowiednio obwiedni wychodzących i wchodzących, przy czym iloczyn skalarny jest następujący:

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} \, u_s^*(w) u_s(w') + u_i(w) u_i^*(w') = \delta_{ww'} \tag{2.33}$$

Korzystając z tej własności możemy napisać wzór analogiczny do (2.10) (opisze ściskanie):

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} v_s^*(w) A_s(z) + v_i(w) A_i^*(z) = (\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)}) \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u_s^*(w) A_s(0) + u_i(w) A_i^*(0)$$
(2.34)

Znowu, umówimy się uporządkować mody sposób (2.22). Jeśli wziąć pod uwagę tylko dodatnie w to okazuje się (z unitarności transformacji (2.31), dowód w dodatku A.2, por. [51]), że:

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u_s^*(w) u_s(w') = \frac{1}{2} \delta_{ww'}$$
(2.35)

i podobnie dla v. Okazuje się ponownie, że mody wzmacnianie mają swoje tłumione odpowiedniki i zachodzą związki:

$$(\sqrt{1+R(w)} + \sqrt{R(w)})(\sqrt{1+R(-w)} + \sqrt{R(-w)}) = 1$$
(2.36a)

$$\begin{bmatrix} v_s \\ v_i \end{bmatrix} (-w) = i \begin{bmatrix} e^{i\phi(w)}v_s \\ e^{-i\phi(w)}v_i \end{bmatrix} (w)$$
(2.36b)

$$\begin{bmatrix} u_s \\ u_i \end{bmatrix} (-w) = i \begin{bmatrix} e^{i\phi(w)}u_s \\ e^{-i\phi(w)}u_i \end{bmatrix} (w)$$
(2.36c)

gdzie $\phi(w)$ jest fazą którą możemy wybrać dowolnie (nie zmieniając rozkładu (2.32)) i umówimy się tak zmodyfikować wektory rozkładu, żeby $\phi(w) = 0$. Związki te ilustrują czułość fazową wzmacniacza - wpuszczenie impulsów postaci $A_s = e^{i\phi}u_s(w)$, $A_i = e^{-i\phi}v_s(w)$ powoduje ich wzmocnienie zaś w postaci $A_s = e^{i\phi}u_s(w)$, $A_i = e^{\pi/2 - i\phi}v_s(w)$ - osłabienie (tj. energia w nich zawarta przejdzie do pompy), niezależnie od fazy ϕ (por. rozwiązania w pkt. 2.1.1 i rys. 2.2). Klasyczna interpretacja modów Znając rozkład (2.32) możemy przedstawić działanie wzmacniacza parametrycznego w wyjątkowo prosty sposób. Rozkładamy pole wchodzące w bazie modów $u_s(w), u_i(w)$ (indeksowanych przez w), dostając ich amplitudy:

$$\alpha(w) = \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} \, u_s^*(w) A_s + u_i(w) A_i^* \,. \tag{2.37}$$

Każdą amplitudę mnożymy przez wzmocnienie (napięciowe) dla odpowiedniego modu ($\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)}$) otrzymując amplitudy (innych!) modów na wyjściu $\beta(w) = (\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)})\alpha(w)$, z których możemy złożyć pole wyjściowe:

$$A_{s} = \sum_{w} \beta(w) v_{s}(w)$$

$$A_{i} = \sum_{w} \beta(w) v_{i}^{*}(w)$$
(2.38)

Wyraża to również wzór (2.34) jeśli wiadomo (2.35).

2.2 Kwantowanie wzmacniacza parametrycznego

Zanim przejdziemy do kwantowania rzeczywistego wzmacniacza parametrycznego, rozważymy wyidealizowany prosty przypadek

Šciskanie jednej pary modów jest kwantowym analogiem problemu który rozważałem w punkcie 2.1.1. Przejście do przypadku kwantowego jest proste i sprowadza się do formalnego podstawienia zamiast amplitud pola operatorów: $A_s \to \hat{a}, A_s^* \to \hat{a}^{\dagger}, A_i \to \hat{b}, A_i^* \to \hat{b}^{\dagger}$. Możemy w ten sposób przepisać równanie (2.10):

$$\underbrace{v^* \hat{a}(z) + v \hat{b}^{\dagger}(z)}_{\sqrt{2} \hat{Y}_1} = (\sqrt{1+R} + \sqrt{R}) \underbrace{\left(u^* \hat{a}(0) + u \hat{b}^{\dagger}(0)\right)}_{\sqrt{2} \hat{Y}_1}$$
(2.39a)

$$\underbrace{v^*\hat{a}(z) - v\hat{b}^{\dagger}(z)}_{i\sqrt{2}\hat{Y}_2^{\dagger}} = (\sqrt{1+R} - \sqrt{R}) \underbrace{\left(u^*\hat{a}(0) - u\hat{b}^{\dagger}(0)\right)}_{i\sqrt{2}\hat{X}_2^{\dagger}}$$
(2.39b)

gdzie $u = \exp(-i\phi/2), v = \exp(-i\Delta kz/2 + i\phi/2), zaś R$ jest rzeczywiste (oznaczenia ze wzoru (2.10)). Równanie to ilustruje ściskanie kwadratury (w uogólnionym sensie, nie są to operatory hermitowskie) \hat{X}_2 (kwadratury pędowej) i rozciąganie \hat{X}_1 (kwadratury położeniowej), przy czym jednocześnie ulegają one obrotowi i przechodzą w \hat{Y} . Komutatory są następujące:

$$[\hat{X}_1, \hat{X}_1^{\dagger}] = 0 \qquad [\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i \qquad [\hat{X}_1, \hat{X}_2^{\dagger}] = 0 \qquad (2.40)$$

i identycznie dla \hat{Y} .

Ściskanie jednego modu czyli przypadek zdegenerowany kwantuje się równie prosto. Z równania (2.13) dostajemy:

$$\underbrace{v^* \hat{a}(z) + v \hat{a}^{\dagger}(z)}_{\sqrt{2}\hat{Y}_1} = (\sqrt{1+R} + \sqrt{R}) \underbrace{\left(u^* \hat{a}(0) + u \hat{a}^{\dagger}(0)\right)}_{\sqrt{2}\hat{X}_1}$$
(2.41a)

$$\underbrace{v^* \hat{a}(z) - v \hat{a}^{\dagger}(z)}_{i\sqrt{2}\hat{Y}_2^{\dagger}} = (\sqrt{1+R} - \sqrt{R}) \underbrace{\left(u^* \hat{a}(0) - u \hat{a}^{\dagger}(0)\right)}_{i\sqrt{2}\hat{X}_2^{\dagger}}$$
(2.41b)

gdzie $u = \exp(-i\phi/2), v = \exp(-i\Delta kz/2 + i\phi/2)$ (oznaczenia ze wzoru (2.13)). Tym razem \hat{X} i \hat{Y} to po prostu kwadratury pola, operatory hermitowskie, zaś równanie przedstawia ich ściskanie. Jeden tylko komutator jest nietrywialny i zarazem niezerowy: $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i$.

Ściskanie wielu modów Aby skwantować pełny wzmacniacz parametryczny znowu wystarcza formalne podstawienie. Operatory kreacji i anihilacji ewoluują zgodnie z równaniami analogicznymi do równań (2.15a)-(2.30c) opisujących propagację klasycznych obwiedni³. Poniżej przepiszemy do postaci kwantowej równanie (2.34) opisujące ściskanie:

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} v_s^*(w) \hat{a}_s(z) + v_i(w) \hat{a}_i^{\dagger}(z) = (\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)}) \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u_s^*(w) \hat{a}_s(0) + u_i(w) \hat{a}_i^{\dagger}(0)$$
(2.42a)

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} v_s^*(w) \hat{a}_s(z) - v_i(w) \hat{a}_i^{\dagger}(z) = (\sqrt{1 + R(w)} - \sqrt{R(w)}) \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u_s^*(w) \hat{a}_s(0) - u_i(w) \hat{a}_i^{\dagger}(0)$$
(2.42b)

Gdzie drugie równanie jest pierwszym z w zamienionym na -w a następnie zastosowanymi związkami parowania modów (2.36). Analogicznie do przypadku ściskania jednej pary wprowadzamy kwadratury opisane operatorami:

$$\hat{X}_{out}(w) = \int d^2 r_{\perp} dt \, v_s^*(w; r_{\perp}, t) \hat{a}_s(z, r_{\perp}, t) + v_i(w; r_{\perp}, t) \hat{a}_i^{\dagger}(z, r_{\perp}, t)$$
(2.43a)

$$\hat{X}_{in}(w) = \int d^2 r_{\perp} dt \, u_s^*(w; r_{\perp}, t) \hat{a}_s(r_{\perp}, t) + u_i(w; r_{\perp}, t) \hat{a}_s^{\dagger}(r_{\perp}, t)$$
(2.43b)

sprowadzając działanie wzmacniacza parametrycznego do ściskania kwadratur indeksowanych przez w:

$$X_{out}(w) = (\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)})X_{in}(w)$$
(2.44a)

$$X_{out}(-w) = (\sqrt{1 + R(w)} - \sqrt{R(w)})X_{in}(-w)$$
(2.44b)

Pozostaje nam pokazać niezależności tych kwadratur. Sprawdzamy zatem komutatory:

$$[X_{in}(w), X_{in}(w')] = 0 \tag{2.45a}$$

$$[X_{in}(w), X_{in}(w')^{\dagger}] = \int d^2 r_{\perp} dt \, u_s^*(w; r_{\perp}, t) u_s(w'; r_{\perp}, t) - u_i^*(w; r_{\perp}, t) u_i(w'; r_{\perp}, t) = i\delta_{w, -w'} \quad (2.45b)$$

gdzie ostatnią równość dostałem przy użyciu właściwości (2.35) oraz (2.36), pod warunkiem że w > 0 > w'.

Powyższy rezultat jest głównym wynikiem niniejszej pracy. Oznacza on, że rzeczywisty wzmacniacz parametryczny, co do którego można by sądzić iż jest skomplikowanym urządzeniem mieszającym wszystkie fotony ze wszystkimi, w rzeczywistości składa się z *niezależnych* wzmacniaczy ściskających mody, co schematycznie przedstawiam na rysunku 2.4).

Przypadek zdegenerowany

Przepisujemy (2.29):

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} v^*(w) \hat{a}(z) + v(w) \hat{a}^{\dagger}(z) = (\sqrt{1 + R(w)} + \sqrt{R(w)}) \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u^*(w) \hat{a}(0) + u(w) \hat{a}^{\dagger}(0) \quad (2.46a)$$

$$\int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} v^*(w) \hat{a}(z) - v(w) \hat{a}^{\dagger}(z) = (\sqrt{1 + R(w)} - \sqrt{R(w)}) \int dt d^2 \mathbf{r}_{\perp} u^*(w) \hat{a}(0) - u(w) \hat{a}^{\dagger}(0) \quad (2.46b)$$

 $^{^3}$ O ile tylko pominąć w przybliżeniu stały czynnik występujący w rozwinięciu modowym operatora pola, mówiący o natężeniu pola elektrycznego pochodzącego od jednego fotonu. Alternatywnie, można wprowadzić zależność sprzężenia nieliniowego χ od częstości która ów czynnik skasuje. Oznacza to przyjęcie przyblizenia, że rozpad dowolnego fotonu na dowolne dwa o niższych częstościach jest tak samo prawdopodobny niezależnie od tych częstości.



Rysunek 2.4: Rzeczywisty wzmacniacz parametryczny można przedstawić jako złożenie pasywnego urządzenia optycznego transformującego mody wejściowe \hat{a}_{in} na ich kombinacje \hat{b}_{in} , wzmacniaczy które ściskają niezależnie każdy mod \hat{b} i wyjściowego pasywnego "miksera" transformującego mody wejściowe \hat{b}_{out} na ich kombinacje \hat{a}_{out} .

identyfikujemy kwadratury (operatory hermitowskie w tym przypadku):

$$\hat{X}_{out}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^2 r_{\perp} dt \, v^*(w; r_{\perp}, t) \hat{a}(z, r_{\perp}, t) + v(w; r_{\perp}, t) \hat{a}^{\dagger}(z, r_{\perp}, t)$$
(2.47a)

$$\hat{X}_{in}(w) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int d^2 r_{\perp} dt \, u^*(w; r_{\perp}, t) \hat{a}(r_{\perp}, t) + u(w; r_{\perp}, t) \hat{a}^{\dagger}(r_{\perp}, t)$$
(2.47b)

i sprawdzamy komutatory, używajac związków (2.27) oraz (2.23):

$$[X_{in}(w), X_{in}(w')] = i\delta_{w, -w'}$$
(2.48)

ponownie, okazuje się, że wzmacniacz składa się z niezależnych wzmacniaczy ściskających mody.

2.3 Korelacje

Transformacja (2.31) czy też (2.17) pozwala na obliczenie rozmaitych średnich. Korelacja pola, czy też jednocząstkowa macierz gęstości, określająca widzialność interferencji pomiędzy falą o parametrach $(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)$ oraz $(\mathbf{k}'_{\perp}, \omega')$ (patrz rys. 2.5) wyraża się (w przypadku zdegenerowanym) całką:

$$G^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp},\omega,\mathbf{k}_{\perp}',\omega') = \left\langle \hat{a}_{s}^{\dagger}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}_{s}(z,\mathbf{k}_{\perp}',\omega')\right\rangle$$
$$= \int d^{2}\mathbf{k}_{\perp}'' d\omega'' K_{z}'^{*}(\mathbf{k}_{\perp},\omega,\mathbf{k}_{\perp}'',\omega'')K_{z}'(\mathbf{k}_{\perp}',\omega',\mathbf{k}_{\perp}'',\omega'')$$
(2.49a)

$$= \sum_{w>0} 2R(w) \ v^*(w; \mathbf{k}_\perp, \omega) v(w; \mathbf{k}'_\perp, \omega') \,. \tag{2.49b}$$

Jak widać, korelacja jednocząstkowa ma rozkład spektralny którego mody są identyczne z modami wyjściowymi rozkładu na wartości osobliwe funkcji K. Warto zauważyć, że średnia liczba fotonów o zadanej częstości emitowanych w zadanym kierunku wynosi $G^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega, \mathbf{k}_{\perp}, \omega)$.

$$G_{ss}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp},\omega,\mathbf{k}_{\perp}',\omega') = \left\langle \hat{a}_{s}^{\dagger}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}_{s}(z,\mathbf{k}_{\perp}',\omega')\right\rangle$$
(2.50a)

$$G_{ii}^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp},\omega,\mathbf{k}_{\perp}',\omega') = \left\langle \hat{a}_{i}^{\dagger}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}_{i}(z,\mathbf{k}_{\perp}',\omega')\right\rangle$$
(2.50b)

W przypadku niezdegenerowanym mamy dwie korelacje pola — osobno dla fali sygnałowej i biernej (korelacja miedzy nimi wynosi zero, a to dlatego, że różnica faz fotonów w parze jest nieustalona, stąd żadnych "klasycznych" prążków interferencyjnych nie zaobserwujemy)

Okaże się, że wszystkie wyższe funkcje korelacji wyrażą się przez $G^{(1)}$ oraz tzw. anomalną funkcję gęstości, która odgrywa od lat dużą rolę w opisie nadprzewodnictwa [52]. W przypadku zdegenerowa-



Rysunek 2.5: Modelowy układ doświadczalny do pomiaru widzialności interferencji $G^{(1)}$. Impuls pompujący P pada na kryształ X, z którego wydobywa się stożek spontanicznego promieniowania. Ze stożka tego wybieramy przysłonami A i filtrami F dwie pary fal, $(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)$ oraz $(\mathbf{k}'_{\perp}, \omega')$, które następnie interferujemy na beamspliterze BS. W przypadku wykorzystania wolnych detektorów konieczne jest zrównanie częstości obu fal poprzez przesunięcie przynajmniej jednej z nich za pomocą elementu FS, który można by zrealizować jako sumowanie częstości w krysztale nieliniowym. Na końcu rejestrujemy prążki interferencyjne, (na detektorze D *lub* D') w funkcji opóźnienia zmienianego np. poprzez poruszanie jednym z luster i wyznaczamy widzialność.

nym:

$$\left\langle \hat{a}_s(z, \mathbf{k}_\perp, \omega) \hat{a}_s(z, \mathbf{k}'_\perp, \omega') \right\rangle = \int d^2 \mathbf{k}''_\perp d\omega'' K_z(\mathbf{k}_\perp, \omega, \mathbf{k}''_\perp, \omega'') K'_z(\mathbf{k}'_\perp, \omega', \mathbf{k}''_\perp, \omega'')$$
(2.51a)

$$= \sum_{w>0} 2\sqrt{R(w)}\sqrt{1+R(w)} v(w;\mathbf{k}_{\perp},\omega)v(w;\mathbf{k}_{\perp}',\omega').$$
(2.51b)

W przypadku niezdegenerowanym mamy jedną gęstość anomalną $\langle \hat{a}_s(z, \mathbf{k}_{\perp}, \omega) \hat{a}_i(z, \mathbf{k}'_{\perp}, \omega') \rangle$, pomiędzy falą sygnałową a jałową. Bierze się to z faktu, że gęstość anomalna to "gęstość" par.

Pomiar widzialności jest wyzwaniem samym w sobie i dlatego dalej przeanalizujmy korelacje natężeniowe. Korelacje takie można zmierzyć, np. w układzie naszkicowanym na rysunku 3.1 (patrz też część 3). Wynikiem pomiaru jest funkcja:

$$G^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp},\omega,\mathbf{k}'_{\perp},\omega') = \left\langle : I_{s}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)I_{s}(z,\mathbf{k}'_{\perp},\omega'):\right\rangle - \left\langle I_{s}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)I_{s}(z,\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\right\rangle$$
$$= \left\langle \hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\hat{a}(z,\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\hat{a}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\right\rangle$$
$$- \left\langle \hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\right\rangle \left\langle \hat{a}^{\dagger}(\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\hat{a}(z,\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\right\rangle$$
$$= \left| \left\langle \hat{a}^{\dagger}_{s}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}_{s}(z,\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\right\rangle \right|^{2} + \left| \left\langle \hat{a}_{s}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}_{s}(z,\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\right\rangle \right|^{2}$$
$$= \left| G^{(1)}(\mathbf{k}_{\perp},\omega,\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\right|^{2} + \left| \left\langle \hat{a}_{s}(z,\mathbf{k}_{\perp},\omega)\hat{a}_{s}(z,\mathbf{k}'_{\perp},\omega')\right\rangle \right|^{2}$$
(2.52)

Jak widać z powyższego wzoru wynik takiego pomiaru, w przypadku, kiedy jednocząstkowa korelacja oraz gęstość anomalna są odseparowanie, może posłużyć do rekonstrukcji modułu funkcji korelacji. Przy założeniu, że funkcja ta jest rzeczywista, co jak zobaczymy (2.67) ma w przypadku słabego wzmocnienia miejsce jeśli tylko impulsy pompujące są fourierowsko ograniczone i tworzą wiązkę o przewężeniu w środku kryształu, możemy również odtworzyć mody v rozkładu spektralnego funkcji korelacji, a zarazem mody wyjściowe wzmacniacza.

Jeszcze prościej a zarazem dla całego wychodzącego promieniowania, możemy zmierzyć korelacje natężeniowe skumulowane po częstościach — np. w układzie przedstawionym na rys. 2.7.

Wynikiem pomiaru jest funkcja:

$$G_{\langle\rangle}^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp},\mathbf{k}_{\perp}') = \int d\omega d\omega' G^{(2)}(\mathbf{k}_{\perp},\omega,\mathbf{k}_{\perp}',\omega')$$
(2.53)



Rysunek 2.6: Układ doświadczalny do pomiaru korelacji nateżeniowych $G^{(2)}$. Impuls pompujący P pada na kryształ X, z którego wydobywa się stożek spontanicznego promieniowania. Ze stożka tego wybieramy szczeliną spektrometru obrazującego Sp światło wychodzące w ustalony kąt ϕ i rozdzielamy je po częstościach. Rozkład natężenia w płaszczyźnie obrazowej spektrometu rejestrujemy kamerą CCD.



Rysunek 2.7: Prosty układ doświadczalny do pomiaru korelacji nateżeniowych $G^{(2)}$ skumulowanych po częstościach. Impuls pompujący P pada na kryształ X, z którego wydobywa się stożek spontanicznego promieniowania. Ze stożka tego wybieramy przysłonami A dwa przeciwległe obszary (tak aby sztucznie rozdzielić światło na część "sygnałową" i "jałową", oczywiście kosztem strat natężenia), które następnie obrazowane są za pomocą soczewek L na kamerę CCD. Soczewki są tak ustawione, aby na kamerze obserwować rozkład natężenia w dalekim polu bądź w płaszczyźnie wyjściowej kryształu.

2.4 Przybliżenie jednej pary wąskopasmowych fotonów

Poniżej pokażę jak rozwiązać zagadnienie znalezienia funkcji przenoszenia K oraz obliczę funkcje korelacji. Założę, że w procesie fluorescencji parametrycznej powstaje w jednym modzie co najwyżej jedna para fotonów, a co więcej ich widmo jest ograniczone. Dzięki tym przybliżeniom będę mógł podać najistotniejsze i najprostsze charakterystyki funkcji korelacji, to znaczy ich szerokości i eliptyczność, jeśli przybliżyć te funkcje funkcjami gaussowskimi.

2.4.1 Pierwszy rząd rozwinięcia w sile nieliniowości

Jeśli natężenie wiązki pompującej jest niewielkie, takie mianowicie że w każdą parę modów emitowana jest co najwyżej jedna para fotonów, to sensowne jest odcałkowanie równań propagacji (2.30b) i (2.30c). Szczególnie wygodnie dokonać tego w obrazie oddziaływania, rugując z równań propagację liniową poprzez podstawienie za obwiednie:

$$A_p(z) = \exp\left(i\hat{L}_p z\right) A_p(z=0) = \mathcal{L}_p(z)A_p(z=0)$$
(2.54a)

$$A_s(z) = \exp\left(i\hat{L}_s z\right) A_{s,0}(z) = \mathcal{L}_s(z)A_{s,0}(z)$$
(2.54b)

$$A_i(z) = \exp\left(i\hat{L}_i z\right) A_{i,0}(z) = \mathcal{L}_i(z)A_{i,0}(z)$$
(2.54c)

gdzie wprowadziłem operatory propagacji liniowej \mathcal{L} .

Dokonując formalnego całkowania równań (2.30b) i (2.30c) oraz podstawiając (2.54b) i (2.54c) dostajemy:

$$A_{s,0}(z) = A_{s,0}(0) + \chi \int dz \mathcal{L}_s(-z) [A_p(z)(\mathcal{L}_i(z)A_{i,0}(z))^*]$$
(2.55a)

$$A_{i,0}(z) = A_{i,0}(0) + \chi \int dz \mathcal{L}_i(-z) [A_p(z)(\mathcal{L}_s(z)A_{s,0}(z))^*]$$
(2.55b)

Równania te moglibyśmy iterować podstawiając zamiast $A_{i,0}(z)$ oraz $A_{s,0}(z)$ pod całkami prawe strony tych równań, niemniej jednak żeby uzyskać wynik 1. rzędu w χ wystarczy podstawić $A_{i,0}(z) = A_{i,0}(0)$ i $A_{s,0}(z) = A_{s,0}(0)$. Wzory (2.55) nabierają wówczas szczególnie prostej do interpretacji postaci okazuje się, że obwiednia fali wychodzącej powstaje poprzez zsumowanie przyczynków powstających w drodze nieliniowego oddziaływania fali wchodzącej z falą pompującą a przyczynki trzeba zsumować z całej grubości kryształu.

W ten sposób możemy dostać funkcje K, która szczególnie prosto wyraża się w przestrzeni fal monochromatycznych płaskich, jako że w tej przestrzeni szczególnie prosto wyrażają się operatory propagacji \mathcal{L} . Dokonując odpowiednich transformacji otrzymujemy, wybierając całkowanie po z od -L/2 do L/2 (por. rys. 2.8):

$$K_L^{(2)}(k_{s,\perp},\omega_s,k_{i,\perp},\omega_i) = \chi \widetilde{A}_p(k_{s,\perp}+k_{i,\perp},\omega_s+\omega_i)\frac{\sin(\Delta kL/2)}{L/2}$$
(2.56a)

$$K_L^{(3)}(k_{i,\perp},\omega_i,k_{s,\perp},\omega_s) = \chi \widetilde{A}_p(k_{s,\perp}+k_{i,\perp},\omega_s+\omega_i)\frac{\sin(\Delta kL/2)}{L/2}$$
(2.56b)

gdzie

$$\Delta k = k_{s,z}(k_{s,\perp},\omega_s) + k_{i,z}(k_{i,\perp},\omega_i) - k_{p,z}(k_{s,\perp} + k_{i,\perp},\omega_s + \omega_i)$$
(2.57)

jest niedopasowaniem fazowym, zaś $K^{(1)}$ oraz $K^{(4)}$ są operatorami jednostkowymi⁴.

 4 Operatory $K^{(2)}$ i $K^{(3)}$ są w przypadku generacji pojedynczych par po prostu funkcjami falowymi pary fotonów. Bowiem w tym przybliżeniu funkcja falowa

$$\Psi(x,x') = \langle 1_x, 1_{x'} | out \rangle = \langle 0 | \hat{a}_x^{(S)} \hat{a}_{x'}^{(S)} \hat{U} | 0 \rangle \simeq \langle 0 | \hat{U}^{\dagger} \hat{a}_x^{(S)} \hat{a}_{x'}^{(S)} \hat{U} | 0 \rangle = \left\langle \hat{a}_x^{(H)} \hat{a}_{x'}^{(H)} \right\rangle = K^{(2)}(x,x') = K^{(3)}(x',x) \quad (2.58)$$

gdzie x to symbolicznie współrzędne (wektor falowy/położenie i czas/częstość), górne indeksy (H) i (S) oznaczają obraz Heisenberga i Schrödingera, \hat{U} jest operatorem ewolucji, zaś równość przybliżona jest dokładnie spełniona w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń, o którym tu mówimy

Fakt ten oraz ich rozkład singularny i jego znaczenie podano w pracy [53].



Rysunek 2.8: Elementarny proces zachodzący we wzmacniaczu parametrycznym. Foton pompy rozpada się na foton sygnałowy i bierny, przy czym zachowana jest energia oraz poprzeczna składowa wektora falowego. Określa to niedopasowanie fazowe $\Delta k_z = k_{p,z} - k_{s,z} - k_{i,z}$ i tym samym amplitudę takiego elementarego procesu która skaluje się jak $\sin(\Delta k_z L/2)/\Delta k_z$.

Przypadek zdegenerowany

Tym razem K jest operatorem jednostkowym, zas^5

$$K'_{L}(k_{s,\perp},\omega_{s},k_{i,\perp},\omega_{i}) = \chi \widetilde{A}_{p}(k_{s,\perp}+k_{i,\perp},\omega_{s}+\omega_{i})\frac{\sin(\Delta kL/2)}{L/2}$$
(2.59)

W tym przypadku operatory K i K' są symetryczne, wobec tego rozkład na wartości singularne jest tym samym co rozkład spektralny.

2.4.2 Gausowskie przybliżenie dopasowania fazowego

Rozwijając niedopasowanie fazowe (2.57) w szereg wokół punktu ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0, k_{\perp,s}^2 = k_{\perp,i}^2 = \omega_0/c \sin(\alpha_0)$) i poprzestając na drugim rzędzie rozwinięcia dostajemy:

$$\Delta k \simeq \vec{b} \cdot \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \kappa_s & \kappa_i \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} \begin{bmatrix} \kappa_s \\ \kappa_i \end{bmatrix}$$
(2.60)

Gdzie $\kappa_i = [\omega_i - \omega_0, k_i - \omega_0/c \sin \alpha_0]$. Wektor \vec{b} zawiera w sobie liniowe wyrazy rozwinięcia (różnice prędkości grupowych, kąt propagacji wiązek sygnałowej i biernej), zaś macierz \mathbf{A} — kwadratowe (dyspersje prędkości grupowych, dyfrakcje). W rozwinięciu tym nie uwzględniam zależności od kierunku \mathbf{k}_{\perp} , która pojawia się jedynie ze względu na walk-off wiązki pompującej. Jest to równoważne założeniu, że kąt walk-off 'u jest dużo mniejszy od kąta propagacji wiązek sygnałowej i biernej, dodatkowo będę zakładał że grubość kryształu jest dużo mniejsza od zasięgu Raileigha wiązki pompującej, co pozwoli mi pominąć wyrazy odpowiedzialne za jej dyfrakcję.

Dopasowanie fazowe w tym przybliżeniu okazuje się funkcja 4 zmiennych - dwóch częstości oraz długości prostopadłych składowych wektorów falowych. Warunek, żeby wyrazy liniowe w tych zmiennych $(\vec{b} \cdot \vec{\kappa})$ zsumowały się do 0 daje nam jedno równanie i tym samym określa trójwymiarową podprzestrzeń (prostopadłą do \vec{b}) w której w pierwszym rzędzie dopasowanie jest idealne. Diagonalizując w niej formę kwadratową określoną przez macierz **A** znajdziemy trzy kierunki wzdłuż których niedopasowanie narasta powoli oraz możemy wprowadzić czwarty, prostopadły (równoległy do \vec{b}), wzdłuż którego niedopasowanie zmienia się najszybciej. Dalej budujemy macierz M, której wektory własne odpowiadają tym kierunkom, zaś wartości własne są tak dobrane, żeby w tych kierunkach słuszne było przybliżenie (patrz rys. 2.9)

$$\frac{\sin(\Delta k L/2)}{\Delta k L/2} \simeq \exp\left(\left\langle \binom{\kappa_s}{\kappa_i} \middle| \mathcal{M} \middle| \binom{\kappa_s}{\kappa_i} \right\rangle\right)$$
(2.61)

Porównanie prawej i lewej strony powyższego wzoru przedstawia rys. 2.10. Okazuje się, że w całej



Rysunek 2.9: Porównanie funkcji $(\sin(x)/x)^2$ (linia ciągła) oraz $\exp(-x^2/5)^2$ (linia przerywana) i funkcji $(\sin(x^2)/x^2)^2$ (linia ciągła) oraz $\exp(-x^2/3)^2$ (linia przerywana)

 $^{^{5}}$ indeksy s i *i* zachowałem jedynie aby nie zmieniać notacji. W rzeczywistości nie są to fale sygnałowe i bierne, a jedynie 1. i 2. składowa jedynej fali wzmacnianej.



Rysunek 2.10: Porównanie rzeczywistej powierzchni dopasowania fazowego (siodło i stożki) z przybiliżeniem gaussowskim (kula). Na wykresach narysowania jest powierzchnia, która po pogrubieniu określiłaby obszar dopasowania fazowego. Przybliżamy ten obszar kulą. Na rysunku po lewej stronie osiami są: kierunek w którym dopsawanie fazowe jest łamane już w pierwszym rzędzie (a[4]) oraz dwa kierunki diagonalizujące formę kwadratową zbudowaną z drugiego rzędu rozwinięcia Δk_z , a po prawej stronie trzy kierunki główne formy kwadratowej.

przestrzeni przybliżenie to jest umiarkowane, ponieważ macierz **A** nie jest ani dodatnio, ani ujemnie określona. Wyniki otrzymane przy użyciu tego przybliżenia należy traktować ostrożnie; tak długo jednak jak zakres częstości mierzonego promieniowania nie jest zbyt duży, przybliżenie gaussowskie jest spełnione.

Ostatecznym celem tych przybliżeń jest przedstawienie funkcji K' w postaci:

$$K_L'(\kappa_s, \kappa_o) = \chi \widetilde{A}_p(\kappa_s + \kappa_o) \exp\left(\left\langle \begin{pmatrix} \kappa_s \\ \kappa_i \end{pmatrix} \mathbf{M} \middle| \begin{matrix} \kappa_s \\ \kappa_i \end{pmatrix} \right\rangle\right)$$
(2.62)

które wykorzystam dalej do analitycznego znalezienia funkcji korelacji i modów własnych wzmacniacza parametrycznego w wyidealizowanym przypadku. Przykład całej procedury w przypadku kryształu BBO I typu podałem w dodatku B.

2.4.3 Przypadek pompowania koherentnym, ultrakrótkim impulsem

Wykorzystując gausowskie przybliżenie dopasowania fazowego oraz zakładając, że impuls pompujący ma postać gausowską:

$$A_p(x, y, z = 0, t) = \frac{2}{w} \sqrt{\frac{2}{\tau}} \left(\frac{\ln 2}{\pi}\right)^{3/4} \exp\left(-2\ln 2\left(\frac{t^2}{\tau^2} + \frac{x^2 + y^2}{w^2}\right)\right)$$
(2.63)

$$\tilde{A}_{p}(\mathbf{k}_{\perp}, z = 0, \omega) = w^{2} \tau \left(\frac{\pi}{2\ln 2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{1}{8\ln 2} \left(\omega^{2} \tau^{2} + \mathbf{k}_{\perp}^{2} w^{2}\right)\right)$$
(2.64)

oraz rozwijając $k_{\perp}^2 = k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2 \cos \Delta \phi$ gdzie $\Delta \phi = \phi_1 - \phi_2 - \pi$ w szereg:

$$k_{\perp}^{2} \simeq \Delta^{-} k^{2} + k_{z,o,0}^{2} \Delta \phi^{2}$$
(2.65)

dostajemy, że funkcja K' ma postać gausowską (por. (2.62)).

2.4.4 Korelacje przy słabym pompowaniu

Korzystając z powyższego możemy obliczyć funkcje korelacji. Prościej wyrazi się anomalna funkcja gęstości (por. (2.58)), w przypadku zdegenerowanym:

$$\left\langle \hat{a}_s(z, \mathbf{k}_\perp, \omega) \hat{a}_s(z, \mathbf{k}'_\perp, \omega') \right\rangle = K'_L(\mathbf{k}'_\perp, \omega', \mathbf{k}_\perp, \omega)$$
(2.66)



Rysunek 2.11: Dwuwymiarowa funkcja gausowska jest w pełni scharakteryzowana przez podanie szerokości rozkładów $\sqrt{\langle \Delta k^2 \rangle}$ i $\sqrt{\langle \Delta \omega^2 \rangle}$ oraz stopnia korelacji pomiędzy zmiennymi (kowariancji), który dla wygody weźmiemy równy sin ψ .

Zaś $G^{(1)}$ okazuje się być postaci:

$$G^{(1)}(k,\omega,\phi,k',\omega',\phi') = \chi^2 A_0^2 w^4 \tau^2 \left(\frac{\pi}{2\ln 2}\right)^3 G_{\phi}^{(1)}(\phi-\phi') G_+^{(1)} \left(\frac{k+k'}{2},\frac{\omega+\omega'}{2}\right) G_-^{(1)} \left(\frac{k-k'}{2},\frac{\omega-\omega'}{2}\right)$$
(2.67)

gdzie

$$G_{\phi}^{(1)}(\phi - \phi') = \frac{2\sqrt{\pi \ln 2} \, k_{z,o,0}}{w} \cdot \exp\left(-\frac{w^2}{16 \ln 2} k_{z,o,0}^2 (\phi - \phi')^2\right) \tag{2.68}$$

zaś $G_{+}^{(1)}$ i $G_{-}^{(1)}$ to dwuwymiarowe funkcjie gausowskie od swoich argumentów (patrz rys. 2.11). Taka postać funkcji korelacji pola daje nam bardzo proste wyrażenie na natężenie fluorescencji:

$$I(k,\omega,\phi) = I_0 G_+^{(1)}(k,\omega)$$
(2.69)

gdzie I_0 jest stałą. Wyrażenie to pokazuje gdzie załamuje się przybliżenie wąskopasmowe. Zgodnie z nim fluorescencja parametryczna ma niezerowe natężenie jedynie w wąskim obszarze spektralnym wokół (dowolnie wybranej) częstości centralnej rozwinięcia dopasowania fazowego (2.60). W rzeczywistości (por. rys. 3.8 na str. 41) fluorescencja rozciąga się na obszar spektralny o szerokości rzędu 200nm. Niewątpliwie zastosowane przybliżenie wąskopasmowe nie może dobrze przewidywać fluorescencji w tak szerokim paśmie. Niemniej jednak spodziewamy się, że dla częstości wokół której dokonano rozwinięcia dopasowania fazowego, wzór (2.69) może odtwarzać rzeczywistą szerokość kątową fluorescencji, którą zdefiniujemy jako wariancję rozkładu dla częstości rozwinięcia:

$$\Delta \alpha_I = \frac{c}{\omega_0} \sqrt{\frac{\int dk G_+^{(1)}(k,\omega_0)k^2}{\int dk G_+^{(1)}(k,\omega_0)}}$$
(2.70)

Z równania (2.67) chcę obliczyć jeszcze rozmiar korelacji natężeniowych, celem porównania z eksperymentem. Wielkością mierzoną będzie kowariancja natężeń pomiędzy ustalonym punktem, a jego sąsiedztwem (ponieważ w wykorzystanym układzie eksperymentalnym dostępny jest jedynie jeden kąt ϕ to dla uproszczenia pomijam zależność od tego kąta):

$$g_{2}(\Delta k, \Delta \omega; k, \omega) = \frac{\langle I(k, \omega)I(k + \Delta k, \omega + \Delta \omega) \rangle - \langle I(k, \omega) \rangle \langle I(k + \Delta k, \omega + \Delta \omega) \rangle}{\sqrt{\langle I(k, \omega)^{2} \rangle - \langle I(k, \omega) \rangle^{2}} \sqrt{\langle I^{2}(k + \Delta k, \omega + \Delta \omega) \rangle - \langle I(k + \Delta k, \omega + \Delta \omega) \rangle^{2}}} = \frac{|G^{(1)}(k, \omega, k + \Delta k, \omega + \Delta k, \omega + \Delta \omega)|^{2}}{|G^{(1)}(k, \omega, k, \omega)G^{(1)}(k + \Delta k, \omega + \Delta \omega, k + \Delta k, \omega + \Delta \omega)|}$$
(2.71)

gdzie ostatnia równość zachodzi pod warunkiem, że Δk i $\Delta \omega$ są małe, tak żeby nie badać korelacji pomiędzy wiązkami sprzężonymi, która pochodzi od zaniedbanego powyżej członu gęstości anomalnej z równania (2.52). Dalej przechodzimy do zmiennych "eksperymentalnych" t.j. długości fali i kąta obserwacji, podstawiając:

$$\Delta k \simeq \frac{\omega}{c} \Delta \alpha + \frac{\alpha}{c} \Delta \omega \tag{2.72}$$

$$\Delta \omega \simeq \frac{\omega}{\lambda} \Delta \lambda \tag{2.73}$$

Interpretując kowariancję natężeń jako łączny rozkład prawdopodobieństwa zmiennych $\Delta \alpha$ i $\Delta \lambda$ i traktując k (lub α) i ω (lub λ) jako parametry sprowadzamy g_2 do postaci (por. rys. 2.11):

$$g_2(\Delta\lambda,\Delta\alpha) = \exp\left(-\frac{1}{2(1-C^2)}\left(\frac{\Delta\lambda^2}{\langle\Delta\lambda^2\rangle} + \frac{\Delta\alpha^2}{\langle\Delta\alpha^2\rangle}\right) + \frac{C}{1-C^2}\frac{\Delta\lambda}{\sqrt{\langle\Delta\lambda^2\rangle}}\frac{\Delta\alpha}{\sqrt{\langle\Delta\alpha^2\rangle}}\right)$$
(2.74)

gdzie C (kowariancja zmiennych x i y które miałyby rozkład $g_2(x, y)$) oraz $\sqrt{\langle \Delta \lambda^2 \rangle}$ oraz $\sqrt{\langle \Delta \alpha^2 \rangle}$ (szerokości rozkładu) zależą od punktu wokół którego obliczamy kowariancję natężeń. Technicznie rzecz biorąc, chcąc poznać g_2 pomiędzy pewnym punktem (wybranym na krzywej idealnego dopasowania fazowego) a jego otoczeniem, dokonam rozwinięcia (2.60) wokół tego punktu i po opisanych przekształceniach wyznaczę g_2 . Ponieważ g_2 skupiona jest na obszarze kątowym rzędu kilku miliradianów i spektralnym rzędu kilku nm, to uważam, że korzystanie z rozwinięcia (2.60) jest uzasadnione.

Parametry $\Delta \alpha_I$, C, $\sqrt{\langle \Delta \lambda^2 \rangle}$ i $\sqrt{\langle \Delta \alpha^2 \rangle}$ obliczyłem za pomocą skryptu w programie Maple dla przypadku oddziaływania typu I w krysztale BBO długości 2mm umieszczonego w ognisku wiązki pompującej która składa się z fourierowsko ograniczonych impulsów. Wyniki dla dwóch długości fali sygnałowej, kątów obserwacji takich, by zachodziło idealne dopasowanie fazowe i dwóch ustawień kryształu od czasu trwania impulsów τ oraz ich średnicy w przedstawiają rysunki 2.12-2.14.

Szerokość rozkładu kątowego fluorescencji dla ustalonej długości fali fluorescencji jest odwrotnie proporcjonalna do w dla dużych τ oraz odrotnie proporcjonalna do τ dla dużych w. Granica dużych średnic i granica dużych czasów trwania (górny prawy róg wokół którego zagięte są poziomice na rys. 2.12) zależy od ustawienia kryształu oraz długości fali obserwacji, przy czym zależność od ustawienia kryształu jest dużo silniejsza dla długich fal, ponieważ dla nich kat dopasowania fazowego i tym samym obserwacji dużo silniej zależy od kąta ustawienia kryształu θ .

Szerokość rozkładu kątowego korelacji $\sqrt{\langle \Delta \alpha \rangle}$ ma w zastosowanym przybliżeniu osobliwość, tj. szerokość normalizacji (mianownika (2.71)) zrównuje się z szerokością korelacji nieznormalizowanej $G^{(2)}$ (licznika (2.71)). W takim przypadku wszelkie odchylenia kształtu korelacji od gaussowskiego bardzo istotnie wpływają na g_2 i już na tym etapie widać, że dla pewnych kombinacji parametrów przewidzenie rozmiaru g_2 będzie nieudane.

Zgodnie z intuicją, dla pompowania bliskiego monochromatycznemu (duże τ) szerokość rozkładu kątowego zależy tylko od w.

Szerokość rozkładu spektralnego korelacji $\sqrt{\langle \Delta \lambda \rangle}$ również ma w zastosowanym przybliżeniu osobliwość (rys. 2.14). Widać, że w dużej odległości od linii osobliwości szerokość rozkładu spektralnego zależy tylko od τ .

Kowariancja pomiędzy częstościami a kątami silnie zależy od τ i w, może być zarówno dodatnia, ujemna jak i zerowa (rys. 2.15).

2.5 Rozprzestrzenianie się i ewolucja korelacji w trakcie oddziaływania

Dalszy wgląd w naturę i pochodzenie korelacji czasoprzestrzennych we fluorescencji parametrycznej możemy uzyskać pisząc i rozwiązując równania według których ewoluują one wzdłuż kryształu. Pod-



Rysunek 2.12: Szerokość kątowa fluorescencji dla ustalej długości fali $10 \log(\Delta \alpha_I / 1 \text{mrad})$

stawiając (2.31) do (2.15) możemy uzyskać równania ewolucji funkcji greena K. W przypadku niezdegenerowanym przyjmuje ono postać:

$$\frac{\partial K^{(1)}(x,x')}{\partial z} = \hat{L}_s(x)K^{(1)}(x,x') + \chi A_p(x)K^{(3)*}(x,x')$$
(2.75a)

$$\frac{\partial K^{(3)}(x,x')}{\partial z} = \hat{L}_i(x)K^{(3)}(x,x') + \chi A_p(x)K^{(1)*}(x,x')$$
(2.75b)

$$\frac{\partial K^{(2)}(x,x')}{\partial z} = \hat{L}_s(x)K^{(2)}(x,x') + \chi A_p(x)K^{(4)*}(x,x')$$
(2.75c)

$$\frac{\partial K^{(4)}(x,x')}{\partial z} = \hat{L}_i(x)K^{(4)}(x,x') + \chi A_p(x)K^{(2)*}(x,x')$$
(2.75d)



Rysunek 2.13: Szerokość rozkładu kątowego korelacji $10\log(\sqrt{\langle\Delta\alpha^2\rangle}/1\mathrm{mrad})$

zaś w przypadku zdegenerowanym:

$$\frac{\partial K(x,x')}{\partial z} = \hat{L}(x)K(x,x') + \chi A_p(x)K'^*(x,x')$$
(2.76a)

$$\frac{\partial K'(x,x')}{\partial z} = \hat{L}(x)K'(x,x') + \chi A_p(x)K^*(x,x')$$
 (2.76b)

Rozwiązywanie tych równań można przeprowadzić niezależnie dla każdego x'. Warunek początkowy ma postać:

$$K(x, x'; z = 0) = \delta(x - x')$$
 (2.77a)

$$K'(x, x'; z = 0) = 0$$
 (2.77b)

Jest to w istocie badanie propagacji impulsów typu delta.



Rysunek 2.14: Szerokość rozkładu spektralnego korelacji $10 \log(\sqrt{\langle \Delta \lambda^2 \rangle}/1 \text{nm})$

Od tych równań przechodzimy do równań ewolucji funkcji korelacji (patrz punkt 2.3, str. 19), różniczkując po z ich definicje (2.49a) i (2.51a). Korzystając ze związku komutacyjnego $[a, a^{\dagger}] = 1$ w przypadku zdegenerowanym dostaniemy:

$$\frac{\partial G^{(1)}(x,x')}{\partial z} = \left(\hat{L}^*(x) + \hat{L}(x')\right) G^{(1)}(x,x') + \chi A_p^*(x) \left\langle a(x)a(x') \right\rangle + \chi A_p(x') \left\langle a(x')a(x) \right\rangle^* \quad (2.78a)$$

$$\frac{\partial \left\langle a(x)a(x') \right\rangle}{\partial z} = \left(\hat{L}(x) + \hat{L}(x')\right) \left\langle a(x)a(x') \right\rangle + \chi \left(A_p(x) + A_p(x')\right) \left(G^{(1)}(x,x') + \frac{1}{2}\delta(x-x')\right)$$

$$(2.78b)$$

gdzie A_p jest zależną od zobwiednią fali pompującej, zaś \hat{L} operatorem liniowej propagacji fali sygna-



Rysunek 2.15: Kowariancja C

łowej (2.16) (str. 13). W przypadku niezdegenerowanym:

$$\frac{\partial G_{ss}^{(1)}(x,x')}{\partial z} = \left(\hat{L}_{s}^{*}(x) + \hat{L}_{s}(x')\right) G_{ss}^{(1)}(x,x') + \chi A_{p}^{*}(x) \left\langle a_{s}(x')a_{i}(x)\right\rangle + \chi A_{p}(x') \left\langle a_{s}(x)a_{i}(x')\right\rangle^{*}$$
(2.79a)

$$\frac{\partial G_{ii}^{(1)}(x,x')}{\partial z} = \left(\hat{L}_i^*(x) + \hat{L}_i(x')\right) G_{ii}^{(1)}(x,x') + \chi A_p^*(x) \left\langle a_s(x)a_i(x') \right\rangle + \chi A_p(x') \left\langle a_s(x')a_i(x) \right\rangle^*$$
(2.79b)

$$\frac{\partial \langle a_s(x)a_i(x')\rangle}{\partial z} = \left(\hat{L}_s(x) + \hat{L}_i(x')\right) \langle a_s(x)a_i(x')\rangle + \chi A_p(x)G_{ii}^{(1)}(x,x') + A_p(x')G_{ss}^{(1)}(x,x') + A_p(x)\delta(x-x')$$

$$(2.79c)$$

gdzie \hat{L}_s i \hat{L}_i to operatory liniowej propagacji zdefiniowane związkiem (2.16). Zarówno $G^{(1)}$ jak i $\langle a(x)a(x')\rangle$ są równe zeru na początku kryształu, ale sytuacja ta szybko ulega zmianie na skutek istnienia niejednorodnego członu z deltą. Równania powyższe najłatwiej rozwiązać metodą split step. Ich pierwsze człony odpowiadaja propagacji liniowej, która na skończonym odcinku sprowadza się do przepropagowania dla każdego x' zgodnie z zasadami propagacji zawartymi w L(x) a następnie dla



Rysunek 2.16: Schemat ewolucji funkcji korelacji w modelowym przypadku niezdegenerowanym jeśli istotne są jedynie różnice prędkości grupowych.

każdego x zgodnie z treścią L(x'). Szczególnie prosto tego dokonać, jeśli problem zdominowany jest przez różnice prędkości grupowych i walkoff połączony z dużym kątem propagacji wiązek sygnałowej i biernej w stosunku do pompy. Wówczas działanie operatorów L sprowadza się do przesuwania (sprzężone operatory przesuwają w tą samą stronę). Jednocześnie na osi x = x' powstaje za sprawą członu z deltą gęstość anomalna, która dalej stanowi źródło dla funkcji $G^{(1)}$. Sytuację w jednym wymiarze poglądowo przestawia rysunek 2.16, na którym zaznaczyłem obszary gdzie funkcje korelacji są niezerowe oraz kierunki ich rozsuwania. Jeśli dodatkowo narysować gęstość anomalną odbitą względem osi x = x' oraz $\chi A_p(x)$ i $\chi A_p(x')$ to łatwo przeanalizować wszystkie człony źródłowe odpowiednich funkcji korelacji. Ewolucja, obrazowo mówiąc, polega na "wylewaniu się" funkcji korelacji z tych źródeł w kierunku zadanym przez propagację.

Na rysunku 2.17 zebrałem wyniki numerycznego rozwiązywania równań (2.79) w modelowym jednowymiarowym przypadku niezdegenerowanym jeśli istotne są jedynie różnice prędkości grupowych (np. generacja fluorescencji w światłowodzie wytworzonym w periodycznie spolaryzowanym krysztale [54]). Tzn. przyjąłem $\hat{L}_s = L\Delta\beta_{1,s}/\tau_p \partial_t$, $\hat{L}_i = L\Delta\beta_{1,i}/\tau_p \partial_t$, za jednostkę czasu obrałem długość trwania impulsu pompującego τ_p a za jednostkę długości grubość kryształu L. Impuls pompujący założyłem gaussowski o amplitudzie jednej jednostki natężenia pola. Dzięki temu moja symulacja jawnie miała 3 parametry — dwie różnice prędkości grupowych $\Delta\beta_{1,s}$, $\Delta\beta_{1,i}$ oraz nieliniowość χ .

Dzięki temu modelowi możemy przewidzieć

2.6 Natężenie fluorescencji

Okazuje się, że na proces generacji fluorescencji parametrycznej w reżimie dużego wzmocnienia, poza dopasowaniem fazowym, w istotny sposób wpływa dopasowanie prędkości grupowych. Aby wyjaśnić ten efekt wyobraźmy sobie przez chwilę, że fluktuujące pole elekryczne próżni które daje początek fluorescencji składa się z impulsów. Długość tych impulsów jest ograniczona poprzez pasmo wzmocnienia. Z kolei pasmo wzmocnienia (w przypadku zdegenerowanym) ograniczone jest poprzez pochodzące od dyspersji kwaratowe wyrazy rozwinięcia dopasowania fazowego (2.60). W efekcie okazuje się, że charakterystyczna długość impulsów fluorescencji τ_f spełnia $L = 2z_{DS} = 2\pi \tau_f^2/\beta_{2,s}$, tj. jest taka, żeby droga dyspersyjna (odpowiednik zasięgu Railegha) była równa połowie grubości kryształu. Jeszcze innymi słowy, τ_f jest takie, że impulsy początkowo fourierowsko ograniczone po propagacji przez kryształ są najkrótsze (impulsy krótsze szybciej się wydłużają, dłuższe już są długie). Impulsy takie o losowym



Rysunek 2.17: Funkcja korelacji na z wyjściu ośrodka w modelowym przypadku niezdegenerowanym jeśli istotne są jedynie różnice prędkości grupowych.



Rysunek 2.18: Wzmacnianie impulsu na skutek oddziaływania z ultrakrótkim impulsem pompującym zachodzi na drodze L_i na której przekrywaja się one w czasie. Często jest to droga dużo krótsza niż grubość kryształu.

położeniu w czasie wpadają do kryształu w którym zachodzi ich wzmacnianie na skutek oddziaływania z impulsem pompującym. Jednak zazwyczaj ich prędkość grupowa istotnie różni się od prędkości grupowej impulsu pompującego i dlatego też efektywna droga na której oddziałują one z pompą L_i i ulegają wzmocnieniu jest dużo krótsza niż grubość kryształu (rys. 2.18). Możemy oszacować:

$$L_i \simeq \frac{\tau_p}{\beta_{1,p} - \beta_{1,s}} \tag{2.80}$$

gdzie założyłem, że czas trwania impulsu pompującego τ_p jest duży, zaś β_1 to rzuty odwrotności odpowiednich prędkości grupowych (równe pochodnym po częstości wektorów falowych $\beta_1 = \partial_{\omega} k_z$). W rzeczywistym procesie musimy wziać pod uwagę efekt niedopasowania prędkości grupowych zarówno dla wiazki sygnałowej jak i biernej. W jednym wymiarze można stosunkowo łatwo przeprowadzić szereg symulacji modelowych celem zbadania wpływu różnicy prędkości grupowych na całkowite natężenie fluorescencji. Wyniki dla mniejszego i większego sprzężenia nieliniowego przedstawia rys. 2.19. Okazuje się, że korzystniej ze względu na całkowite natężenie fluorescencji spontanicznej jest jeśli następuje zrównanie prędkości grupowej sygnału i wiązki biernej $\beta_{1,s} = \beta_{1,i}$ niż gdy zachodzi $\beta_{1,p} = \beta_{1,s}$. Fakt ten można zrozumieć, jeśli wziąc pod uwagę, że wykładnicze narastanie natężenia impulsu wzmacnianego uwarunkowane jest oddziaływaniem wszystkich 3. fal, a impuls pompujący jest typowo dużo dłuższy niż charakterystyczny impuls sygnałowy ($\tau_p \gg \tau_f$).

Dla dużych nateżeń wiązki pompującej (rys. 2.19b) wzmocnienie ma charakter wybitnie wykładniczy i dlatego szybko maleje nawet na linii $\beta_{1,s} = \beta_{1,i}$ wzdłuż której maleje droga oddziaływanai pary impulsów wzmacnianych z pompującym. Z podobnych względów dla małych różnic prędkości grupowych warunek $\beta_{1,s} = \beta_{1,i}$ jest mniej krytyczny niż dla dużych.

W eksperymencie zależność natężenia fluorescencji od różnicy rzutów prędkości grupowej na kierunek wiązki pompującej jest wyraźnie widoczna (patrz rys. 3.8). Biorąc pod uwagę wyniki pierwszego rzędu rachunku zaburzeń (rozdział 2.4) spodziewalibyśmy się, że główny wpływ na natężenie fluorescencji w funkcji kąta i częstości będzie miało dopasowanie fazowe, czyli że natężenie to będzie istotne wokół krzywej idealnego dopasowania, jednej z przedstawionych na rys. 3.3. Okazuje się jednak, że dodatkowo wzdłuż takiej krzywej istotnie zmienia się różnica prędkości grupowych (rys. 2.20). W świetle wyników modelu światłowodowego spodziewamy się, że w krysztale BBO ustawionym pod kątem $\theta = 30^{o}$ fluorescencja powstanie głównie w okolicy 490nm gdzie zachodzi zrównanie wszystkich prędkości grupowych, zaś dla kąta $\theta = 40^{o}$ spodziewamy się, że powstanie intensywna fluorescencja w szerokim obszarze widmowym od 650 poprzez 800 do 1040nm bowiem tam zrównuje się prędkość grupowa fali sygnałowej i jałowej. Fakt iż wyniki te zostały otrzymane w modelu jednowymiarowym oznacza, że stosują się dla fal płaskich oraz wtedy, gdy oddziaływanie nie jest ograniczone przez poprzeczne rozmiary wiązek. Na przykład, jeśli światło fluorescencji parametrycznej rozchodzi się pod



Rysunek 2.19: Całkowite natężenie fluorescencji spontanicznej (wyrażone średnią ilością fotonów) w funkcji różnicy prędkości grupowych $\Delta_s = L(\beta_{1,p} - \beta_{1,s})/\tau_p$ oraz $\Delta_i = L(\beta_{1,p} - \beta_{1,i})/\tau_p$. Po lewej stronie małe natężenie pompy ($\chi = 1$) po prawej duże ($\chi = 5$). Wyniki uzyskałem z modelu oddziaływania w bezdyspersyjnym światłowodzie.



Rysunek 2.20: Rzuty odwrotności prędkości grupowych [fs/µm] na kierunek pompy w BBO w oddziaływaniu I typu w kierunkach idealnego dopasowania fazowego w funkcji długości fali sygnałowej przy pompowaniu na 400nm. Linia ciągła pozioma przedstawia $\beta_{1,p}(\omega_p)$, przerywana $\beta_{1,s}(\omega_s)$ a ciągła $\beta_{1,i}(\omega_p - \omega_s)$. Po lewej stronie wyniki dla kryształu wyciętego pod katem $\theta = 30^\circ$ a po prawej $\theta = 40^\circ$.



Rysunek 2.21: Wzmacnianie światła rozchodzącego sie pod kątem na skutek oddziaływania z wiązką pompującą zachodzi na drodze L_i na której przekrywają się one w przestrzeni. Zależnie od np. średnicy wiązki pompującej droga ta może być krótsza niż grubość kryształu.

dużym kątem do wiązki pompującej, to droga oddziaływania będzie ograniczona, jak to schematycznie przedstawiłem na rysunku 2.21. Oznacza to z kolei, że dla małych średnic wiązki pompującej różnice prędkości grupowych będą miały mniejsze znaczenie (bo droga oddziaływania i tak jest ograniczona) i powstanie fluorescencja rozciągająca się na szerszy obszar spektralny.

Rozdział 3

Doświadczalne badanie korelacji

W ramach niniejszej pracy przeprowadziłem pomiary umożliwiające wyznaczenie rozmiaru kątowego i szerokości spektralnej korelacji w świetle fluorescencji parametrycznej. Posłużył mi do tego wzmacniacz impulsów femtosekundowych typu CPA (Chirped Pulse Amplifier) α -1000 US dostępny w Laboratorium Procesów Ultraszybkich Uniwersytetu Warszawskiego oraz układ doświadczalny przedstawiony na rys. 3.1.

Wybór pola pompującego w postaci impulsów femtosekundowych podyktowany jest dwoma podstawowymi względami. Po pierwsze przy tak krótkich impulsach stosunkowo łatwo jest osiągnąć moc wystarczającą do uzyskania znacznego wzmocnienia (rzędu setek tysiecy) dzięki czemu fluorescencja spontaniczna staje się widoczna goły okiem oraz łatwa do rejestracji. Po drugie zaś fluorescencja parametryczna ma pewien typowy czas spójności, który w stosowanym przez mnie krysztale BBO jest właśnie rzędu femtosekund. Zastosowanie impulsów pompujących porównywalnej długości umożliwa wytworzenie światła spójnego. Z drugiej strony dobrze jest, jeśli zarówno spójność czasowa pompy jak i charakterystyczna spójność czasowa fluorescencji jest na tyle krótka że pasmo z nią związane jest wieksze niz rozdzielczość spektrometru, dzięki temu bowiem mamy możliwość całkowitego rozdzielenia modów¹ fluorescencji. W moich eksperymentach ten warunek był dobrze spełniony.

Ważną cechą moich eksperymentów jest zbieranie światła fluorescencji po każdym impulsie pompującym z osobna. Układ sterujący komórką Pockelsa we wzmacniaczu impulsów jest odpowiednio bramkowany, tak, że po każdym impulsie następuje najpierw pełny odczyt zawartości kamery CCD i dopiero wówczas układ laserowy wysyła następny impuls pompujący. Dzięki takiemu postępowaniu każdorazowo rejestruję na kamerze CCD wartości operatorów liczby fotonów w bazie fal monochromatycznych płaskich² i mogę obliczyć dowolną (normalnie uporządkowaną) średnią wyrażającą się przez takie operatory jako średnią po zespole zarejestrowanych rozkładów natężenia.

3.1 Kryształy. Typy dopasowania fazowego.

W moich eksperymentach używałem kryształu β -boranu baru (BBO), popularnego ośrodka jednoosiowego o dużym wpółczynniku nieliniowości i transmisji sięgajacej do ok. 300nm. W takim krysztale uzyskanie idealnego dopasowania fazowego w procesie mieszania trzech fal, czyli dokładnego zachowania pędu, możliwe jest w dwóch tzw. typach, czyli dla dwóch istotnie różnych kierunków polaryzacji oddziałujących fal.

Typ I. Wiązka pompująca propaguje sie jako fala nazdwyczajna, a wiązki sygnałowe i bierne jako fale zwyczajne (dlatego czasem określa sie ten typ oddziaływania jako *eoo*). Dopasowanie fazowe naszkicowane jest na rysunku 3.2 dla ustalonych częstości pompy, sygnału i fali jałowej. Wektor falowy pompy k_p wraz ze zmianą jej kierunku porusza się po elipsoidzie obrotowej której osią jest os

¹w tym rodziałe mody można rozumieć jako czasowo-przestrzenne obszary spójności promieniowania

 $^{^2 {\}rm jest}$ to przybliżenienie, dobrze spełnione ze względu na ograniczenie minimalnego rozmiaru struktur kątowych i spektralnych poprzez impulsy pompujące



Rysunek 3.1: Układ doświadczalny stosowany do pomiaru korelacji natężeniowych. Wiązka impulsów femtosekundowych ze wzmacniacza (ok. 1mJ, 50fs@800nm) jest najpierw przetwarzana na drugą harmoniczną w krysztale BBO grubości 1mm (SHX) następnie ulega wielokrotnemu odbiciu od luster dichroicznych DM dzięki czemu odfiltrowaniu ulega składowa fundamentalna. Tak przygotowane niebieskie impulsy (ok. 100μ J, 90fs@400nm) są ogniskowane za pomocą soczewki L (różne ogniskowe) w krysztale FX w którym zachodzi proces fluorescencji parametrycznej. Promieniowy wycinek stożka fluorescencji przechodzi przez poziomo ustawioną szczelinę spektrometru Sp tworząc na kamerze CCD obraz natężenia w funkcji kąta i długości fali.



Rysunek 3.2: Dopasowanie fazowe pierwszego typu, przecięcie w płąszczyźnie zawierającej oś optyczną i wektor falowy pompy. Kierunek z wybieramy wzdłuż kierunku wektora falowego pompy, zazwyczaj kryształ ma ściany wycięte prostopadle do z.

optyczna kryształu. Jeśli z początku wektora k_p zatoczymy sferę promieniem odpowiadającym długości wektora falowego wiązki sygnałowej k_s a z końca wektora k_p sferę promieniem odpowiadającym długości wektora falowego wiązki jałowej k_i , to sfery te przetną się na okręgu wyznaczając kierunki idealnego dopasowania par fal sygnałowych i biernych (na rysunku widocznym jako dwa punkty, poniżej i powyżej osi z). Okrąg ten ma środek na osi z i jest do niej prostopadły. Przekłada się on na dwa stożki koncentryczne z k_p na powierzchni których leżą dopasowane wektory falowe sygnałowe i jałowe. Wraz ze zmianą kąta propagacji fali pompującej zmienia się odległość między kulami po których poruszają się k_s i k_i , a zatem zmienia się kąt rozwarcia stożka na którym leżą wektory falowe idealnie dopasowanych fal sygnałowych.

Podział na fale sygnałową i jałową jest w typie I sprawą czysto umowną. W szczególności tylko w tym typie możemy mówić o pełnej degeneracji, kiedy to wszystkie fale rozchodzą się współosiowo³ a dodatkowo fala sygnałowa ma częstosć taką samą jak bierna. Ustawienie kryształu jest wówczas identyczne jak potrzebne dla idealnego dopasowania fazowego w procesie generacji drugiej harmonicznej.

W konkretnym przypadku kryształu BBO pompowanego falą 400nm łatwo jest obliczyć kąt pod którym wychodziłoby zeń idealnie dopasowana fluorescencja parametryczna w funkcji jej długości fali oraz ustawienia kryształu. Wyniki przedstawia rysunek 3.3.

Określiwszy punkt idealnego dopasowania fazowego we współrzędnych prostopadłe składowe wek-

 $^{^{3}\}mathrm{tj.}$ współosiowe są ich wektory falowe



Rysunek 3.3: Krzywe dopasowania fazowego w procesie downconversji typu I pobudzanym światłem o długości fali 400nm. Na osi poziomej odłożona jest długość fali wtworzonego promieniowania, a na pionowej tangens kąta po którym opuszcza ono kryształ. Każda krzywa jest narysowana dla innego kąta wycięcia kryształu θ od 25 co 1 do 45 stopni, przy założeniu że wiązka pompująca pada na krzystał normalnie.

torów falowych - częstości możemy wokół niego rozwinąć wartość niedopasowania Δk_z , jako że wielkość ta jest kluczowa w procesach mieszania fal (patrz równanie 2.60). Największe znacznie mają liniowe wyrazy rozwinięcia, których stałymi są różnica odwrotności prędkości grupowych zrzutowanych na kierunek wektora falowego pompy oraz walkoff pompy (patrz równanie B.6). Najbardziej widoczne są efekty związne pierwszym z tych wyrazów, który dla różnych par częstości przy tym samym nawet ustawieniu kryształu zmienia sie w szerokich granicach.

Typ II. Wiązka pompująca i sygnałowa propagują sie jako fala nazdwyczajna, a wiązka bierna jako zwyczajna (typ oddziaływania *eoe*). Dopasowanie fazowe naszkicowane jest na rysunku 3.4 dla ustalonych częstości pompy, sygnału i fali jałowej. Wektor falowy pompy k_p wraz ze zmianą jej kierunku porusza się po elipsoidzie obrotowej której osią jest os optyczna kryształu. Jeśli z początku wektora k_p zatoczymy elipsoidę po której porusza się wektor falowy wiązki sygnałowej k_s a z końca wektora k_p kulę promieniem odpowiadającym długości wektora falowego wiązki jałowej k_i , to powierzchnie tych brył te przetną się na okręgu wyznaczając kierunki idealnego dopasowania par fal sygnałowych i biernych (na rysunku widocznym jak dwa punkty). Okrąg ten przekłada się on na dwa stożki na powierzchni których leżą dopasowane wektory falowe (zaznaczone po prawej stronie rysunku w prerspektywie). Wraz ze zmianą kąta propagacji fali pompującej zmienia się odległość między kulą i elpsoidą po których poruszają się k_s i k_i , a zatem zmienia się kąt rozwarcia stożka na którym leżą wektory falowe idealnie dopasowanych fal sygnałowych i biernych.

W konkretnym przypadku kryształu BBO pompowanego falą 400nm z pewnym wysiłkiem można obliczyć kąt pod którym wychodziłoby zeń idealnie dopasowana fluorescencja parametryczna w funkcji jej długości fali oraz ustawienia kryształu. Wyniki przedstawia rysunek 3.5.



Rysunek 3.4: Dopasowanie fazowe w drugim typie, przecięcie w płąszczyźnie zawierającej oś optyczną i wektor falowy pompy.

3.2 Wyniki

Przykładowy rozkład natężenia z pojedyńczego strzału fluorescencji parametrycznej (tj. po jednym impulsie pompujących) zmierzony w układzie z rys. 3.1 przedstawia rys. 3.7. W kazdym pojedyńczym strzale widoczna jest plamkowa struktura fluorescencji, która jednak za każdym razem powstaje inaczej przesunięta i dlatego przy uśrednieniu znika. Średni rozkład natężenia $\langle I(\alpha, \lambda) \rangle$ obliczony z wyników eksperymentalnych przedstawia rys. 3.8. Jest on swego rodzaju obwiednią pod którą powstaje struktura plamkowa, widoczna w pojedyńczych strzałach. Plamki maja pewnien charakterystyczny rozmiar i kształt, który można wyznaczyć wokół dowolnego punktu (α, λ) obliczając funkcję kowariancji natężeniowej (2.71) (zmienia się w granicach od -1 do 1): Przykładowe wyniki dla tej samej serii pomiarów przedstawione są na rysunku 3.10. Korelacje wokół punktów o różnych długościach fali mają różny rozmiar, zwłaszcza w okolicach długości fali dla których następuje zmiana charakteru zależności kąta emisji fluorescencji od długości fali, jak to ma miejsce przy 520nm dla $\theta = 30.1^{\circ}$.

Natężenie fluorescencji Wyniki eksperymentalna przedstawione na rys. 3.8 są zgodne z przewidywaniami pragrafu 2.6. Dla dużej średnicy wiązki pompującej fluorescencja powstaje w obszarze długości fal, gdzie zachodzi zrównanie prędkości grupowych fali sygnałowej i biernej, w wąskim obszarze spektralnym dla kąta $\theta = 30.1^{\circ}$ i szerokim dla $\theta = 40.6^{\circ}$ (por. rys. 2.20). Z kolei dla małej średnicy wiazki pompującej zrównanie prędkości grupowych nie jest juz tak krytyczne i widmo promieniowania generowanego przy ustawieniu $\theta = 30.1^{\circ}$ znacząco sie poszerza.

Szerokość kątowa fluorescencji Model teoretyczny dla niektórych wartości parametrów (kąt ustawienia kryształu, średnica wiązki) przewiduje z niewielką dokładnością szerokość rozkładu kątowego fluorescencji, chociaż nigdy nie jest w stanie przewidzieć szybkich wahań szerokości tego rozkładu w obszarach, gdzie natężenie fluorescencji zmienia się bardzo szybko z przyczyn o których byłą mowa w poprzednim paragrafie. Często też otrzymywałem z modelu teoretycznego zdecydowanie zawyżoną wartość $\Delta \alpha_I$. Wysnuwam stąd wniosek, że efekty związane z wysokim natężeniem fluorescencji mogą całkowicie zdominować te które jestem z stanie uwzględnić w ramach modelu wąskopasmowej emisji par fotonów.

Korelacje Przykładowe znormalizowne funkcje korelacji przedstawiają rysunki 3.10. Korelacje rozciągaja się na obszar spektralny o szerokości około 10nm i kątowy o rozmiarze pojedynczych miliradianów. Korelacje mają kształt w przyblizeniu gaussowski, poza nielicznymi wyjątkami kiedy to



ś

Rysunek 3.5: Krzywa dopasowania fazowego w procesie downconversji II typu pobudzanym światłem o długości fali 400nm padajacym normalnie na powierzchnię wejściową krystału. Kąt pomiędzy osią optyczną a normalną do powierzchni wejściową $\theta = 41.44^{\circ}$. Na osi poziomej odłożona jest długość fali wtworzonego promieniowania, a na pionowej kąt po którym opuszcza kryształ. Rysunek ograniczony jest do płaszczyzny zawierajacej oś optyczną. Gałąź krótkofalowa odpowiada wiązce zwyczajnej, a długofalowa nadzwyczajnej.

 $g_1(\Delta \alpha, \Delta \lambda)$ ma dwa maksima lub też jest przycięta z jednej stony, jak to miejsce kiedy fluorescencja rozkłada się na szeroki obszar kątowy i badamy okolice zwrotu zależności kata emisji fluorescencji od długości fali (por. rys. 3.3).

W obszarze katów θ 29°–40° dla impulsów pompujących o czasie trwania rzędu 90fs i średnicy 40 μ m oraz 315 μ m wszystkie zmierzone przeze mnie funkcje korelacji $g_1(\Delta \alpha, \Delta \lambda)$ są nachylone w stronę odpowiadajacej korelacji $\Delta \alpha \ z \ \Delta \lambda$ (nigdy nie zaobserwowałem antykorelacji), co stoi w sprzeczności z wynikami teoretycznymi.

Porównanie zmierzonych funkcji korelacji $g_1(\Delta \alpha, \Delta \lambda)$ z przewidywanimi teoretycznymi przedstawia rysunek 3.11. Model zazwyczaj przewiduje korelacje o rozmiarze mniejszym niż zmierzony. Nie jestem w stanie przewidzieć eliptyczności funkcji $g_1(\Delta \alpha, \Delta \lambda)$. Jak już wspomniałem, w szczególności nigdy nie obserwuje układania się $g_1(\Delta \alpha, \Delta \lambda)$ wzdłuż prostej o ujemnym nachyleniu.



Rysunek 3.6: Widmo drugiej harmonicznej impulsów laserowch. Punkty to wynik pomiaru, linia ciągła przedstawia dopasowanie funkcją gaussowską. Szerokość spektralna $\Delta \lambda_{\rm FWHM} = 3.8$ nm odpowiada czasowi trwania impulsu $\tau_{\rm FWHM} = 87$ fs



Rysunek 3.7: Przykładowe rozkłady natężenia z pojedyńczego strzału fluorescencji parametrycznej. Kąt między wiązką pompującą a osią optyczną $\theta = 30.1^{\circ}$. Średnica wiązki pompującej 40μ m.



Rysunek 3.8: Uśredniony po wielu strzałach rozkład natężenia. Kąt między wiązką pompującą a osią optyczną — lewy i środkowy rysunek $\theta = 30.1^{\circ}$, prawy $\theta = 40.6^{\circ}$. Średnica wiązki pompującej — lewy rysunek 40μ m, środkowy i prawy 315μ m. Widmo promieniowania na prawym rysunku zostało przycięte od stony długofalowej i dużych kątów z przyczyn eksperymentalnych, w rzeczywistości nie urywa się tak jak sugeruje to rysunek.



Rysunek 3.9: Szerokość kątowa fluorescencji w funkcji długości fali dla różnych ustawień kryształu i średnicy wiazki pompującej. Kolejne rysunki $\theta = 30.1^{o}$, $w = 315 \mu \text{m}$; $\theta = 30.1^{o}$, $w = 40 \mu \text{m}$; $\theta = 31.3^{o}$, $w = 40 \mu \text{m}$; $\theta = 32.5^{o}$, $w = 40 \mu \text{m}$; $\theta = 35^{o}$, $w = 315 \mu \text{m}$. Linia ciągła — przewidywania modelu teoretycznego, punkty — wyniki eksperymentu.



Rysunek 3.10: Przykładowa znormalizowana funkcja kowariancji $g_1(\Delta \alpha, \Delta \lambda)$ (seria pomiarów z rys. 3.7).



Rysunek 3.11: Porównanie zmierzonych funkcji korelacji $g_1(\Delta \alpha, \Delta \lambda)$ z przewidywanimi teoretycznymi. Linia ciagła — eksperyment, Linia przerywana — model.

Rozdział 4

Podsumowanie

Podsumowałem stan wiedzy na temat fluorescencji parametrycznej oraz perspektywy jej zastosowań. Rozpoczynając od podręcznikowych modeli jedno- i dwumodowego wzmacniacza parametrycznego w którym zachodzi ściskanie wprowadziłem teorię opisującą przypadek wielomodowy. Korzystając z założenia o koherencji impulsów pompujących oraz o ich zaniedbywalnym osłabieniu w procesie wzmacniania byłem w stanie w przypadku braku tłumienia opisać kwantowo wzmacniacz parametryczny. Dzięki liniowości przekształcenia jakiemu ulegaja w nim operatory kreacji i anihilacji udało mi się pokazać, że rzeczywisty wzmacniacz parametryczny ściska niezależne mody. Pokazałem również w jaki sposób znaleźć kształt tych modów. Procedura ta moze być bez trudu zastosowana w przypadku jednowymiarowym [47], w przypadkach więcej wymiarowych wymaga bardzo dużej mocy obliczeniowej. Przypomniałem pojęcia korelacji pola i natężeniowych i powiazałem je z wprowadzonymi modami charakterystycznymi wzmacniacza. Podałem przybliżenie gaussowskie pierwszego rzędu w stałej oddziaływania umożliwiające obliczenie korelacji pola w przypadku emisji wąskopasmowych par fotonów. Wprowadziłem równania ewolucji korelacji pola, które pozwoliły mi w przypadku jednowymiarowym obliczyć natężenie fluorescencji w funkcji róznicy prędkości grupowych również w poza rozwinięciem perturbacyjnym.

Przeprowadziłem pomiary korelacji natężeniowych w reżimie dużego wzmocnienia. Przypomniałem o warunkującym emisję dopasowaniu fazowym, oraz pokazałem jakościową zgodność pomiędzy wnioskami z jednowymiarowego modelu przewidującego natężenie fluorescencji a wynikami pomiarów. Pokazałem, że na korelacje oraz rozkład kątowy fluorescencji parametrycznej mają wpływ czynniki nie ujęte we wprowadzonym modelu, np. efekty związane z dużym wzmocnieniem.

Podziękowania

Pragnę wyrazić moją wdzięczność prof. Czesławowi Radzewiczowi, który od wielu lat niestrudzenie się mną opiekuje i wykazuje ogromną wyrozumiałość.

Dziękuje również dr. hab. Markowi Trippenbachowi za niezwykle użyteczna wiedzę którą mi przekazał.

Inspiracja do badań które zaowocowały znalezieniem modów charakterystycznych wzmacniacza parametrycznego pochodzi od dr. Konrada Banaszka, za co pragnę mu wyrazić moją wdzięczność.

Dziękuje także dr. Piotrowi Wasylczykowi za lata udanej współpracy z wiarą w jej długą kontynuację.

Moja praca nie byłaby przyjemna, a nawet nie byłaby możliwa, gdyby nie atmosfera którą tworzy zespół laboratorium procesów ultraszybkich.

Dodatek A

Symplektyczność macierzy greena

Macierz

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{A.1}$$

jest symplektyczna, jeśli zachodzi:

$$\mathbf{SJS}^T = \mathbf{J} \tag{A.2}$$

gdzie

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

Rozkład singularny rzeczywistej macierzy symplektycznej, a tylko z takimi będziemy mieli doczynienia, ma szczególną symetrię. Z definicji, σ jest wartością singularną macierzy **S** jeśli istnieją dwa niezerowe wektory u i v, takie że:

$$\mathbf{S}v = \sigma u \tag{A.4a}$$

$$\mathbf{S}^{\dagger} u = \sigma v \tag{A.4b}$$

Ale dla macierzy rzeczywistej $\mathbf{S}^{\dagger} = \mathbf{S}^{T}$. Mnożąc równości stronami przez odpowiednio $\mathbf{S}^{T}\mathbf{J}$ i $\mathbf{S}\mathbf{J}$ i korzystając ze związku (A.2) dostaniemy analogiczne związki z $\sigma' = 1/\sigma$, $u' = \mathbf{J}u$ oraz $v' = \mathbf{J}v$.

A.1 przypadek zdegenerowany

Rozważamy macierz \mathbf{S} (tj. funkcję Greena) równania wzmacniacza zdegenerowanego

$$\begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}(z) = \mathbf{S}(z) \begin{bmatrix} q \\ p \end{bmatrix}(0) \tag{A.5}$$

gdzie rzeczywiste funkcje q i p spełniają równanie różniczkowe (2.15b)

$$\frac{\partial}{\partial z}(q+ip) = \hat{L}(q+ip) + P(q-ip) \tag{A.6}$$

gdzie $\hat{L} = \hat{L}_s$ jest operatorem antyhermitowskim propagacji liniowej zdefiniowanym równaniem (2.16) a $P = \chi A_p$ funkcją zespoloną. Stąd

$$\frac{\partial \mathbf{S}(z)}{\partial z} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Re(\hat{L}+P) & \Im(-\hat{L}+P) \\ \Im(\hat{L}+P) & \Re(\hat{L}-P) \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \mathbf{S}(z)$$
(A.7)

 $\mathbf{S}(0) = \mathbf{1}$ i jest macierzą symplektyczną. Dowód symplektyczności \mathbf{S} dla z + dz przeprowadzimy przez różniczkowanie (A.2).

$$\frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^T) = \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^T + \mathbf{S} \mathbf{J} \mathbf{S}^T \mathbf{H}^T = \mathbf{H} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{H}^T$$
(A.8)

gdzie w ostatnim przejściu założyłem, że $\mathbf{S}(z)$ jest symplektyczna. Korzystając z $P^T = P$, $\Im(L)^T = \Im(L)$ oraz $\Re(L)^T = -\Re(L)$ łatwo sprawdzić, że pochodna ta wynosi zero, czyli rzeczywiście $\mathbf{S}(z + dz)$ też jest symplektyczna.

A.2 przypadek niezdegenerowany

Rozważamy macierz ${f S}$ (tj. funkcję Greena) równania wzmacniacza niezdegenerowanego

$$\begin{bmatrix} q_s \\ q_i \\ p_s \\ p_i \end{bmatrix} (z) = \mathbf{S}(z) \begin{bmatrix} q_s \\ q_i \\ p_s \\ p_i \end{bmatrix} (0)$$
(A.9)

gdzie rzeczywiste funkcje q i p spełniają równania różniczkowe (2.15b) i (2.30c)

$$\frac{\partial}{\partial z}(q_s + ip_s) = \hat{L}_s(q_s + ip_s) + P(q_i - ip_i)$$
(A.10a)

$$\frac{\partial}{\partial z}(q_i + ip_i) = \hat{L}_i(q_i + ip_i) + P(q_s - ip_s)$$
(A.10b)

gdzie \hat{L} są operatorami antyhermitowskimi propagacji liniowej zdefiniowanymi równaniem (2.16) a $P = \chi A_p$ funkcją zespoloną. Stąd

$$\frac{\partial \mathbf{S}(z)}{\partial z} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Re \hat{L}_s & \Re P & | & -\Im \hat{L}_s & \Im P \\ \Re P & \Re \hat{L}_i & \Im P & -\Im \hat{L}_i \\ \Im \hat{L}_s & \Im P & & \Re \hat{L}_s & -\Re P \\ \Im P & \Im \hat{L}_s & | & -\Re P & & \Re \hat{L}_i \end{pmatrix}}_{\mathbf{H}} \mathbf{S}(z)$$
(A.11)

Analogicznie jak w przypadku zdegenerowanym sprawdzamy symplektyczność macierzy **S** przez bezpośrednie obliczenie $\mathbf{HJ} + \mathbf{JH}^T$ które znowu okazuje się być równe 0.

Dodatkowo w przypadku niezdegenerowanym macierz **S** ma podwójne wartości osobliwe. Aby się o tym przekonać zbadajmy czy macierz o działaniu odpowiadającym mnożeniu $q_s + ip_s$ przez i oraz $q_i + ip_i$ przez -i (które fizycznie nie powinno nic zmieniać, bo suma faz, która się liczy, nie ulega zmianie):

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} \\ \hline -\mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
(A.12)

jest transformacją podobieństwa dla macierzy \mathbf{S} — czy:

$$\mathbf{O}^T \mathbf{S} \mathbf{O} = \mathbf{S} \,. \tag{A.13}$$

Niewątpliwie jest tak dla z = 0. Zbadajmy pochodną związku podobieństwa dla dowolnego z:

$$\frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{O}^T \mathbf{S} \mathbf{O} - \mathbf{S}) = \mathbf{O}^T \mathbf{H} \mathbf{S} \mathbf{O} - \mathbf{H} \mathbf{S} = \mathbf{O}^T \mathbf{H} \mathbf{O} \mathbf{O}^T \mathbf{S} \mathbf{O} - \mathbf{H} \mathbf{S} = (\mathbf{O}^T \mathbf{H} \mathbf{O} - \mathbf{H}) \mathbf{S}$$
(A.14)

gdzie skorzystałem z $\mathbf{O}^T = \mathbf{O}^{-1}$ oraz założyłem, że $\mathbf{S}(z)$ spełnia związek (A.13). Łatwo się przekonać bezpośrednim rachunkiem, że $\mathbf{O}^T \mathbf{HO} = \mathbf{H}$ czyli związek (A.13) jest spełniony dla dowolnego z. Skorzystanie z własności (A.13) w związkach (A.4) prowadzi do wniosku, że jeśli wektory u i v odpowiadają wartości singularnej σ , to tej samej wartości odpowiadają również wektory $\mathbf{O}u$ i $\mathbf{O}v$, a co więcej cała przestrzeń wektorów w których obróciliśmy część sygnałową o dowolny kat ϕ i część jałową o kąt $-\phi$ w każdej płaszczyźnie q, p.

Dodatek B

Gausowskie przybliżenie dopasowania fazowego w BBO typu I

Zaczynamy od wyzerowania członu kwadratowego rozwinięcia (2.60) wzdłóż kierunku wektora \vec{b} (bo i tak człon ten jest w tym kierunku bardzo mały):

$$\Delta k(\vec{\Delta}) \simeq \vec{b}^T \vec{\Delta} + \left(\vec{\Delta} - \vec{b} \ \frac{\vec{b}^T}{|b|^2} \vec{\Delta}\right)^T \mathbf{A} \left(\vec{\Delta} - \vec{b} \ \frac{\vec{b}^T}{|b|^2} \vec{\Delta}\right)$$
$$= \vec{b}^T \vec{\Delta} + \vec{\Delta}^T \underbrace{\left(1 - \vec{b} \ \frac{\vec{b}^T}{|b|^2}\right)^T \mathbf{A} \left(1 - \vec{b} \ \frac{\vec{b}^T}{|b|^2}\right)}_{\widetilde{\mathbf{A}}} \vec{\Delta}$$
(B.1)

gdzie przez $\vec{\Delta}$ oznaczyłem wektor odległości od centrum rozwinięcia. Diagonalizując macierz symetryczną i rzeczywistą $\tilde{\mathbf{A}}$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \sum_{i} \delta_{i} \vec{a}_{i} \vec{a}_{i}^{T} \tag{B.2}$$

sprowadzamy rozwinięcie do postaci:

$$\Delta k \simeq \vec{b} \cdot \vec{\Delta} + \sum_{i} \delta_i (\vec{a}_i \cdot \Delta)^2 \tag{B.3}$$

dzięki wyzerowaniu formy kwadratowej zadanej przez **A** wzdłóż \vec{b} zachodzi $\vec{a}_i \cdot \vec{b}$ dla każdego *i*. Teraz możemy przybliżyć:

$$\frac{\sin(\Delta k L/2)}{\Delta k L/2} \simeq \exp\left(-\frac{L^2}{5}(\vec{b}\cdot\vec{\Delta})^2 - \frac{L}{3}\sum_i |\delta_i|(\vec{a}_i\cdot\vec{\Delta})^2\right) \tag{B.4}$$

Do czego dążyliśmy.

W kokretnym przypadku rozwijając funkcję 2.57 w szereg wokół punktu ($\omega_1 = \omega_2 = \omega_0, k_{\perp,1}^2 = k_{\perp,2}^2 = \omega_0/c \sin(\alpha_0)$) w przypadku zdegenerowanego w częstościach oddziaływania I typu dostajemy:

$$\begin{aligned} \Delta k &= k_{z,o}(\omega_{1}, k_{\perp,1}^{2}) + k_{z,o}(\omega_{2}, k_{\perp,2}^{2}) - k_{z,e}(\omega, k_{x}, k_{y}^{2}) \end{aligned} \tag{B.5} \\ &= 2k_{z,o}(\omega_{0}) - k_{z,e}(2\omega_{0}) \\ &+ (\beta_{1,o} - \beta_{1,e})(\Delta\omega_{1} + \Delta\omega_{2}) + \frac{\partial k_{z,o}}{\partial k_{\perp}} \left(\Delta k_{\perp,1} + \Delta k_{\perp,2}\right) \\ &+ \frac{1}{2}\beta_{2,o}(\Delta\omega_{1}^{2} + \Delta\omega_{2}^{2}) - \frac{1}{2}\beta_{2,e}\Delta\omega^{2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^{2}k_{z,o}}{\partial k_{\perp}^{2}} \left((\Delta k_{\perp,1})^{2} + (\Delta k_{\perp,2})^{2}\right) \\ &+ \frac{\partial^{2}k_{z,o}}{\partial k_{\perp}\partial\omega}(\Delta k_{1}\Delta\omega_{1} + \Delta k_{2}\Delta\omega_{2}) \end{aligned} \tag{B.6}$$

gdzie pominąłem dyfrakcję oraz walkoff wiązki pompującej, zakładając, że wiazka pompująca jest skolimowana a kąt walkoff'u mały w porównaniu z kątem obserwacji (emisji fluorescencji). Dzięki temu wyrażenie nabiera symetrii cylindrycznej i zależy jedynie od długości wektorów \mathbf{k}_{\perp} . W ten sposób określamy wektor \vec{b} oraz macierz \mathbf{A} ze wzoru (2.60)

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} (\beta_{1,o} - \beta_{1,e}) \\ k_{z,o,0}^{-1/2} \\ (\beta_{1,o} - \beta_{1,e}) \\ k_{z,o,0}^{-1/2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \beta_{2,o}/2 - \beta_{2,e}/2 & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_{z,o}}{\partial k_\perp \partial \omega} & -\beta_{2,e}/2 & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_{z,o}}{\partial k_\perp \partial \omega} & -k_{o,0}/4k_{z,o,0}^{3/2} & 0 & 0 \\ -\beta_{2,e}/2 & 0 & \beta_{2,o}/2 - \beta_{2,e}/2 & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_{z,o}}{\partial k_\perp \partial \omega} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 k_{z,o}}{\partial k_\perp \partial \omega} & -k_{o,0}/4k_{z,o,0}^{3/2} \end{bmatrix}$$
(B.7)

na których przeprowadzamy przekształcenia powyżej podanym sposobem.

Bibliografia

- D.T. Smithey, M. Beck, M. Belsley and M.G. Raymer, "Sub-Shot-Noise Correlation of Total Photon Number Using Macroscopic Twin Pulses of Light", Phys. Rev. Lett. 69, 2650, (1992). 5, 9
- [2] M. Vasilyev, S. Choi, P. Kumar, G. Mauro D'Ariano "Tomographic measurement of joint photon statistics of the twin-beam quantum state", Phys. Rev. Lett. 84, 2354, (2000) 5
- [3] D. F. Walls, G. J. Milburn, Quantum optics, Springer, 1994. 5
- [4] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?", Phys. Rev. 47, 777 (1935).
- [5] J. Brojan, J. Mostowski, K. Wódkiewicz, Zbiór zadań z mechaniki kwantowej, PWN 5
- [6] Z.Y Ou, S.F. Periera, H.J. Kimble and K.C. Peng, "Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox for Continuos Variables" Phys. Rev. Lett. 68, 3663, (1992).
- John C. Howell, Ryan S. Bennink, Sean J. Bentley2, R. W. Boyd "Momentum-position realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", arXiv:quant-ph/0309122 15 Sep 2003. 6
- [8] E. Brambilla, A. Gatti, M. Bache, and L. A. Lugiato, "Simultaneous near-field and far-field spatial quantum correlations in the high-gain regime of parametric down-conversion", Phys. Rev. A 69, 023802 (2004) 6, 11, 13, 16
- [9] A. Gatti, R. Zambrini, M. San Miguel, and L. A. Lugiato "Multiphoton multimode polarization entanglement in parametric down-conversion", Phys. Rev. A 68, 053807 (2003) 6
- [10] Bradley M. Jost, Alexander V. Sergienko, Ayman F. Abouraddy, Bahaa E. A. Saleh, and Malvin C. Teich Spatial "Correlations of spontaneously down-converted photon pairs detected with a single-photon-sensitive CCD camera", Opt. Express 2, 81 (1998). 6
- [11] M.I. Kolobov, "The spatial behavior of nonclassical light", Rev. Mod. Phys. 71, 1539 (1999). 6
- [12] D. F. Walls, "Squeezed states of light", Nature **306**, 141, 1983. 6
- [13] R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley, "Observation of Squeezed States Generated by Four-Wave Mixing in an Optical Cavity", Phys. Rev. Lett. 55 2409 1985. 7
- [14] Ling-An Wu, H. J. Kimble, J. L. Hall, and Huifa Wu, "Generation of Squeezed States by Parametric Down Conversion", Phys. Rev. Lett. 57, 2520 (1986).
- [15] P. Grangier, R. E. Slusher, B. Yurke and A. LaPorta, "Squeezed-light-enhanced polarization interferometer", Phys. Rev. Lett. 59, 2153 (1987);
 Min Xiao, Ling-An Wu, and H. J. Kimble, "Precision measurement beyond the shot-noise limit", Phys. Rev. Lett. 59, 278, (1987). 7

[16] H. P. Yuen, J. H. Shapiro and A. Mata, "Optical communication with two-photon coherent states— Part II: Photoemissive detection and structured receiver performance", IEEE Trans. Inform. Theory IT25,(1979)179; Jeffrey H. Shapiro "Optical waveguide tap with infinitesimal insertion loss" Opt. Lett. 5, 351 (1980).

7

- [17] M. W. Maeda, P. Kumar, and J. H. Shapiro, "Observation of squeezed noise produced by forward four-wave mixing in sodium vapor", Opt. Lett. 12 161 1987;
 J. Ries, B. Brezger, A. I. Lvovsky, "Experimental vacuum squeezing in rubidium vapor via self-
 - J. Ries, B. Brezger, A. I. Lvovsky, "Experimental vacuum squeezing in rubidium vapor via selfrotation" Phys. Rev. A68, 025801 (2003). 7
- [18] M. Rosenbluh and R. M. Shelby, "Squeezed optical solitons", Phys. Rev. Lett. 66 153 1991; Ch. Silberhorn, P. K. Lam, O. Weiß, F. König, N. Korolkova, and G. Leuchs, "Generation of Continuous Variable Einstein-Podolsky-Rosen Entanglement via the Kerr Nonlinearity in an Optical Fiber", Phys. Rev. Lett. 86 4267 (2001); M. Margalit, C. X. Yu, E. P. Ippen and H. A. Haus, "Cross phase modulation squeezing in optical fibers ", Optics Express 2 72 (1998); M.E. Anderson, M. Beck, M.G. Raymer and J.D. Bierlein, "Quadrature squeezing with ultrashort pulses in nonlinear-optical waveguides" Opt. Lett. 20, 620 (1995). 7
- [19] R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmutter, R. G. DeVoe, and D. F. Walls, "Broad-Band Parametric Deamplification of Quantum Noise in an Optical Fiber", Phys. Rev. Lett. 57, 691, 1986.
- [20] A. Aspect, P. Grangier and G. Roger, "Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem", Phys. Rev. Lett. 47, 460 (1981);
 Y. H. Shih and C. O. Alley, "New Type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Experiment Using Pairs of Light Quanta Produced by Optical Parametric Down Conversion", Phys. Rev. Lett. 61, 50 (1988);
 Z. Y. Ou and L. Mandel, "Violation of Bell's Inequality and Classical Probability in a Two-Photon Correlation Experiment", Phys. Rev. Lett. 61, 50 (1988); 7
- [21] A. Furusawa, J. L. Sorensen, S. L. Braunstein, C. A. Fuchs, H. J. Kimble, and E. S. Polzik, "Unconditional Quantum Teleportation", Science 282 706 1998; Lev Vaidmann, "Teleportation of quantum states", Phys. Rev. A 49, (1994) 1473;
 S. L. Braunstein and J. Kimble, "Teleportation of Continuous Quantum Variables", Phys. Rev. Lett. 80, (1998) 869. 7, 8
- [22] Holger F. Hofmann and Shigeki Takeuchi, "Quantum phase gate for photonic qubits using only beam splitters and postselection" Phys. Rev. A66, 024308 (2002);
 Kaoru Sanaka et al., "Experimental Nonlinear Sign Shift for Linear Optics Quantum Computation" Phys. Rev. Lett. 92, 017902 (2004); T. B. Pittman et al., "Experimental controlled-NOT logic gate for single photons in the coincidence basis" Phys. Rev. A68, 032316 (2003). 7
- [23] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek, and S. Schiller, "Quantum State Reconstruction of the Single-Photon Fock State", Phys. Rev. Lett. 87, 050402 (2001).
- [24] K. Banaszek, A. Dragan, W. Wasilewski, C. Radzewicz, "Experimental demonstration of entanglement-enhanced classical communication over a quantum channel with correlated noise", Phys. Rev. Lett. 92, 257901 (2004). 7
- [25] D.V.Strekalov, A.V.Sergienko, D.N.Klyshko and Y.H.Shih, "Observation of Two-Photon «Ghost» Interference and diffraction", Phys. Rev. Lett. 74, 3600 (1995).
- [26] Ryan S. Bennink, Sean J. Bentley, and Robert W. Boyd, "«Two-Photon» Coincidence Imaging with a Classical Source", Phys. Rev. Lett. 89, 113601 (2002). 7

- [27] A. Gatti, E. Brambilla, and L. A. Lugiato, "Entangled Imaging and Wave-Particle Duality: From the Microscopic to the Macroscopic Realm", Phys. Rev. Lett. 90, 133603 (2003) 8
- [28] Bahaa E. A. Saleh, Ayman F. Abouraddy, Alexander V. Sergienko, and Malvin C. Teich, "Duality between partial coherence and partial entanglement", Phys. Rev. A 62, 043816 (2000). 8
- [29] A. Gatti, E. Brambilla, M. Bache, and L. Lugiato, "Correlated imaging, quantum and classical", Phys. Rev. A 70, 013802 (2004). 8
- [30] Ryan S. Bennink, Sean J. Bentley, and Robert W. Boyd, "Quantum and Classical Coincidence Imaging", Phys. Rev. Lett. 92, 033601 (2004). 8
- [31] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, and K. C. Peng, "Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox for continuous variables" Phys. Rev. Lett. 68, (1992) 3663-8, 9
- [32] S. Lloyd and S. L. Braunstein, "Quantum Computation over Continuous Variables", Phys. Rev. Lett. 82, 1784, 1999. 8, 9
- [33] T. C. Ralph, "Continuous variable quantum cryptography", Phys. Rev. A 61 010302 2000. 8, 9
- [34] A. Kuzmich and E. S. Polzik, "Atomic Quantum State Teleportation and Swapping" Phys. Rev. Lett. 85, (2000) 5639. 8
- [35] Braunstein, S.L., "Quantum error correction for communication with linear optics" Nature 394, 47 (1998);
 S. Lloyd and J. J.-E. Slotine, "Analog Quantum Error Correction" Phys. Rev. Lett. 80, (1998) 4088. 8, 9
- [36] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J. I. Cirac, and P. Zoller, "Physical implementation for entanglement purification of Gaussian continuous-variable quantum states" Phys. Rev. A 62, (2000) 032304. 8, 9
- [37] D.T. Smithey, M. Beck, M.G. Raymer and A. Faridani, "Measurement of the Wigner distribution and the density matrix of a light mode using optical homodyne tomography: application to squeezed states and the vacuum", Phys. Rev. Lett. 72, 1137, (1994). 9
- [38] M. G. Raymer, D. F. McAlister, and U. Leonhardt, "Two-mode quantum-optical state measurement: Sampling the joint density matrix", Phys. Rev. A 54, 2397 (1996). 9
- [39] A. M. Dawes and M. Beck "Stimultaneous quantum-state measurements using array detection", Phys. Rev. A 63, 040101 (2001). 9
- [40] M. Beck, C. Dorrer and I. A. Walmsley, "Joint Quantum Measurement Using Unbalanced Array Detection", Phys. Rev. Lett. 87, 253601 (2001). 9
- [41] T.Opatrný, N. Korolkova and G. Leuchs, "Mode structure and photon number correlations in squeezed quantum pulses", Phys. Rev. A66, 053813 (2002). 9
- [42] C. Kim and P. Kumar, "Quadrature-Squeezed Light Detection Using a Self-Generated Matched Local Oscillator" Phys. Rev. Lett. 73, 1605 (1994). 9
- [43] R.S. Bennink and Robert W. Boyd, "Improved measurement of multimode squeezed light via an eigenmode approach", Phys. Rev. A 66, 053815, (2003) 9
- [44] W. Wasilewski, K. Banaszek, A.I. Lvovsky, C. Radzewicz, "Decomposing fiber optical quantum parametric amplifier into independent squeezing processes", in preparation 9, 44
- [45] Valentin G. Dmitriev, Gagik G. Gurzadyan, David N. Nikogosyan, Handbook of Nonlinear Optical Crystals, 3rd rev. ed, Springer, 1999. 10

- [46] J.A. Armstrong, N.Bloembergen, J. Ducuing and P.S. Pershan, "Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric", Phys. Rev. 127, 1918, (1962) 10
- [47] Y.B. Band, C. Radzewicz, and J.S. Krasinski, "Sum and Difference Frequency Generation for Broadband Input Fields", Phys. Rev. A49, 517-529 (1994);
 Michał Matuszewski, Wojciech Wasilewski, Marek Trippenbach and Y. B. Band, "Self-consistent treatment of the full vectorial nonlinear optical pulse propagation equation in an isotropic medium", Opt. Comm. 221, 337 (2003). 13, 16
- [48] Samuel L. Braunstein, "Bosonic linear unitary Bogoliubov transformation reduction theorem" arXiv:quant-ph/9904002 v1. 15, 16
- [49] P. Townsend and J. Sutton, "Anomalous Density of States in Thick Superconducting Lead Films", Phys. Rev. Lett. 11 154 (1963). 19
- [50] C. K. Law, I. A. Walmsley, and J. H. Eberly, "Continuous Frequency Entanglement: Effective Finite Hilbert Space and Entropy Control", Phys. Rev. Lett. 84, 5304 (2000). 22
- [51] M. Yamada, N. Nada, M. Saitoh, and K. Watanabe, "First-order quasi-phase matched LiNbO₃ waveguide periodically poled by applying an external field for efficient blue second-harmonic generation", Appl. Phys. Lett. **62** 435 (1993). 31

Spis treści

1	Ws	tęp	5
	1.1	Wzmacniacz parametryczny w literaturze	5
		1.1.1 Zastosowania wzmacniacza parametrycznego	7
	1.2	Pomiar wielomodowego wzbudzenia pola elektromagnetycznego	9
	1.3	Cel i struktura pracy	9
2	Model wzmacnianiacza parametrycznego		10
	2.1	Klasyczny wzmacniacz parametryczny	10
		2.1.1 Przypadek fal monochromatycznych płaskich	10
		2.1.2 Przypadek wiązek quasimonochromatycznych	13
	2.2	Kwantowanie wzmacniacza parametrycznego	17
	2.3	Korelacje	19
	2.4	Przybliżenie jednej pary wąskopasmowych fotonów	21
		2.4.1 Pierwszy rząd rozwinięcia w sile nieliniowości	21
		2.4.2 Gausowskie przybliżenie dopasowania fazowego	23
		2.4.3 Przypadek pompowania koherentnym, ultrakrótkim impulsem	24
		2.4.4 Korelacje przy słabym pompowaniu	24
	2.5	Rozprzestrzenianie się i ewolucja korelacji w trakcie oddziaływania	26
	2.6	Natężenie fluorescencji	31
3	Doświadczalne badanie korelacji		36
	3.1	Kryształy. Typy dopasowania fazowego.	36
	3.2	Wyniki	39
4	Рос	lsumowanie	44
A	Symplektyczność macierzy greena		46
	A.1	przypadek zdegenerowany	46
	A.2	przypadek niezdegenerowany	47
в	Gau	usowskie przybliżenie dopasowania fazowego w BBO typu I	48
Bibliografia			49