

Wahadło torsyjne

Równanie ruchu obrotowego krążka

$$I_0 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M$$

I_0 – moment bezwładności
krążka

M – moment siły

D – moment kierujący

$$M = -D\alpha$$



$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{D}{I_0} \alpha = 0$$

Równanie oscylatora
harmonicznego



$$\alpha = A \sin(\omega t + \varphi)$$

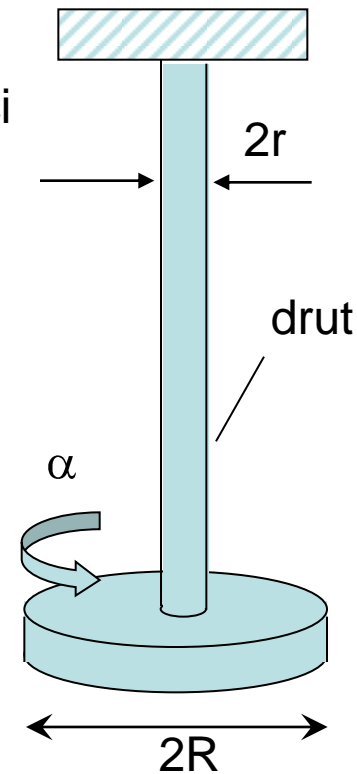
Częstość kołowa

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$$

Okres drgań

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

- 1) Informacja o momencie bezwładności
- 2) Informacja o własnościach sprężystych drutu



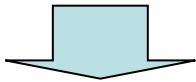
Wahadło torsyjne

Nowy moment bezwładności
z tw. Steinera:

$$I_1 = I_0 + 2\left[m(R - r)^2 + \frac{1}{2}mr^2\right]$$

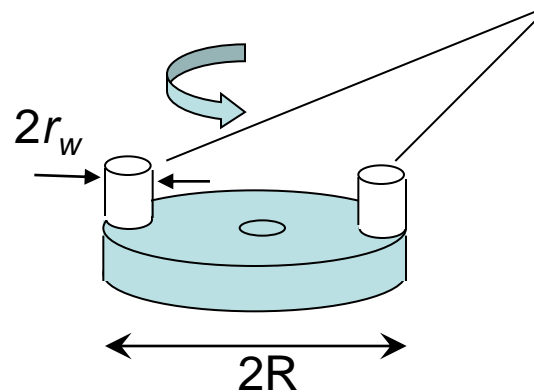
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{D}}$$



Wyznaczając doświadczalnie T_0 oraz T_1
znajdziemy D oraz nieznaną moment
bezwładności I_0

Dwa walce o masie m
Moment bezwładności
walca względem osi
 $I_w = 1/2mr^2$



Podczas drgań wahadła zachodzi odkształcenie drutu polegające na ścinaniu...

Odształcenia sprężyste

Sprężystość (elastyczność) – własność powodująca, że odkształcone ciało dąży do stanu początkowego.

Dla idealnie sprężystych ciał naprężenia w nich wywoływane są jednoznacznymi funkcjami odkształceń.

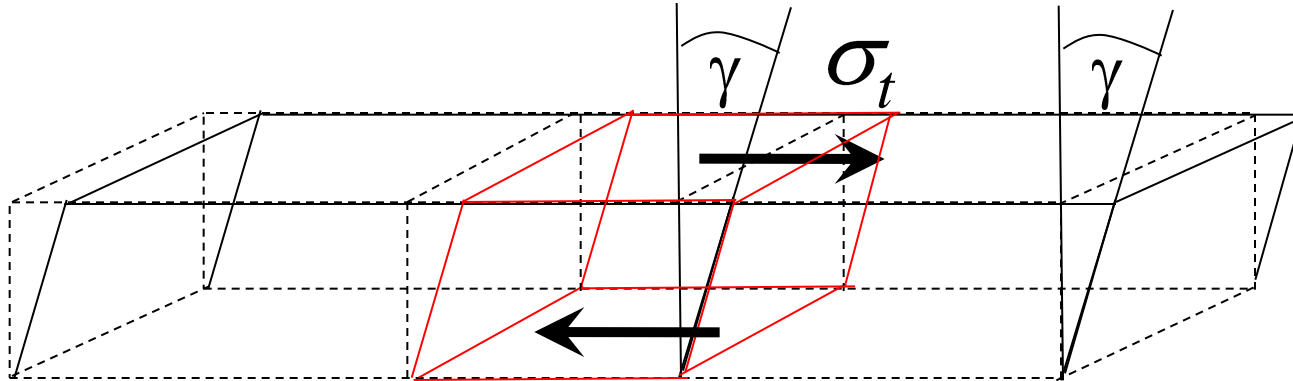
Przy niewielkich odkształceniach własności ciał stałych można opisywać traktując je jak ciała idealnie sprężyste.

Wtedy, jak to wykrył R. Hooke dla prostych odkształceń, odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia.

Ponieważ interesuje nas odkształcenie drutu zajmijmy się najpierw przypadkiem odkształcenia postaci bez zmiany objętości jakim jest tzw. ścinanie...

Ścinanie

Rozważmy kostkę prostokątną przyklejonej do podłoża*



Każdy element górnej powierzchni kostki poddany jest naprężeniu stycznemu...

$$\sigma_t = \frac{F}{S}$$

F – siła działająca stycznie do górnej powierzchni kostki
S – powierzchnia górnej ścianki kostki

Odształcenie kostki polega przesunięciu górnej ścianki w kierunku naprężenia, bez zmiany kształtu tej ścianki. Ścianka przednia i tylna przyjmują kształt równoległoboków, ścianki boczne pochylają się o kąt γ

W tym wypadku prawo Hooke'a ma postać:

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

G – moduł sztywności

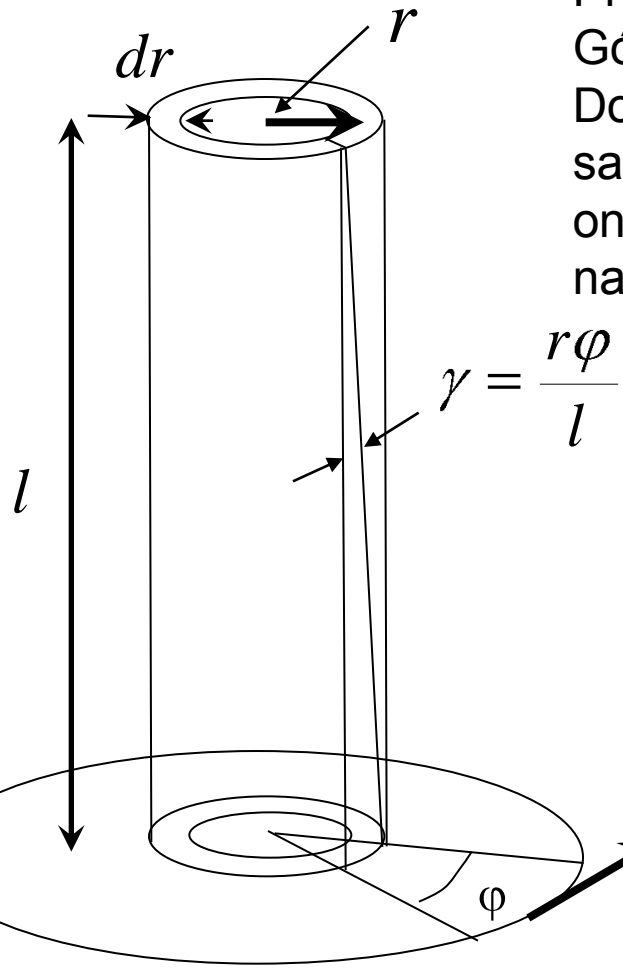
*Aby naprężenia powstające na brzegach nie miały znaczenia wysokość kostki powinna być znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów

Skręcanie (ściananie) pręta

Pręt dzielimy na rurki o promieniu r i grubości dr . Górny koniec rurki jest zamocowany.

Do dolnego końca przykładamy parę sił o tej samej wartości i przeciwnych zwrotach – tworzą one moment skręcający pręt, który równoważą naprężenia ścinające powstałe w pręcie.

Każdy element rurki ulega ścinaniu o kąt γ



$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G} \quad G - \text{moduł sztywności}$$

Ponieważ

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l} \quad \begin{array}{l} \varphi - \text{kąt skręcenia końca} \\ \text{rurki} \\ l - \text{długość rurki} \end{array}$$

Zatem naprężenie ścinające:

$$\sigma_t = \frac{r\varphi}{l} G$$

Skrećanie pręta

Moment sił sprężystości
równoważący moment sił zewnętrznych:

$$dM = \Delta F r$$

$$dM = \sigma_t \Delta S r$$

$$dM = \sigma_t 2\pi r dr r$$

$$dM = \frac{r\varphi}{l} G 2\pi r^2 dr$$

$$dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi r^3 dr$$

F – siła styczna

ΔS – powierzchnia
przekroju rurki

Sumując przyczynki od rurek o różnych promieniach
dostajemy całkowity moment sił sprężystości równoważący
moment sił zewnętrznych

$$M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} \varphi = D \varphi$$

$$D = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} = \frac{G}{l} J$$

D – moment kierujący

J – geometryczny moment bezwładności

$$J = \iint_S r^2 dS = \frac{\pi R^4}{2}$$

Badając drgania torsyjne wahadła fizycznego możemy wyznaczyć moduł sztywności G materiału z którego wykonany jest drut...

Materiał	Moduł sztywności GPa	Współczynnik Poissona GPa
guma	$1.6 \cdot 10^{-3}$	0.46-0.49
miedź	40-48	0.35
stal	82	0.29
wolfram	132	0.17
szkło	17-30	0.2-0.3

Sprężyna

Przy rozciąganiu sprężyny drut, z którego jest ona wykonana ulega “skręceniu” o kąt φ , a koniec sprężyny przesuwa się o Δh

$$\varphi = \frac{\Delta h}{R_s} \quad R_s - \text{promień sprężyny}$$

(Ta część analizy rozciągania sprężyny wymaga dokładniejszego przyjrzenia się problemowi...)

Skręcenie to wywoła pojawienie się momentu siły:

$$M = \frac{\pi r^4}{2} \frac{G}{l} \varphi \quad \begin{array}{l} r - \text{promień drutu} \\ l - \text{długość drutu} \end{array}$$

Moment sił sprężystości równoważy moment siły zewnętrznej F przyłożonej dokładnie wzdłuż osi sprężyny

$$M = R_s F$$

Łącząc powyższe wzory i biorąc pod uwagę, że długość drutu sprężyna wynosi $l = 2\pi N R_s$ (gdzie N – liczba zwojów sprężyny) dostajemy ostatecznie:

$$F = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N} \Delta h \quad F_z = -k\Delta h \quad k = \frac{Gr^4}{4R_s^3 N}$$

Skręcanie wałów napędzających maszyny

Moc przekazywana przez wał:

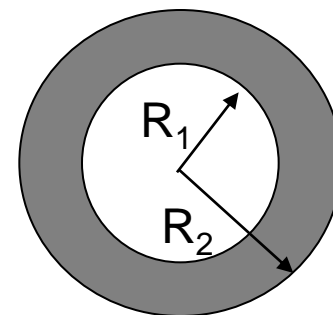
$P=M\omega$ Jak to pokazać?

Dla pręta o przekroju kołowym o promieniu R : $M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{G}{l} J \varphi$ $J = \frac{\pi R^4}{2}$

Zamiast wałów stosuje się czasem rury...Dlaczego???

$$M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{G}{l} \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} \varphi = \frac{G}{l} J_r \varphi$$

$$J_r = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}$$



Jaki powinien być promień zewnętrzny R_2 rury o promieniu wewnętrznym R_1 , aby dawała ona taki sam moment skręcający jak pręt o promieniu R_1

$$\frac{\pi R_1^4}{2} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} \quad \longrightarrow \quad R_2 = \sqrt[4]{2} R_1 \cong 1,19$$
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{2} R_1^2 - R_1^2}{R_1^2} = \sqrt{2} - 1$$

Warto używać pustych wałków!

Rozciąganie drutu

Prawo Hooke'a (obowiązuje dla niewielkich odkształceń)

Wydłużenie względne: $\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

σ - naprężenie normalne
 E - moduł Younga

$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$

$$F_n = SE \frac{\Delta l}{l_0}$$

Przewężenie względne: $\varepsilon_t = -\frac{\Delta d}{d_0}$

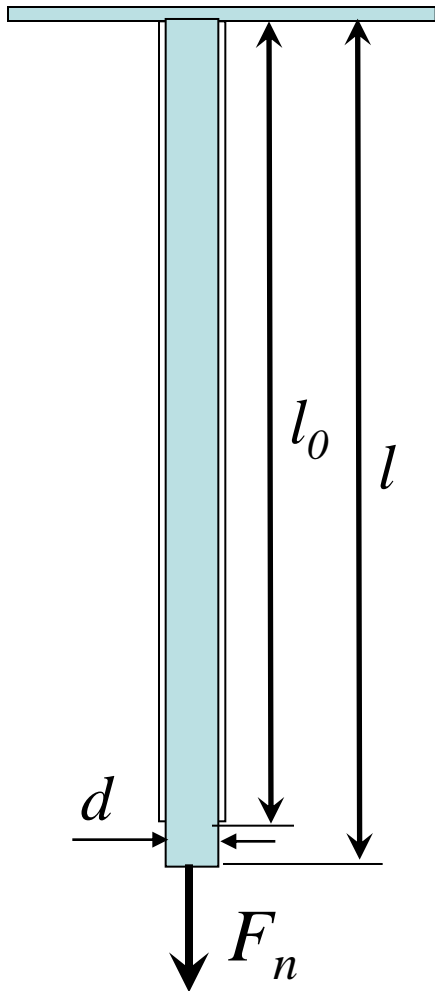
Dla odkształceń sprężystych:

$$\varepsilon_t = \mu \varepsilon$$

lub

$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

μ - współczynnik Poissona



Moduł Younga

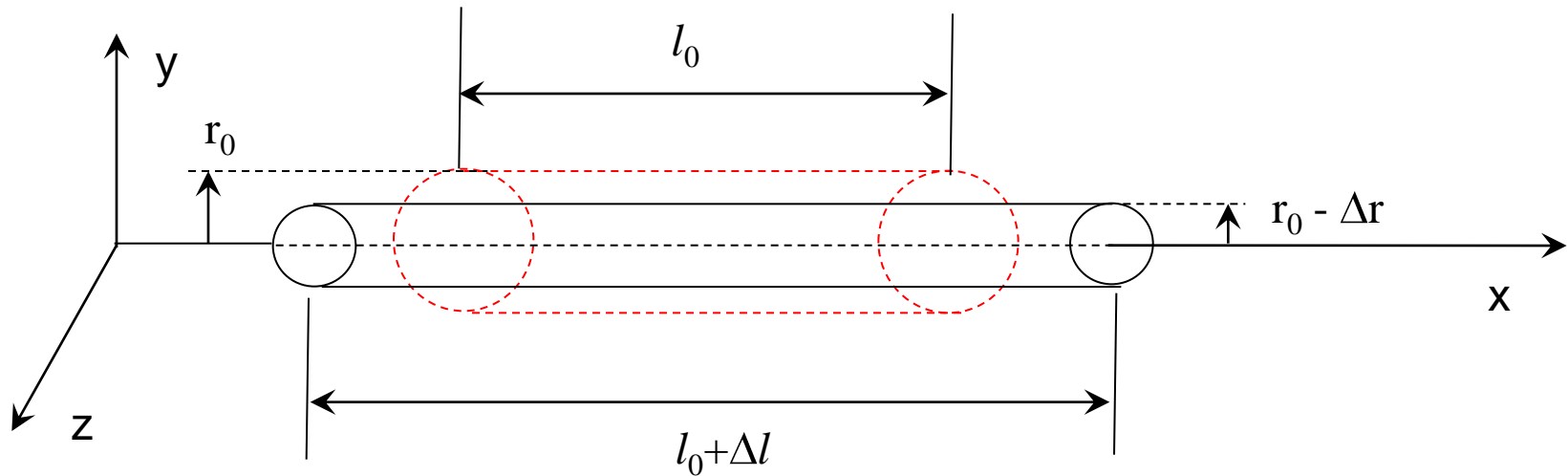
Materiał	Moduł Younga (E) GPa
<u>guma</u>	0,01-0,10
<u>Polietylen</u> (LDPE)	0,2
<u>Polipropylen</u> (PP)	1,5-2,0
Oślonka <u>wirusa</u>	1-3
<u>Poli(tereftalan etylenu)</u> (PET)	2,0-2,5
<u>Polistyren</u> (PS)	3,0-3,5
<u>Nylon</u>	2-4
<u>Drewno dębowe</u> (wzdłuż włókien)	11
<u>Beton</u> wysokiej wytrzymałości (ściskany)	30
<u>Magnez</u> (Mg)	45
Stop <u>glinu</u> (<u>aluminium</u>) (Al)	69
<u>Szkło</u> (<u>SiO₂</u> , <u>Na₂CO₃</u> , <u>CaCO₃</u>)	72

Materiał	Moduł Younga (E) GPa
<u>Szkło</u> (<u>SiO₂</u> , <u>Na₂CO₃</u> , <u>CaCO₃</u>)	72
<u>Mosiadz</u> (<u>Cu</u> , <u>Zn</u>) i <u>Braz</u> (<u>Cu</u> , <u>Sn</u>)	103-124
<u>Tytan</u> (Ti)	105-120
<u>Kompozyt z włókna węglowego</u>	150
<u>Żelazo kute</u> i <u>stal</u>	190-210
<u>Wolfram</u> (W)	400-410
<u>Węglik krzemu</u> (SiC)	450
<u>Węglik tytanu</u> (TiC)	450-650
<u>Miedź</u>	100-115
<u>Cynk</u>	84
<u>Ołów</u>	16
<u>Cyna</u>	47
<u>Nanorurka</u> ^[1]	>1 000
<u>Diamant</u> (C)	1 050-1 200

Współczynnik Poissona

Materiał	μ
Guma	0,46-0,49
Ołów	0,45
Aluminium	0,34
Stal	0,29
Szkło	0,2-0,3
Kwarc	0,2
Wolfram	0,17

Zmiana objętości pręta przy rozciąganiu



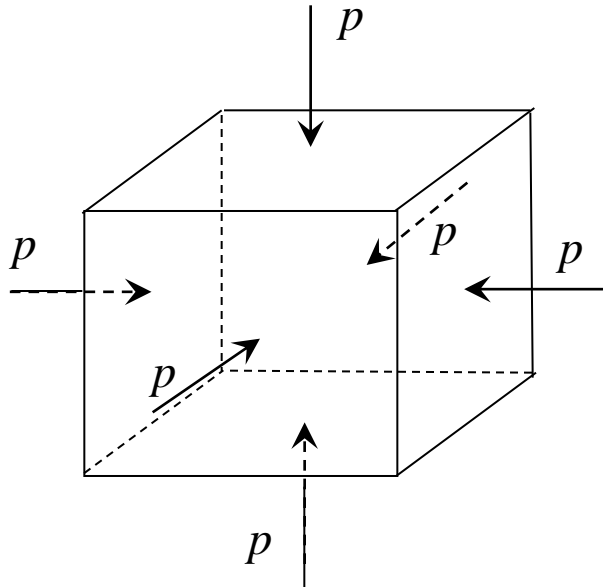
Zmiana objętości przy rozciąganiu:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi(r_0 + \Delta r)^2(l_0 + \Delta l) - \pi r_0^2 l_0 = \\ &\approx \pi r_0^2 l_0 \left(\frac{\Delta l}{l_0} + 2 \frac{\Delta r}{r_0} \right) = V_0 \left(\frac{\sigma}{E} - 2\mu \frac{\sigma}{E} \right) = V_0 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)\end{aligned}$$

Doświadczenie pokazuje*, że $\Delta V/V \geq 0 \implies \mu \leq 1/2$

Odształcenie objętości

Względna zmiana objętości:



$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = -\kappa p$$

$$K = \frac{1}{\kappa}$$

p – ciśnienie
 κ – współczynnik ścisłości
 K – moduł ścisłości

Doświadczenie myślowe:

- każda z krawędzi ulega skróceniu o czynnik **$(1-p/E)$**

- jednocześnie w wyniku działania ciśnienia w kierunku poprzecznym poissonowskim w stosunku **$(1+\mu p/E)(1+\mu p/E)$**

Długość krawędzi po deformacji:

$$l = l_0(1-p/E)(1+\mu p/E)^2$$

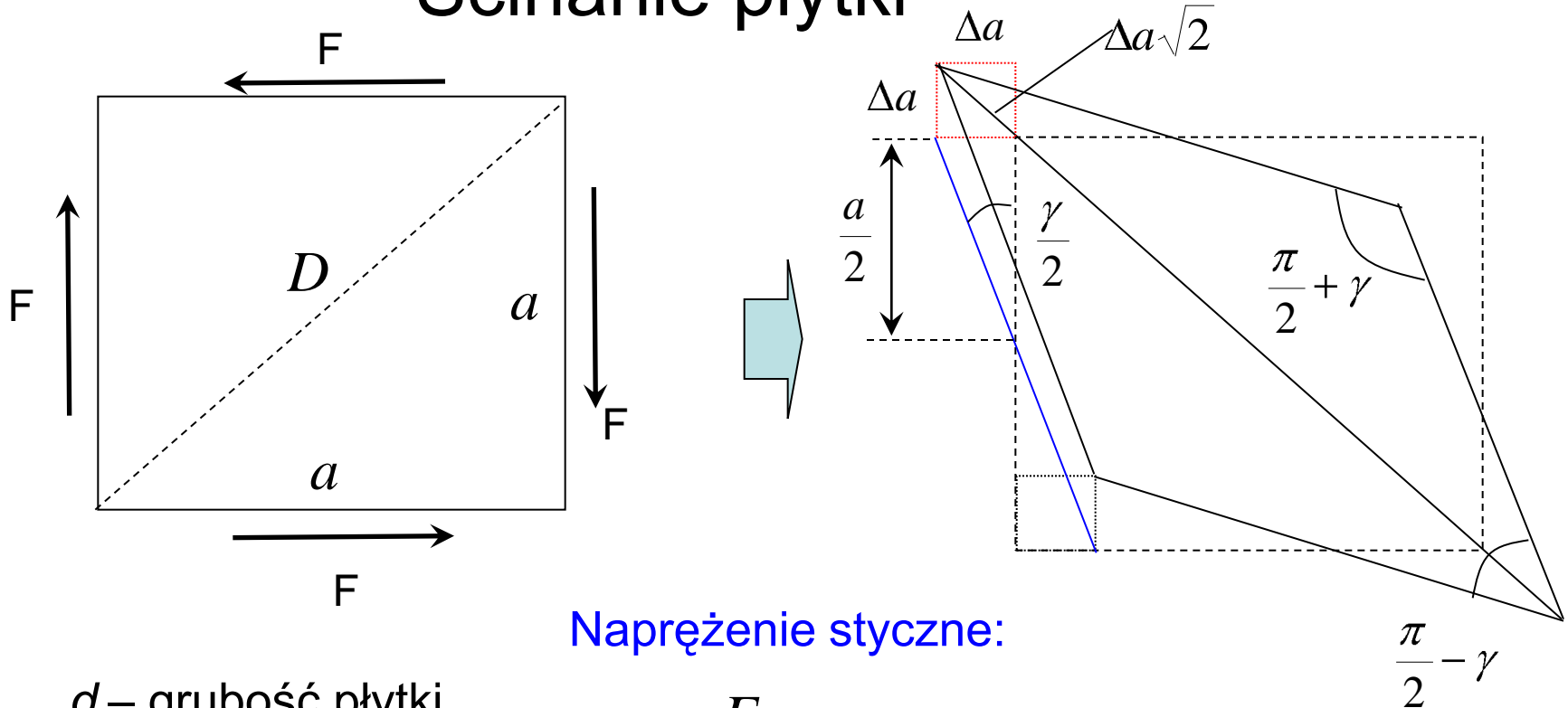
$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

$$V = l_0^3 \left(1 - \frac{p}{E}\right)^3 \left(1 + \frac{\mu p}{E}\right)^6 \cong V_0 \left(1 - 3\frac{p}{E}\right) \left(1 + 6\frac{\mu p}{E}\right) \cong V_0 \left(1 - \frac{3(1-2\mu)}{E} p\right)$$

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3(1-2\mu)}{E} p$$

$$\kappa = \frac{3(1-2\mu)}{E} \text{ lub } K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

Ścinanie płytki



Naprężenie styczne:

d – grubość płytki

$$\sigma_t = \frac{F}{ad}$$

Naprężenie normalne:

$$\sigma_n = \frac{F\sqrt{2}}{ad\sqrt{2}} = \frac{F}{ad} = \sigma_t$$

Czyli naprężenia styczne i normalne są równe w rozważanym przypadku!

Naprężenia normalne rozciągą przekątną

$$\Delta D = 2\Delta a\sqrt{2}$$

Zmiana długości przekątnej:

- rozciąganie „podłużne”
- rozciąganie poissonowskie

$$\Delta D = \frac{\sigma_n}{E} D + \mu \frac{\sigma_n}{E} D$$

$$\Delta D = \frac{1+\mu}{E} \sigma_n D$$

$$(\sigma_n = \sigma_t) \quad \Downarrow$$

$$2\Delta a\sqrt{2} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t a\sqrt{2}$$

$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t$$



$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{\sigma_t}{2G}$$

$$\frac{\sigma_t}{2G} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

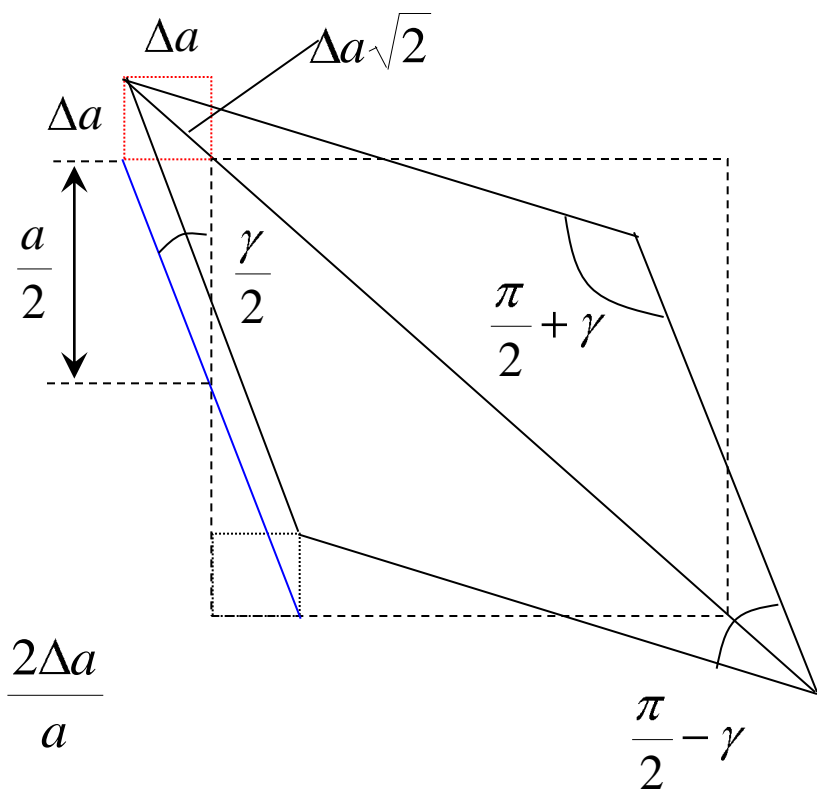
G mniejsze niż E (od 1/3 do 1/2 E)

Naprężenia styczne - zmiana kąta pomiędzy krawędziami płytki

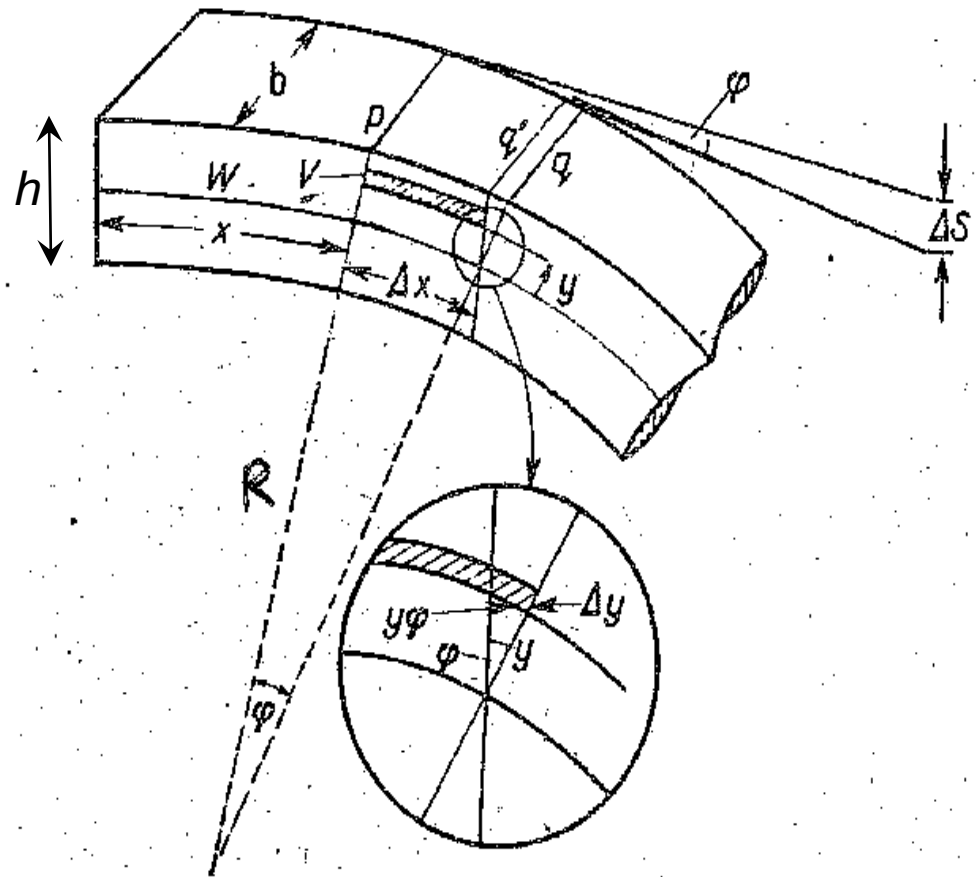
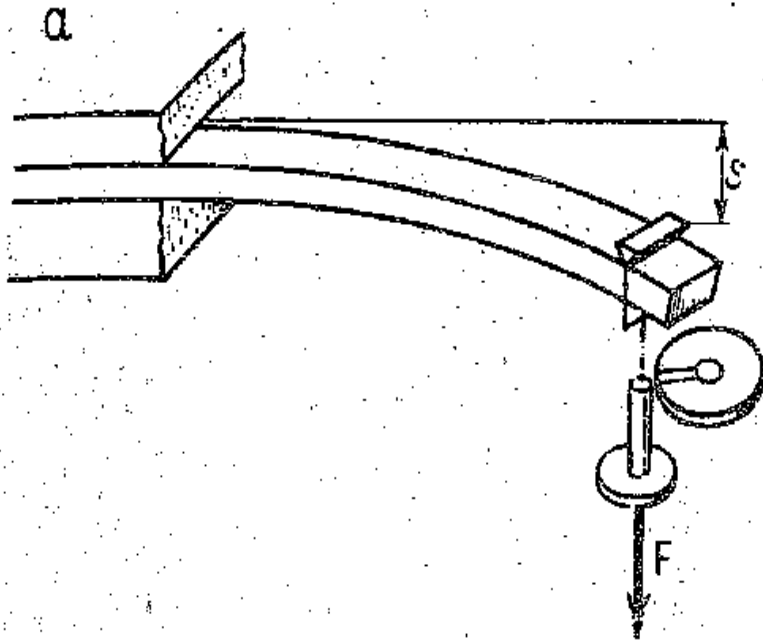
$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

G – moduł sztywności

$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2} = \frac{\Delta a}{a/2} = \frac{2\Delta a}{a}$$



Zginanie belki



- przed odkształceniem przekroje p , q były równoległe (odległe od punktu zamocowania o x , $x + \Delta x$)
- po ugięciu przekroje tworzą kąt φ
- warstwa V znajdująca się w odległości y od warstwy W (neutralnej) wydłuża się o φy
- element belki o długości Δx i grubości Δy i szerokości b jest odkształcany pod wpływem siły $F_n = \sigma \Delta S$

$$\Delta F_n = \sigma \Delta S = E \varepsilon \Delta S$$

Powierzchnia warstwy V :

$$\Delta S = b \Delta y$$

Wydłużenie względne (rysunek):

$$\varepsilon = \frac{\varphi y}{\Delta x}$$

Stąd:
$$\Delta F_n = E \frac{\varphi y}{\Delta x} b \Delta y$$

Moment tej siły względem warstwy W

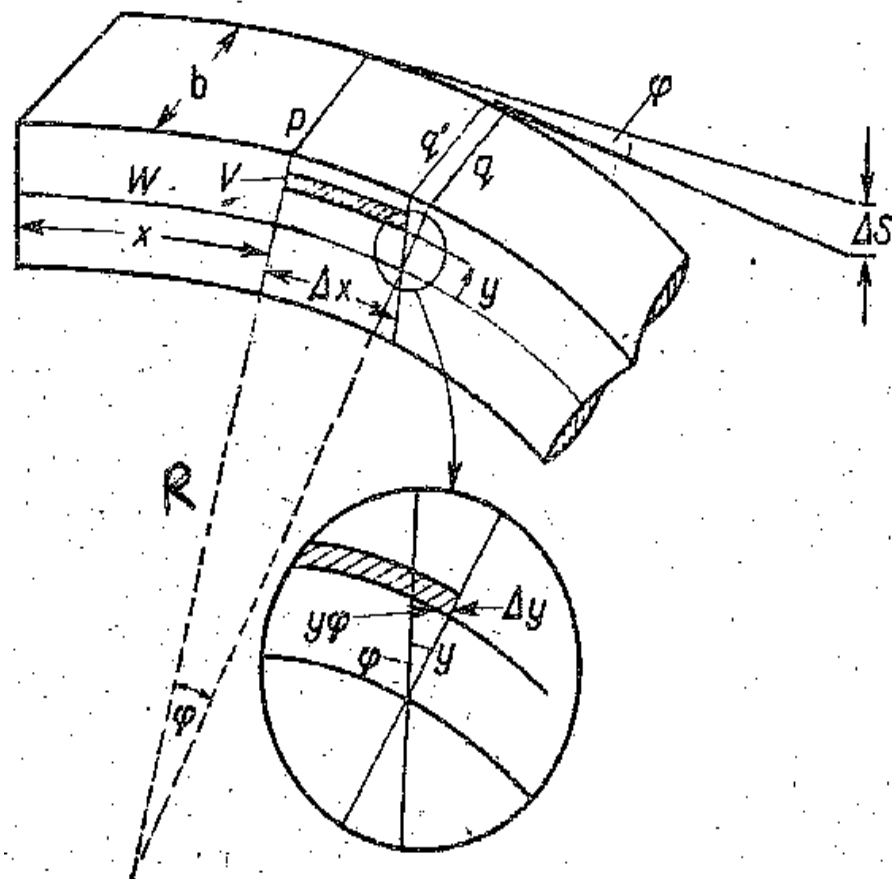
$$\Delta M = y \Delta F_n = E \frac{\varphi}{\Delta x} b y^2 \Delta y$$

Sumując przyczynki od wszystkich warstw mamy:

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = E \frac{\varphi}{\Delta x} J$$

gdzie geometryczny moment
bezwładności

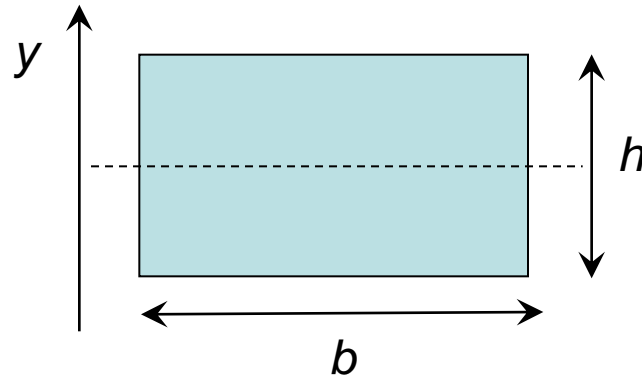
(element powierzchni zamiast masy)



$$J = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy \equiv \int_S y^2 dS$$

Dla belki o przekroju prostokątnym (zginanej prostopadle do h)

$$J = \frac{1}{12}bh^3$$



Moment sił sprężystości
wytworzony w elemencie belki o
długości Δx :

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} J \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{M}{EJ} \Delta x$$

Element belki w odległości x odkształca
moment siły zewnętrznej F

$$M = (l - x)F \quad \Longrightarrow \quad \varphi = \frac{F}{EJ} (l - x) \Delta x$$

Ponieważ pomiędzy stycznymi do belki w punktach p , q wynosi φ , to
przyczynek ΔS do ugięcia belki wyniesie:

$$\Delta S = \varphi(l - x) \quad \Longrightarrow \quad \Delta S = \frac{F}{EJ} (l - x)^2 \Delta x$$

Sumując ugięcia od wszystkich przyczynków Δx dostajemy:

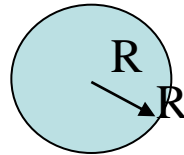
$$S = \frac{F}{EJ} \int_0^l (l-x)^2 dx = \frac{1}{3} \frac{F}{EJ} l^3$$

Dla belki o przekroju prostokątnym:

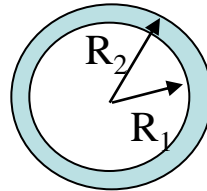
$$J = \frac{1}{12} bh^3 \quad \longrightarrow \quad S = \frac{4}{bh^3} \frac{l^3}{EJ} F$$

Ugięcie zależy od kształtu przekroju!

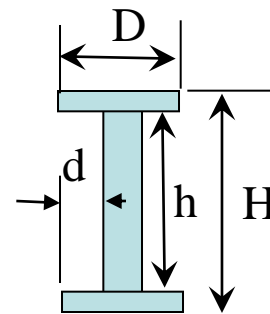
$$J_p = \frac{\pi}{4} R^4$$



$$J_r = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$



$$J_t = \frac{1}{12} (DH^3 - 2dh^3)$$

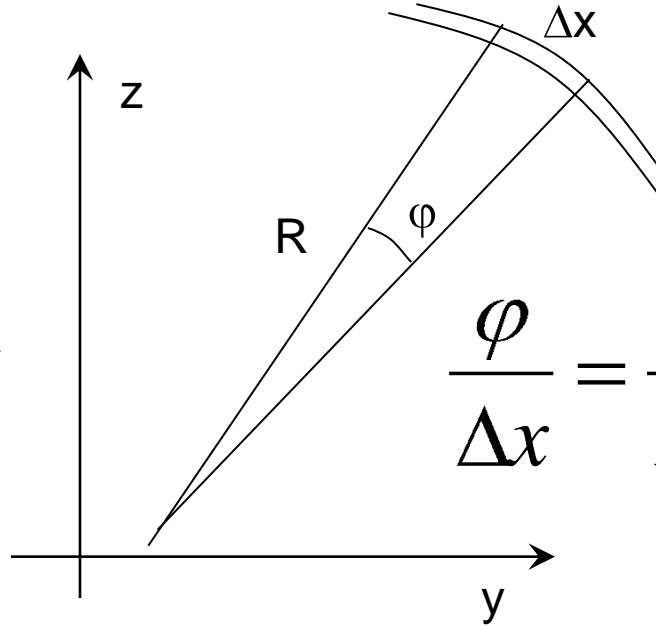


Im większy moment Geometryczny, tym trudniej zginać!
Materiał powinien być więc jak najdalej od osi zginania.
Puste w środku wytrzymalsze?
Mosty, konstrukcje i kości...

Moment siły jeszcze raz...

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} J$$

$$M(x) = \frac{EJ}{R(x)}$$



Promień krzywizny

$$\frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{R}$$

Z matematyki wiadomo, że krzywizna

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Dla małych ugięć:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$M(x) = EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \text{równanie na kształt belki}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{F}{EJ} (l - x) \quad \text{dla } x = 0 \quad z = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

Strzałka ujęcia belki zamocowanej na jednym z końców

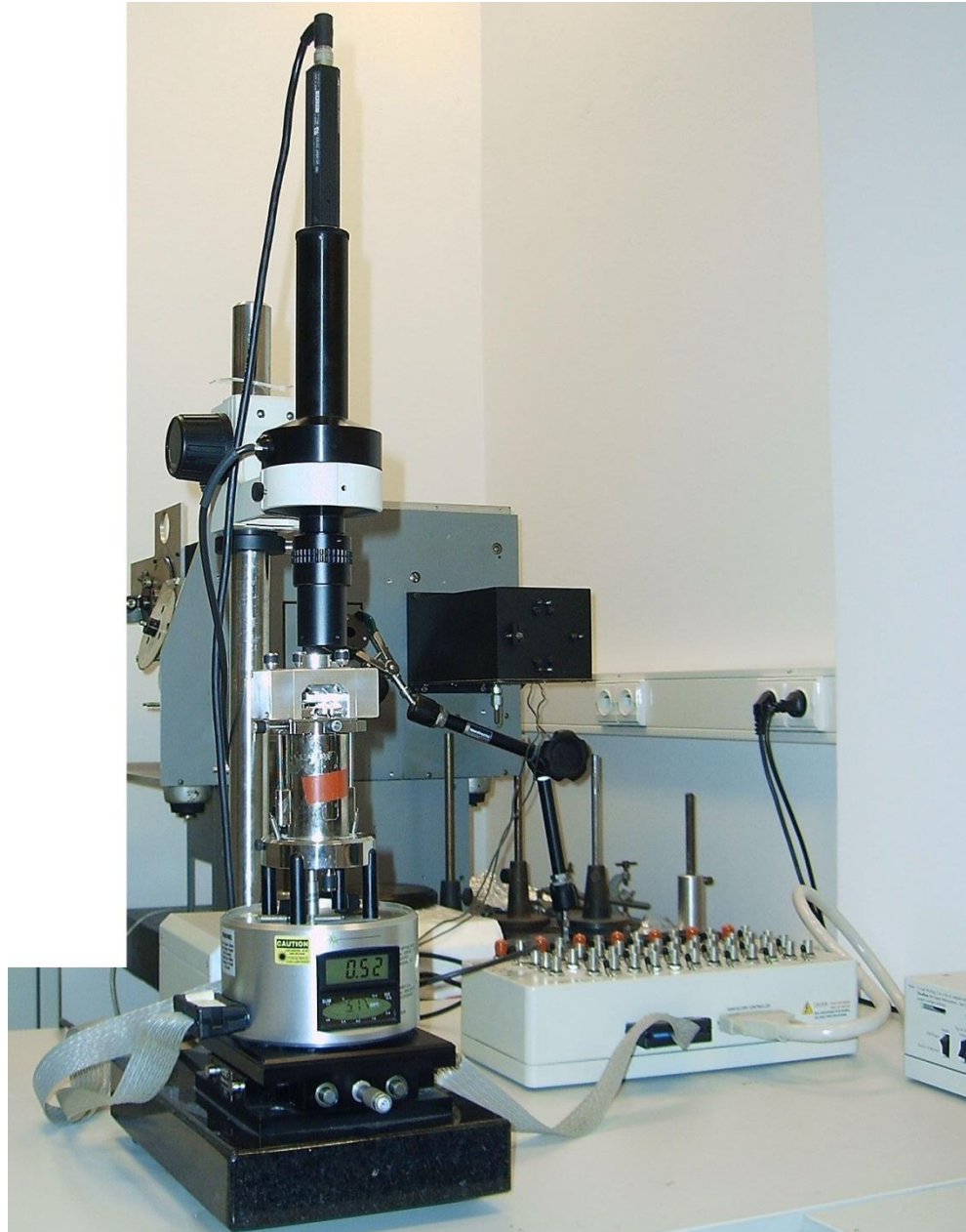
$$z(l) = \frac{1}{3} \frac{F}{EJ} l^3$$

Mikroskop AFM

mikroskop
optyczny
z kamerą

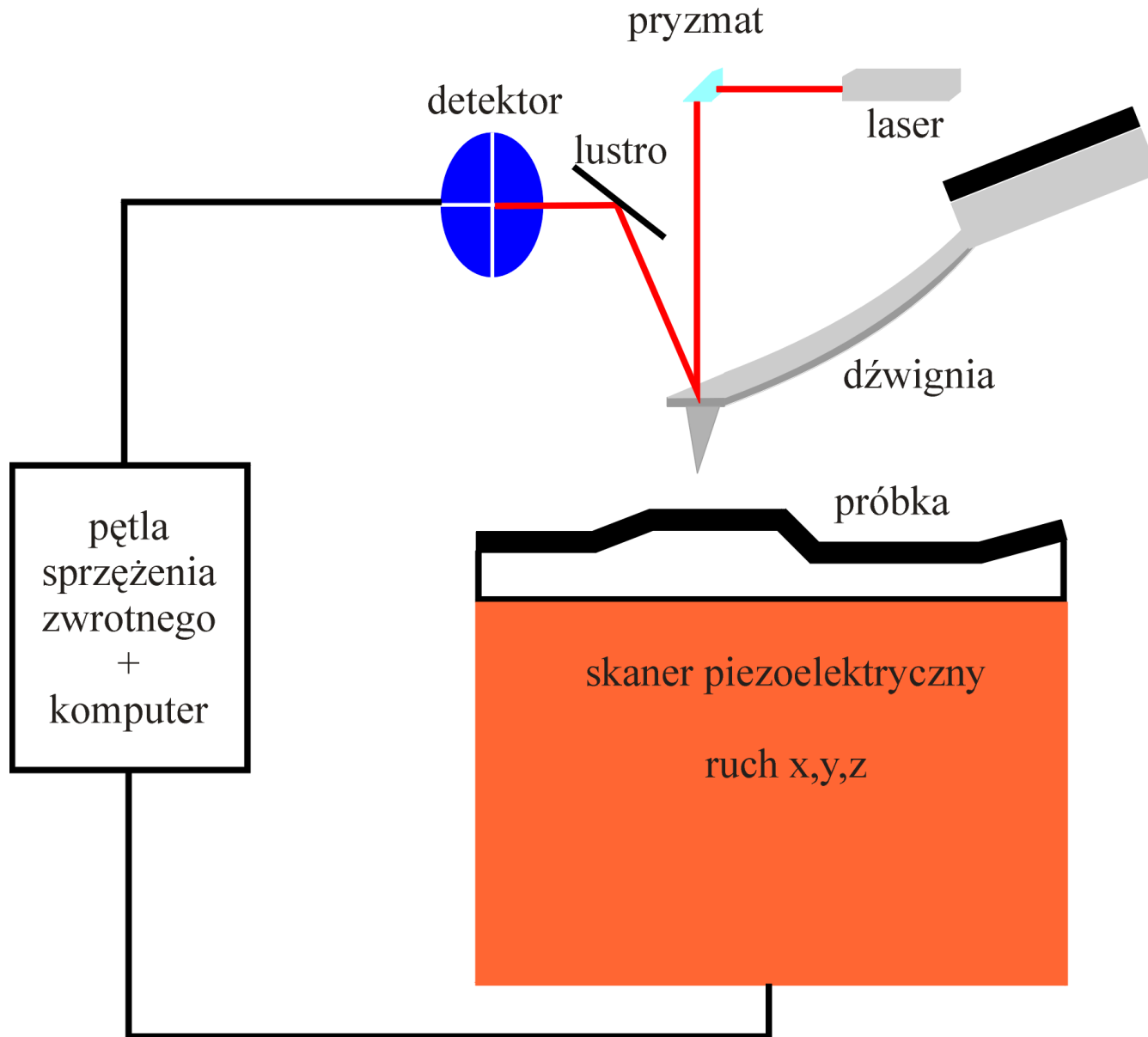
AFM
~25cm

podstawa

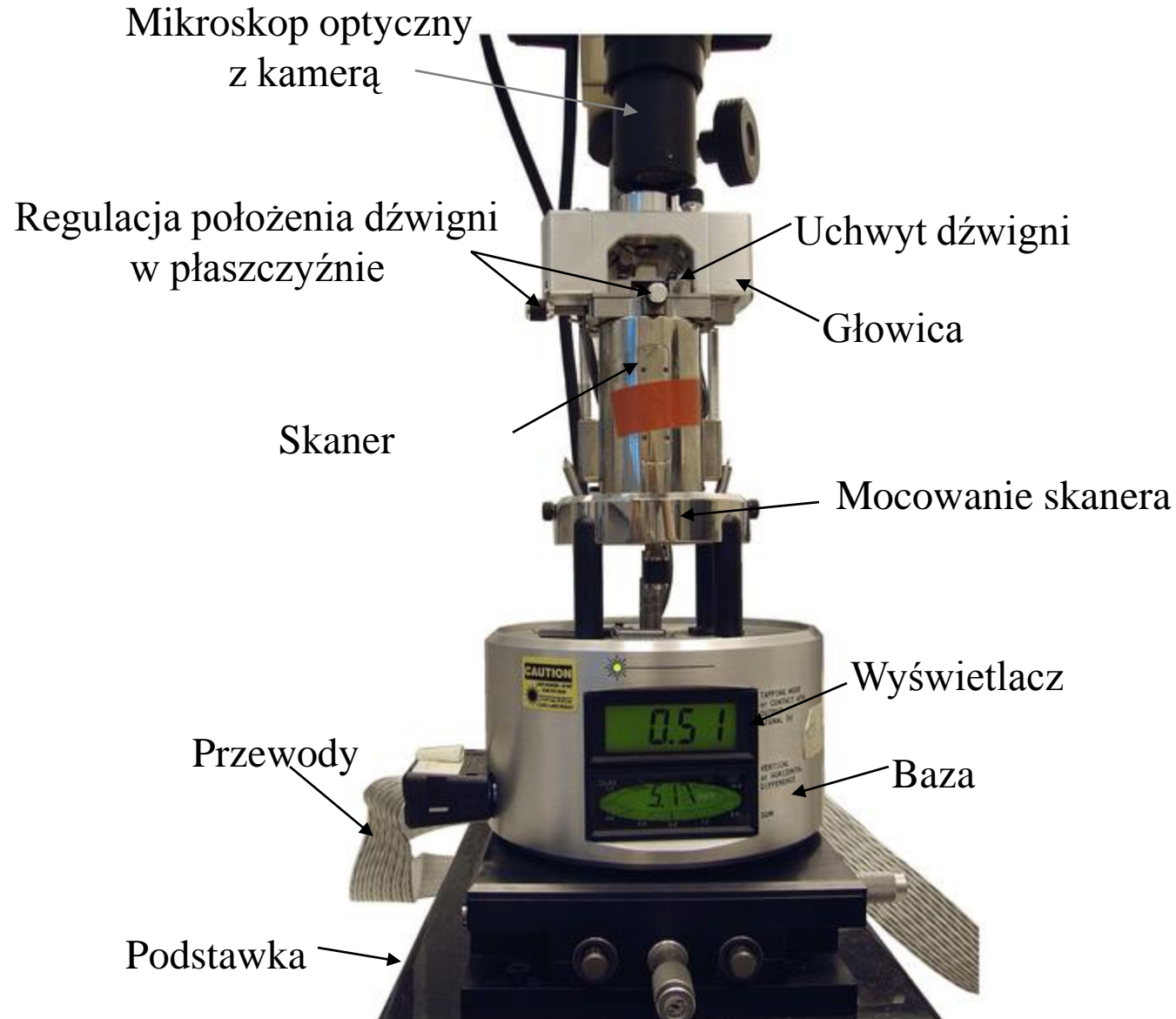


MultiMode AFM
+Nanoscope IIIa
Digital Instruments
(obecnie Veeco)

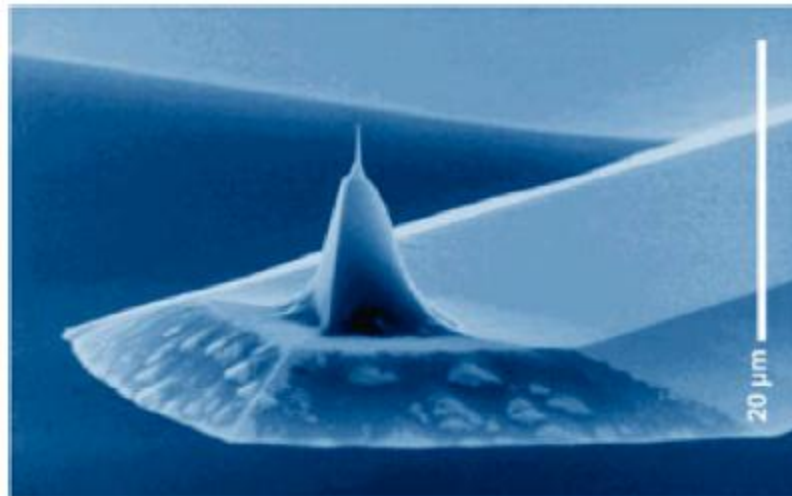
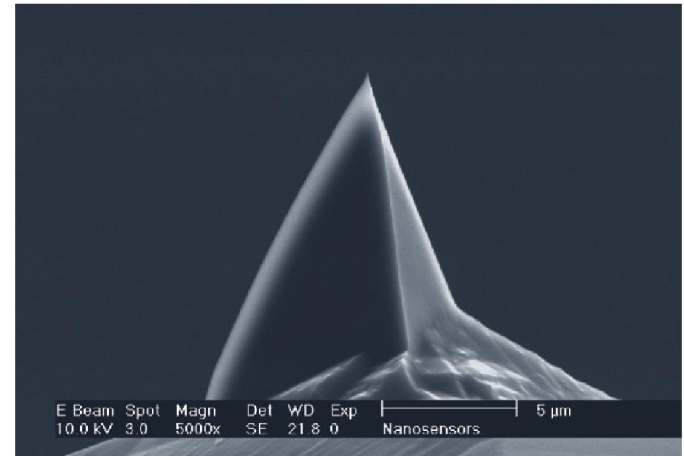
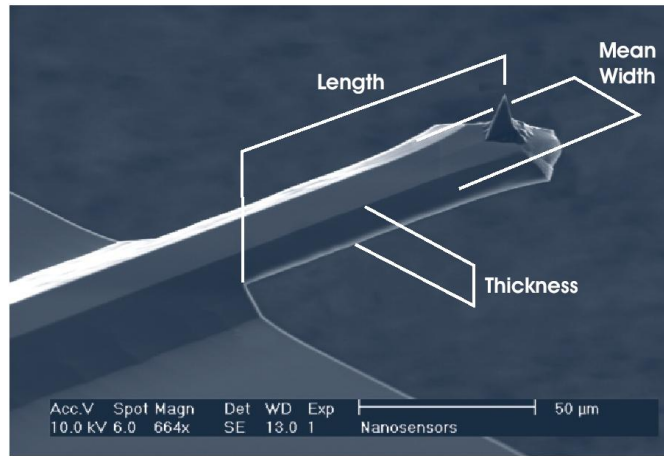
ZASADA DZIAŁANIA MIKROSKOPU SIŁ ATOMOWYCH



Budowa mikroskopu AFM: ruchoma próbka

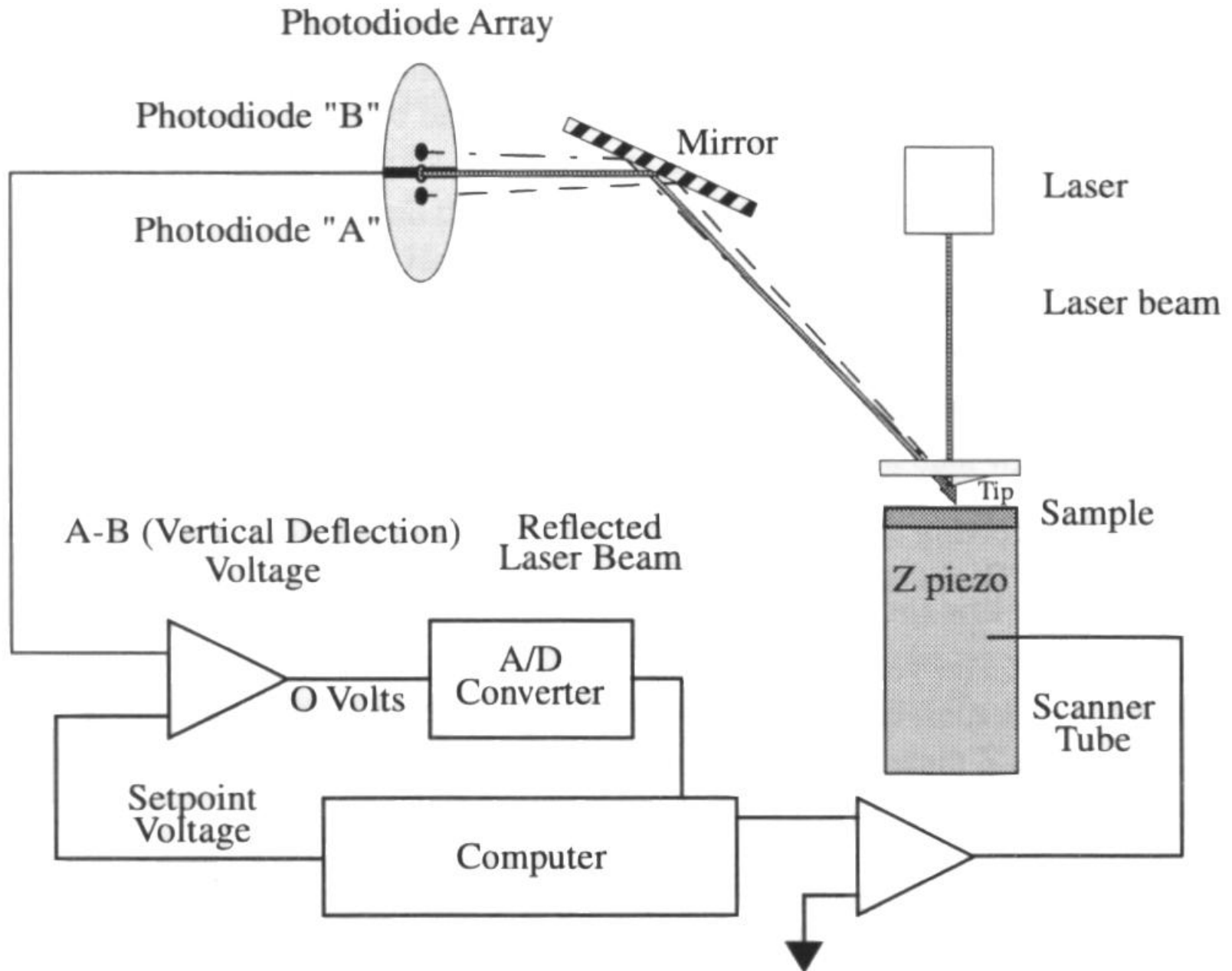


Dźwignia „tapping mode”

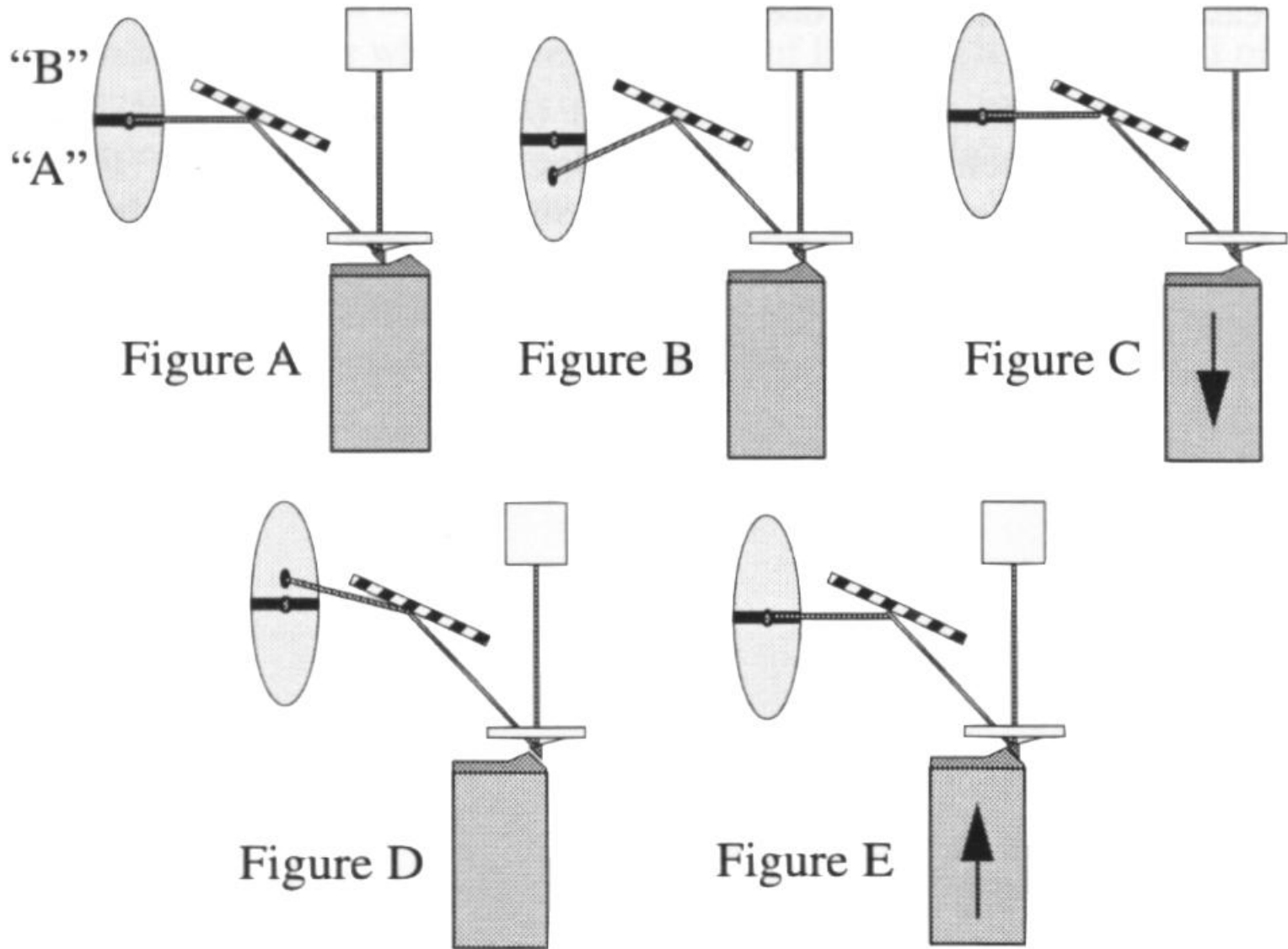


Długość	125 μm
Szerokość	30 μm
Grubość	3 μm
Wysokość	10 μm
Stała sprężystości	100 N/m
Częstość rezonansowa	~300 kHz
Promień krzywizny	10 nm
Kąt rozwarcia stożka	30°

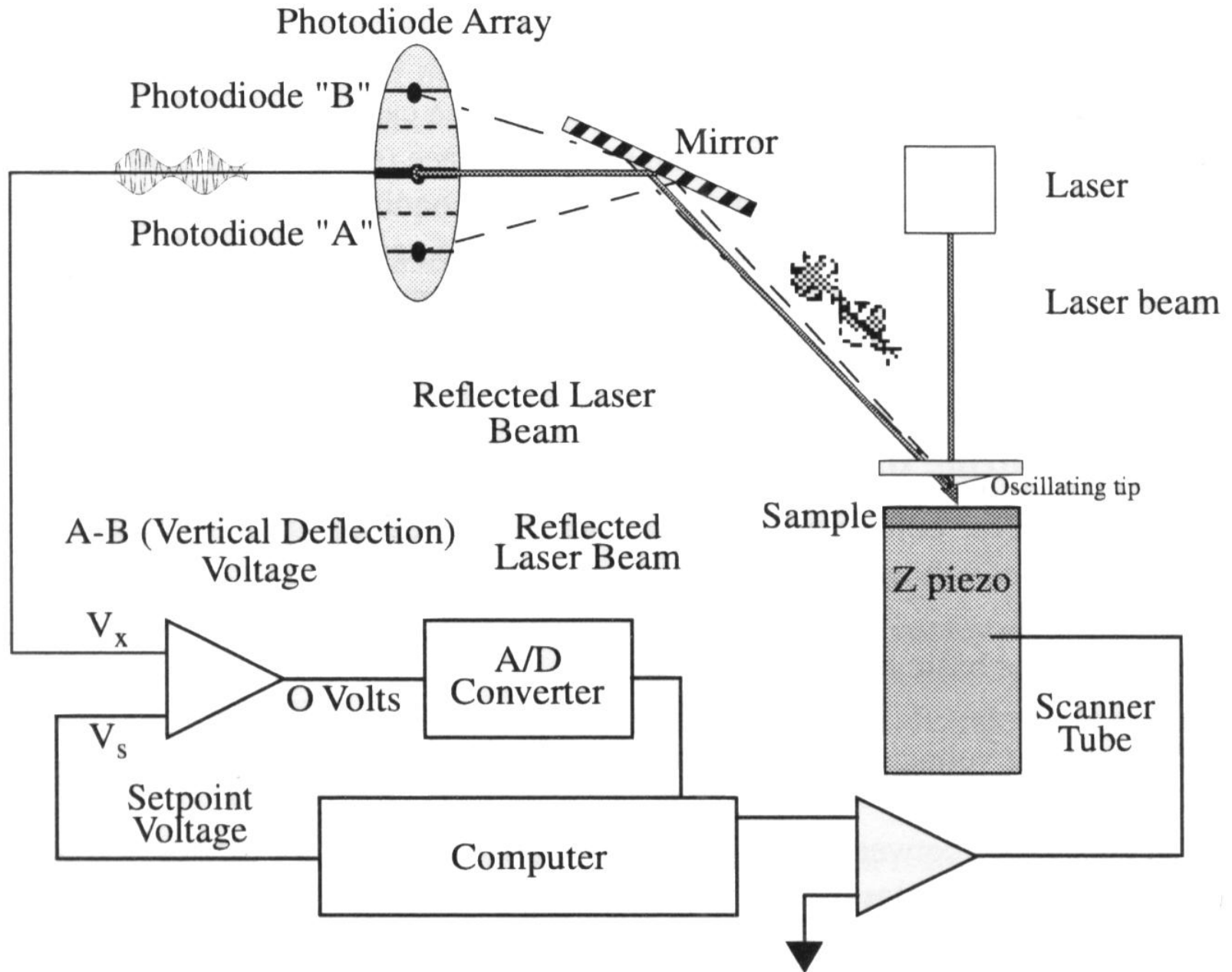
Tryb kontaktowy („contact mode”)



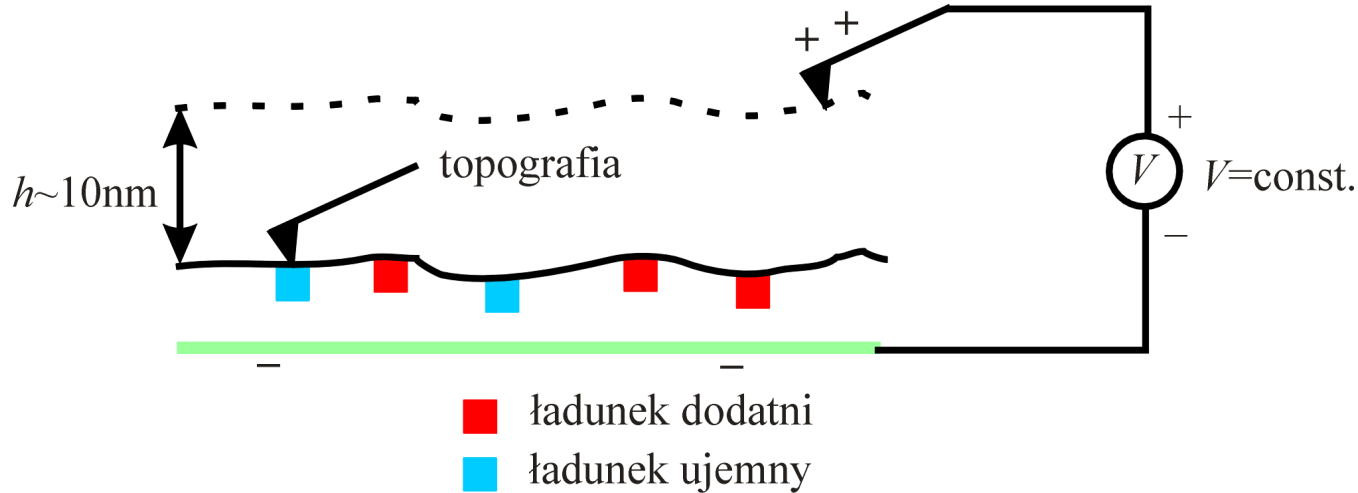
Tryb kontaktowy („contact mode”)



(TappingMode™ AFM)



EFM – Electric Force Microscopy



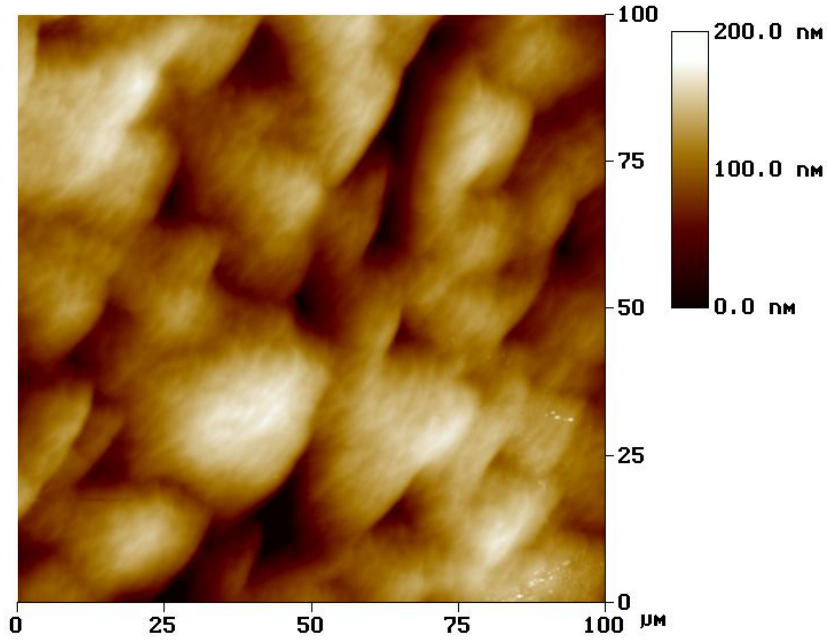
$$F(x) = F(x_0) + \left(-x_0 \frac{\partial F}{\partial x} + \dots \right)$$

$$\Delta f_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{f_0}{k}$$

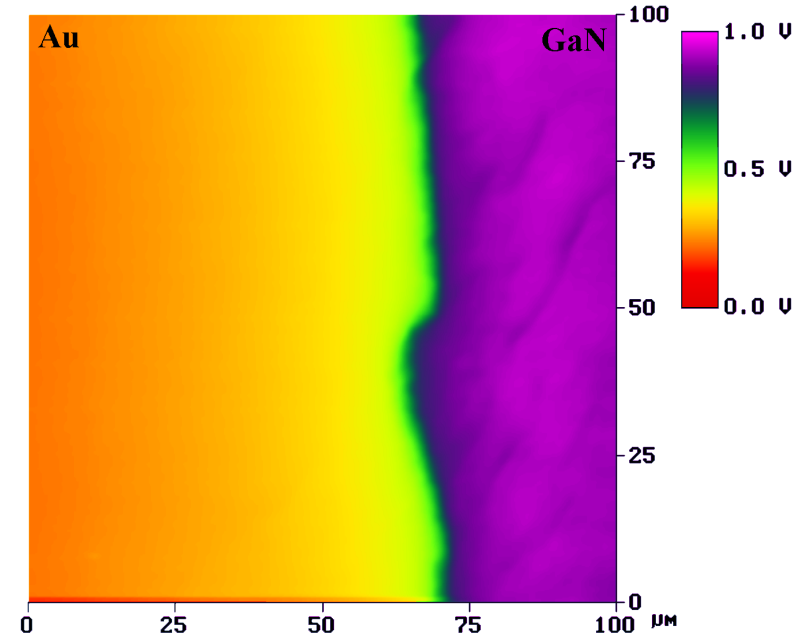
Siła elektryczna (gradient) \Leftrightarrow zmiana częstości rezonansowej

Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

Dioda Schottky'ego Au/GaN



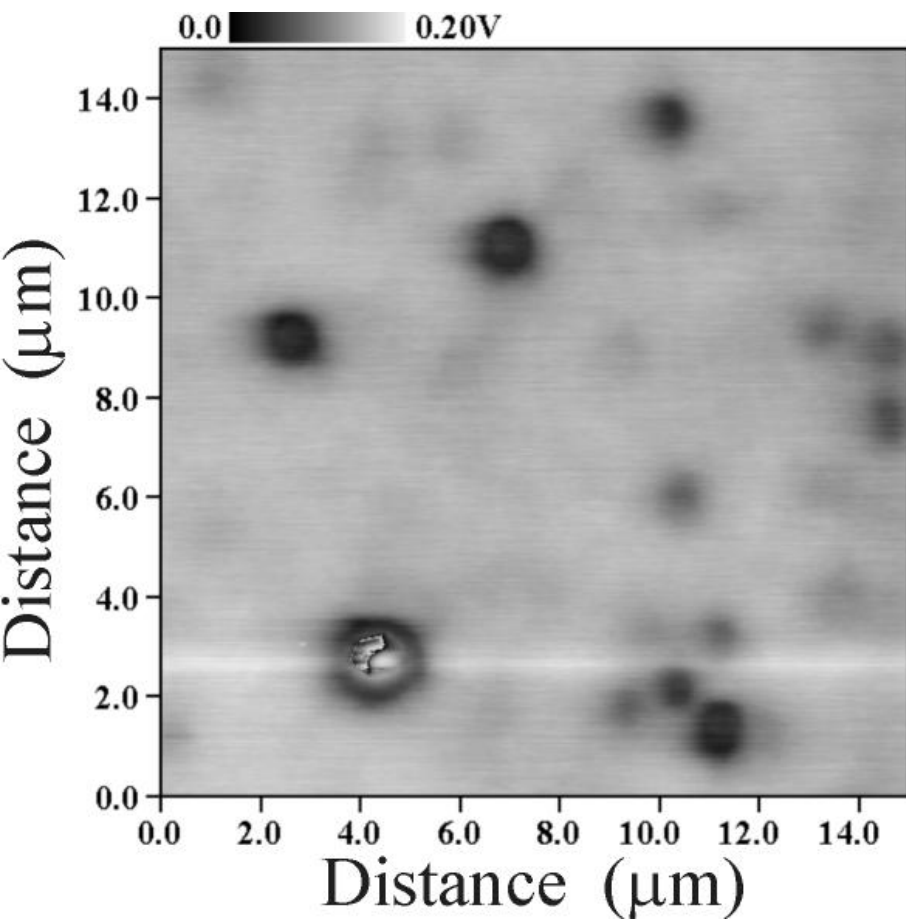
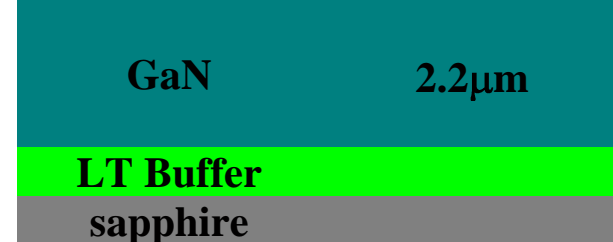
topografia



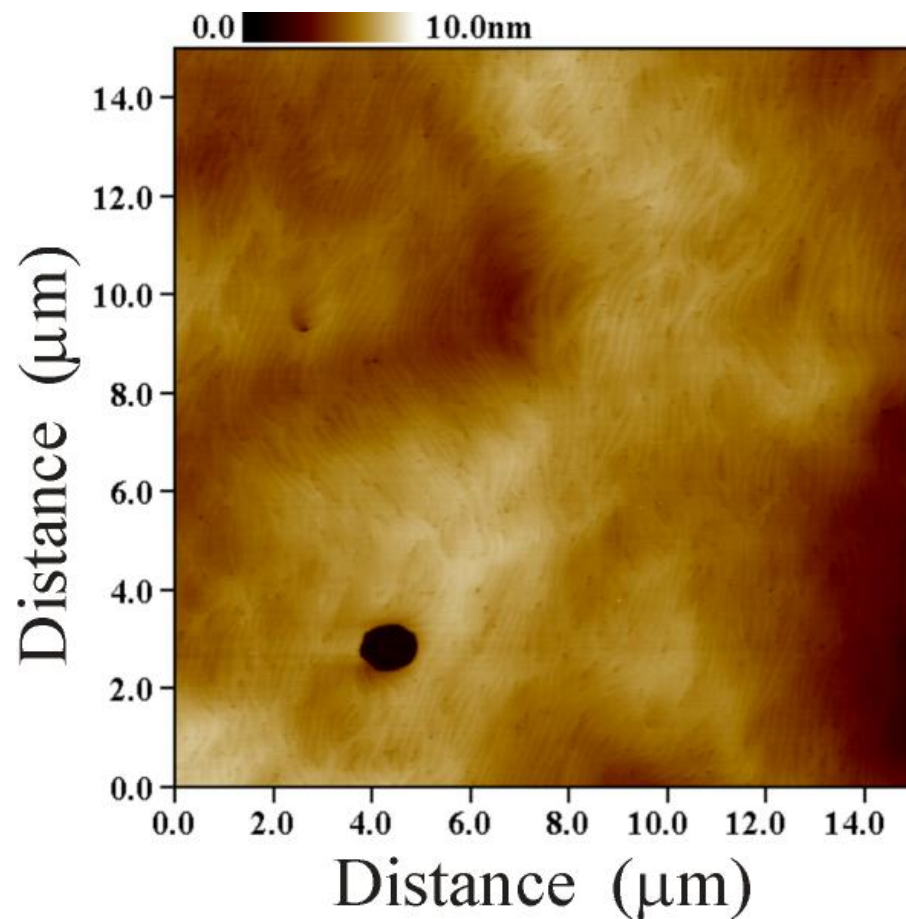
potencjał

granica półprzezroczystej warstwy Au

GaN

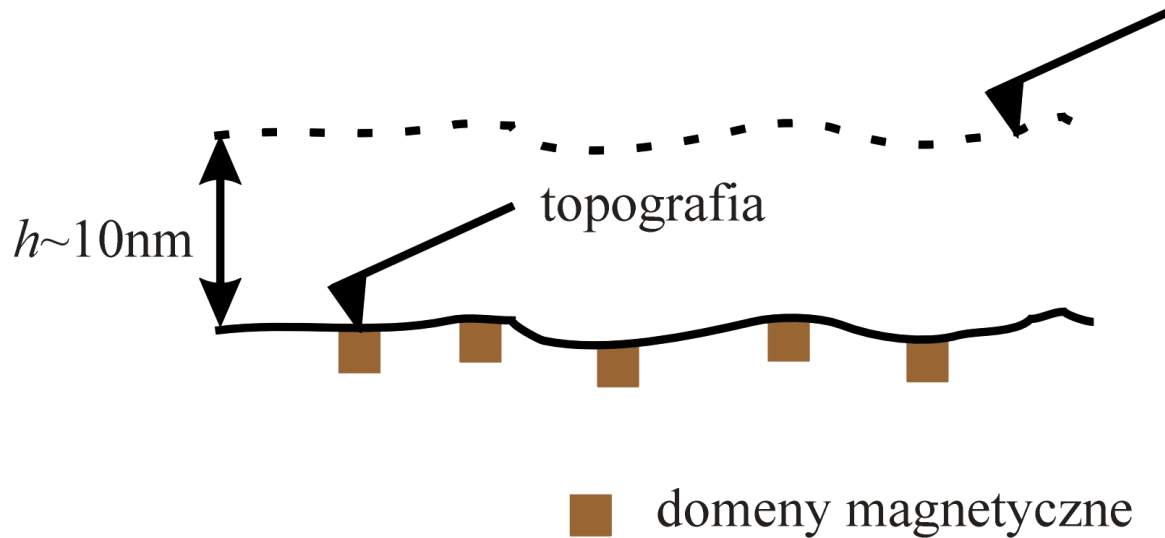


potecjal (KPFM)



topografia (AFM)

MFM – Magnetic Force Microscopy

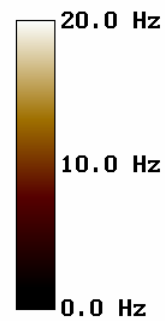
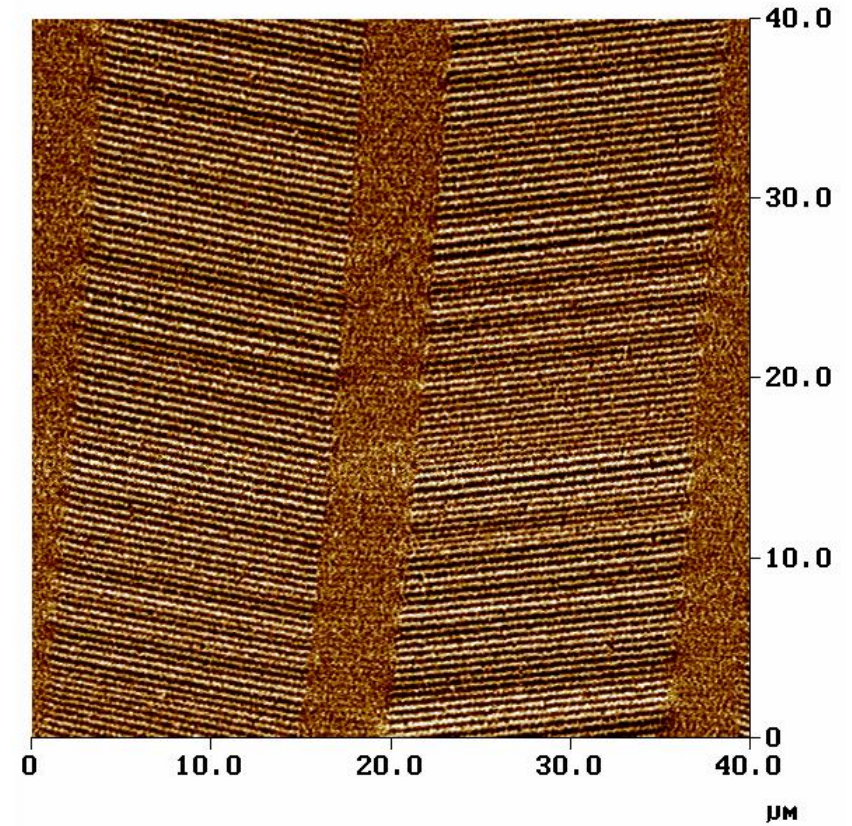
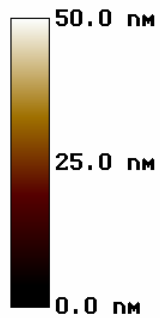
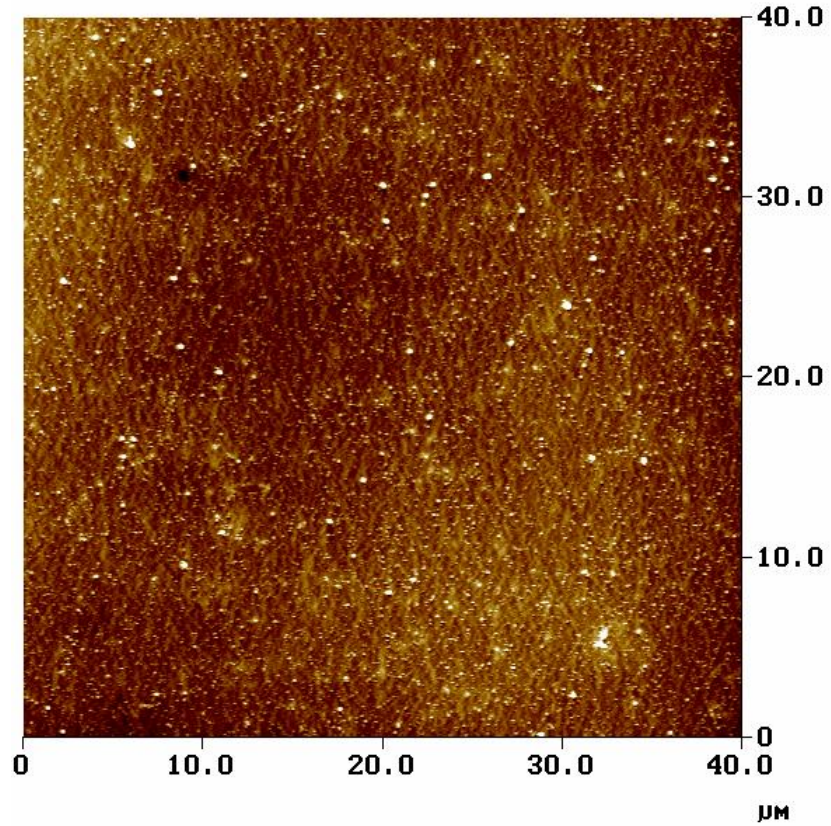


$$F(x) = F(x_0) + \left(-x_0 \frac{\partial F}{\partial x} + \dots \right) \quad \Delta f_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{f_0}{k}$$

Siła magnetyczna (gradient) \Leftrightarrow zmiana częstości rezonansowej

Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

Mikroskop sił magnetycznych (MFM)



Nanorurki węglowe

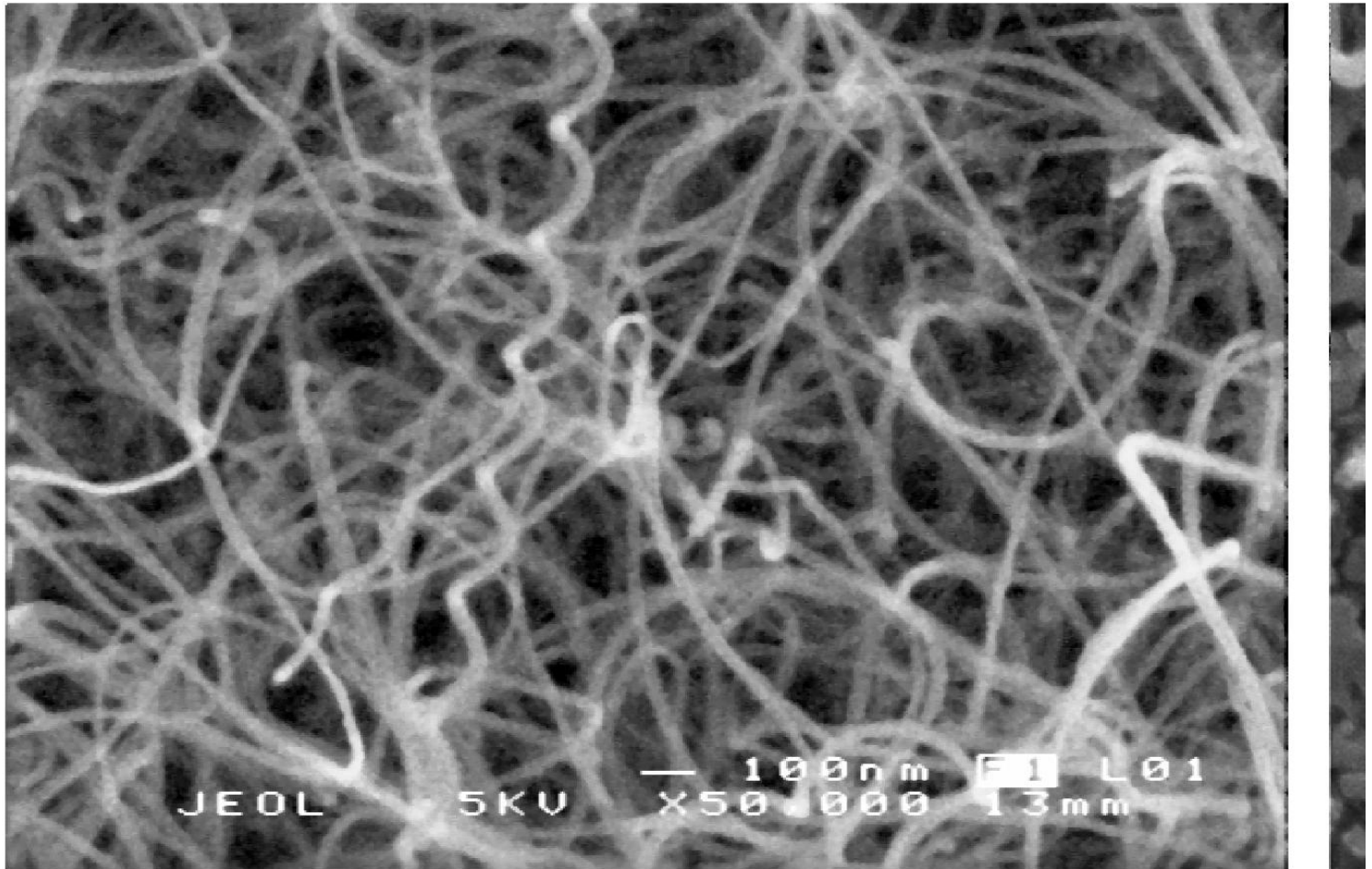


Figure 3. Scanning electron (SEM) micrographs of MWNTs

L. Forro et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes,*

Moduł Younga dla nanorurki

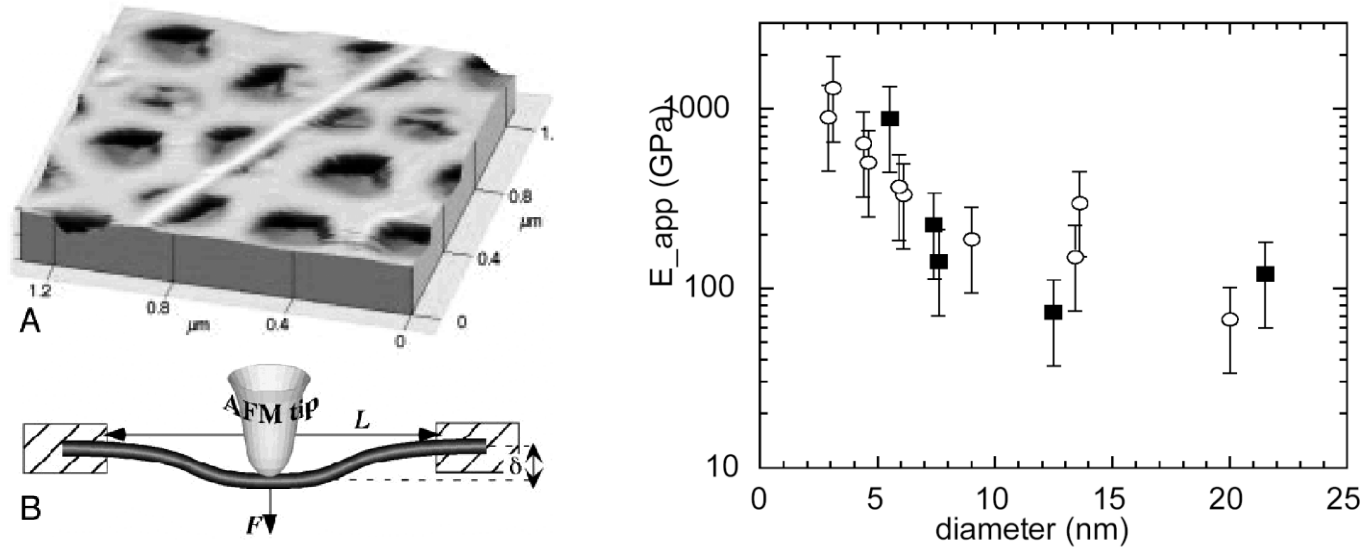


Figure 5. Dependence of the apparent Young's modulus (E_{app}) on the diameter of SWNT bundles measured using AFM. The untreated bundles are represented by the open circles and the hydrogenated and irradiated bundles by the filled squares.

L. Forrero et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes* (Wikipedia)

Palaci

A. Volodin et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 3342 (2000)

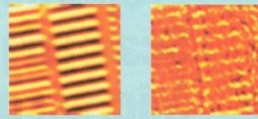
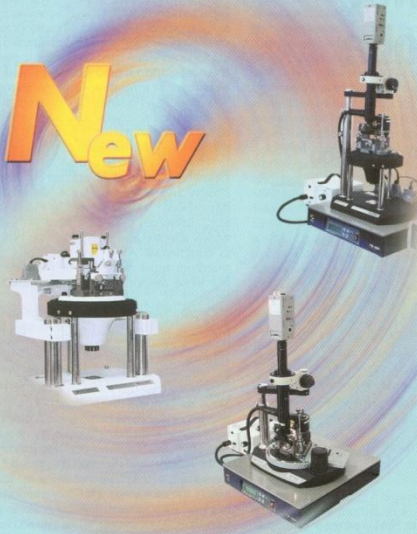
Palaci et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 175502 (2005)

NT-MDT sets new standards for SPM solutions

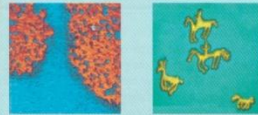


The widest range of Scanning Probe Microscopes and related products

New



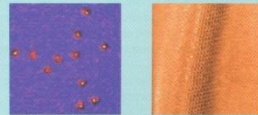
Demagnetization of the hard disk sample with the external magnetic field increase (0, 1520 Gauss). MFM images. Scan size: 30x30µm.



AFM image of composite protein film with areas of different components. Scan size: 3x3 µm.



STM nanolithography image obtained by electrical local probe oxidation technique on ultrathin titanium film. Scan size 2.5x2.5 µm.



Monoclonal antibodies (IgG1 to A-chain of ricin (IgG1)). Scan size: 270x270x3 nm.



STM image of carbon nanotube deposited on an HOPG substrate. Scan size: 20x20 nm.

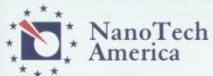


Solver HV

Solver P47H

Solver SNOM

Solver LS



**NanoTech
America**

Distributed through **NanoTech America**:
313 South Jupiter Road, Suite 105
Allen, TX 75002
P: 972-954-8014; F: 972-954-8018; E: info@nt-america.com



NT-MDT
Microwave Drives and Tools for NanoTechnology

For more information, see <http://advertisers.mrs.org>



nanoSurf

Nanosurf® Mobile S The Next Generation AFM



Nanosurf AG
Grammetstrasse 14
CH-4410 Liestal

Tel. +41-61-927 56 46 Fax +41-61-927 56 47

www.nanosurf.com

For more information, see <http://advertisers.mrs.org>



www.veeco-europe.com