Oscylator harmoniczny tłumiony – drgania wymuszone

Oscylator swobodny tłumiony $$m\frac{d^2x}{dt^2} + m\Gamma\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{-1/2\Gamma t}\cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad \omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2$$

Jeśli $\frac{1}{2}\Gamma << \omega_0$ $\Longrightarrow$ **Słabe tłumienie:** $e^{-1/2\Gamma t}$ Praktycznie stałe dla jednego okresu, to energia układu praktycznie stała…

Po wielu okresach, zanik wykładniczy :

$$\boxed{E(t) = E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-t/\tau}}$$

Czas zaniku (czas życia oscylatora) $\boxed{\tau = \frac{1}{\Gamma}}$

Czy badając drgania wymuszone oscylatora można uzyskać informacje o czasie życia oscylatora? Tak! Zbadajmy drgania stacjonarne pod wpływem harmonicznej siły wymuszającej…

Drgania stacjonarne oscylatora tłumionego – harmoniczna siła wymuszająca

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} + m\Gamma\frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0\cos(\omega t)} \quad *$$

Szeroką klasę funkcji F(t) możemy przedstawić jako:

$$F(t) = \sum F(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

a potem skorzystać z zasady superpozycji…

Drgania stacjonarne (założenia):

- drgania niestacjonarne wytłumione po czasie kilku τ
- amplituda oscylacji proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej F_0
- przesunięcie fazowe wyznaczone przez przesunięcie fazowe siły wymuszającej

$$x_s(t) = C\cos(\omega t + \varphi) = -C\sin(\varphi)\sin(\omega t) + C\cos(\varphi)\cos(\omega t)$$

$$\boxed{x_s(t) = A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)}$$

Bezpośrednie podstawienie do równania * daje warunki na A i B:

$$\boxed{A = \frac{F_0}{m}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \equiv A_{ab}} \qquad \boxed{B = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2} \equiv A_{el}}$$

$\boldsymbol{A_{ab}}$ – *amplituda absorpcyjna,* $\boldsymbol{A_{el}}$ – *amplituda elastyczna*:

Jak absorbowana jest energia?

Rozważmy uśrednioną w czasie (jednego okresu) moc pobieraną przez oscylator:

$$\boxed{\left\langle P_s \right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} P(t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} F(t)\frac{dx_s}{dt}dt}$$

$$F(t) = F_0\cos(\omega t)$$

$$x_s(t) = A_{ab}\sin(\omega t) + A_{el}\cos(\omega t)$$

$$\frac{dx_s(t)}{dt} = \omega A_{ab}\cos(\omega t) - \omega A_{el}\sin(\omega t)$$

$$\left\langle P_s \right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} F_0\cos(\omega t)[\omega A_{ab}\cos(\omega t) - \omega A_{el}\sin(\omega t)]dt$$

$$\left\langle P_s \right\rangle = F_0\omega A_{ab}\left\langle \cos^2(\omega t)\right\rangle - F_0\omega A_{el}\left\langle \cos(\omega t)\sin(\omega t)\right\rangle]$$

$$\left\langle \cos^2(\omega t)\right\rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\cos^2(\omega t)dt = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\omega t)\right]dt = \frac{1}{2}$$

Gdyż $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T}\cos(2\omega t)dt = 0$ **Podobnie:** $\displaystyle\left\langle \cos(\omega t)\sin(\omega t)\right\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sin(2\omega t)\right\rangle = 0$

Jak absorbowana jest energia?

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab}$$

$$\boxed{P = P_0 \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}$$

$$P_0 = \frac{F_0^2}{2m\Gamma}$$

Szukamy ω dla których:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} P_0$$

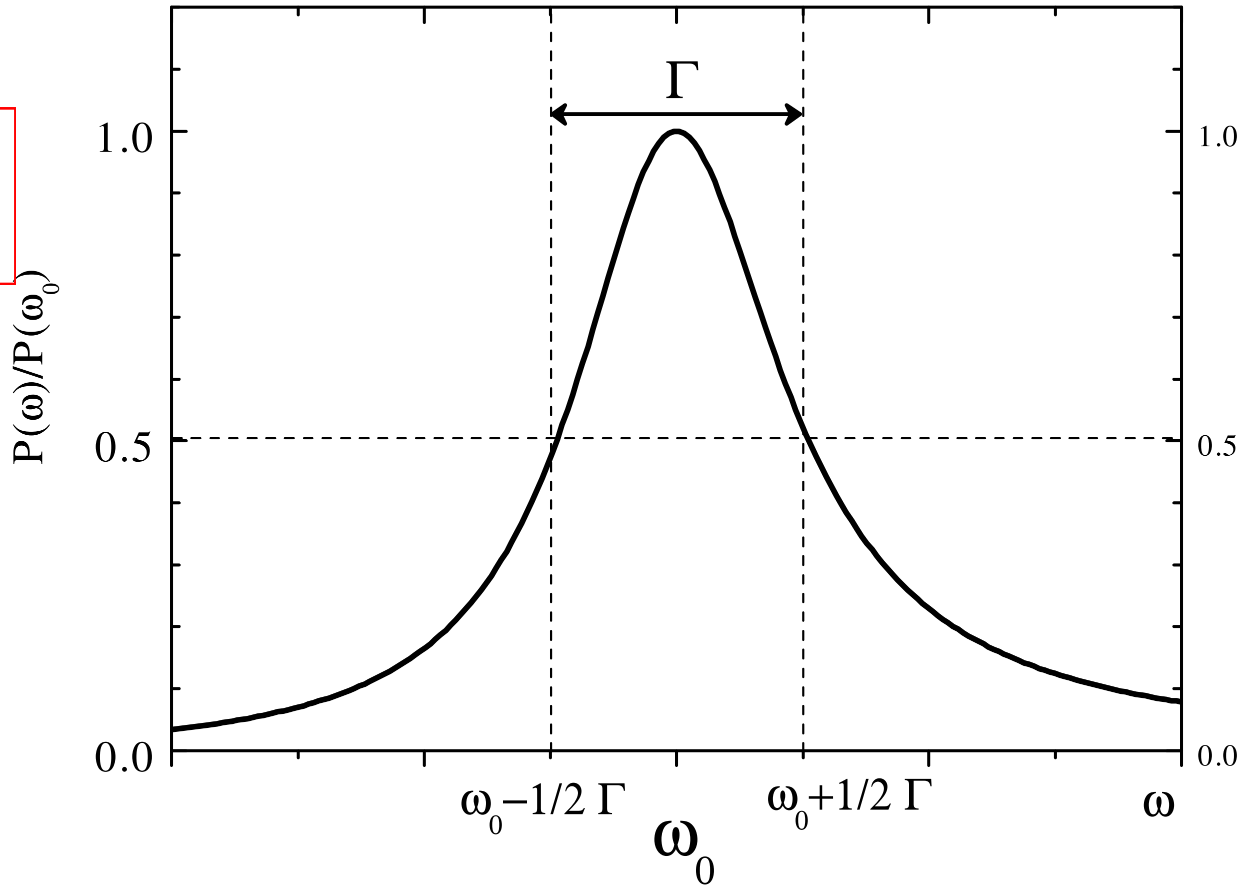
$$\Downarrow$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma \omega$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma}$$

Za absorpcję energii odpowiedzialna jest część przesunięta w fazie o 90^0 (lub $\pi/2$)!



$$\Longrightarrow \quad \boxed{(\Delta\omega)_{rez} = \Gamma \ \text{lub} \ (\Delta\omega)_{rez}\, \tau = 1}$$

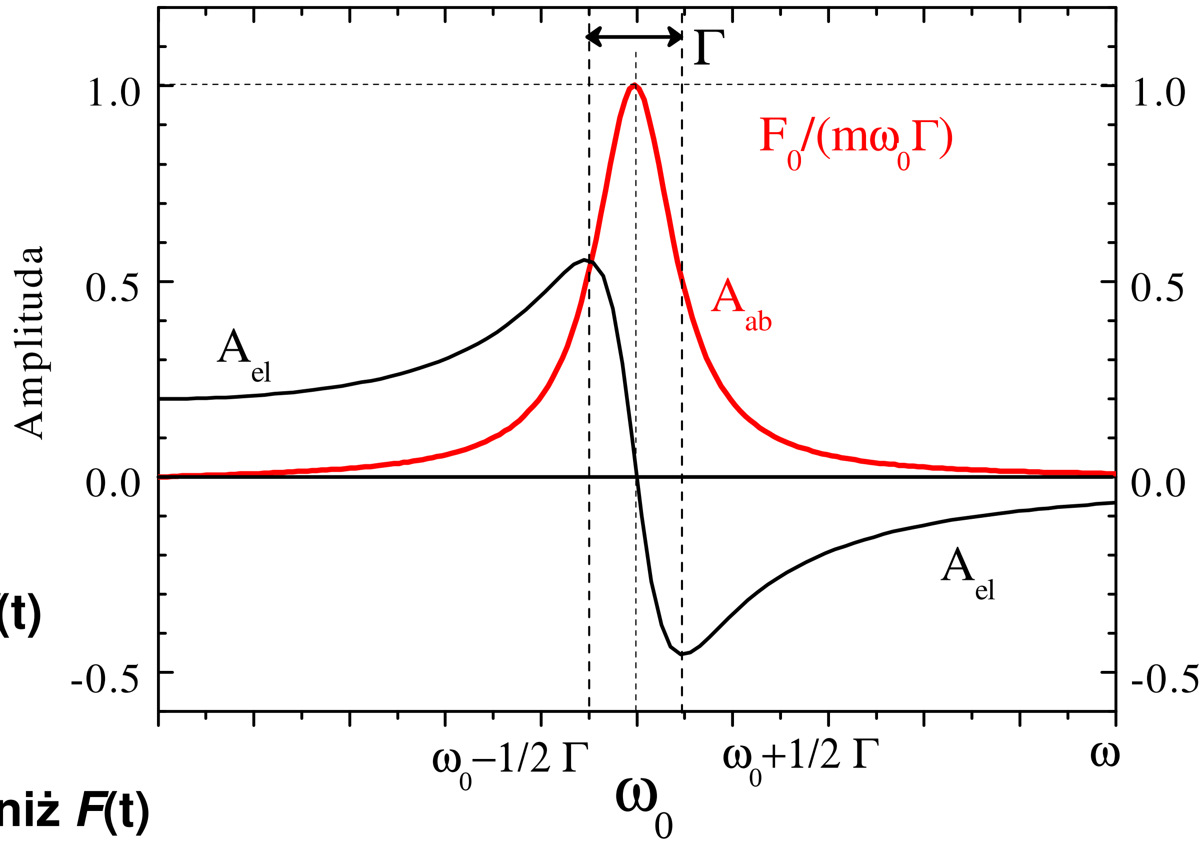
Szerokość krzywej ma związek ze średnim czasem życia tłumionych drgań swobodnych! Ważne dla spektroskopii (rozkład Lorentzowski…)

Amplituda i przesunięcie fazowe

$$A_{ab} = \frac{F_0}{m}\frac{\Gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

$$A_{el} = \frac{F_0}{m}\frac{\omega_0^2-\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\Gamma^2\omega^2}$$

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2-\omega^2}{\Gamma\omega}$$



Daleko od rezonansu…

$$x_s(t) \approx A_{el}\cos(\omega t)$$

$$x_s(t) \approx \frac{F_0\cos(\omega t)}{m(\omega_0^2-\omega^2)}$$

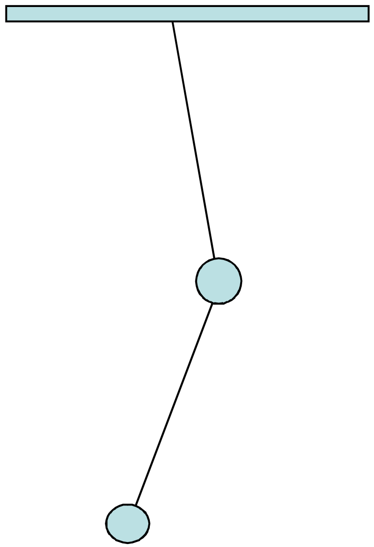
$\omega << \omega_0$ ⇨ **zgodnie z *F*(t) (φ=0)**

$\omega = \omega_0$ ⇨ **φ= π/2**

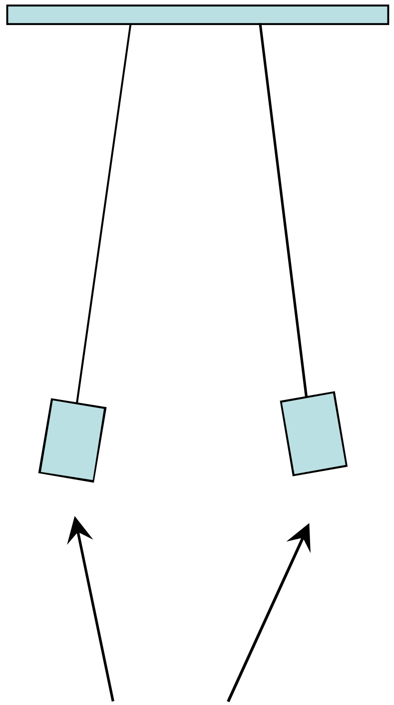
$\omega >> \omega_0$ ⇨ **Przeciwnie niż *F*(t) φ= π**

Sprawdźmy to w doświadczeniu…

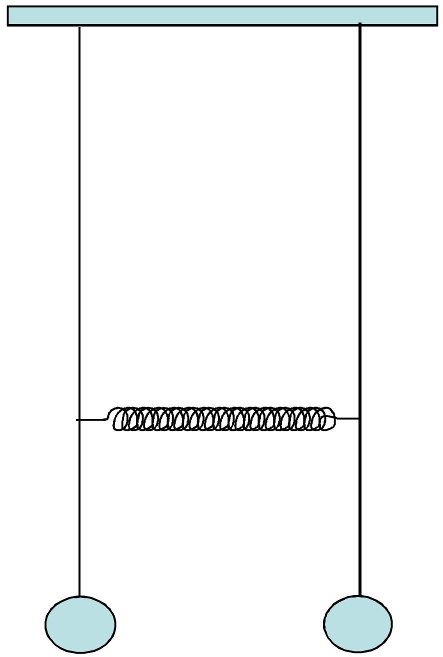
Drgania swobodne układu o dwóch stopniach swobody



Wahadło podwójne (płaskie)



Magnesy (odpychające się) na prętach



Wahadła sprzężone

Liniowość i zasada superpozycji

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi + \beta\psi^2 + \gamma\psi^3 + \ldots$$

Liniowe, tylko wtedy gdy $\beta = 0, \gamma = 0, \ldots itd.$ **Dlaczego?**

Czyli równanie (jednorodne) $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi$ **lub równanie niejednorodne** $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi + F(t)$

Przypomnienie:

- **suma dwu dowolnych rozwiązań równania liniowego i jednorodnego jest również rozwiązaniem tego równania.**
- **dla sumy rozwiązań równania liniowego, warunki początkowe są sumą warunków początkowych**
- **suma sił wymuszających dla dwóch rozwiązań, jest siłą wymuszającą dla rozwiązania będącego sumą rozwiązań…**

Najbardziej ogólny ruch układu o dwu stopniach swobody, opisanego równaniami liniowymi stanowi superpozycję dwu niezależnych, jednoczesnych ruchów harmonicznych – drgań własnych lub inaczej drgań normalnych układu. Jak je znaleźć?

Dygresja – układy nieliniowe

Niech reakcja pewnego fizycznego układu będzie nieliniową funkcją zaburzenia…

$$\psi(t) = \alpha\varphi(t) + \beta\varphi^2(t) + \gamma\varphi^3(t)$$

Załóżmy, że zaburzenie jest sumą dwóch oscylacji harmonicznych:

$$\varphi(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

$$\psi(t) = \alpha(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) + \beta(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^2 + \gamma(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^3$$

Jeśli $\beta=\gamma=0$ to odpowiedź układu będzie superpozycją dwóch fal harmonicznych o częstościach ω_1 i ω_2.

Jeśli $\beta\neq 0$ oraz $\gamma\neq 0$ to odpowiedź układu będzie bardziej skomplikowana…

Przedstawmy teraz $\psi(t)$ jako superpozycję oscylacji harmonicznych.

Skorzystajmy z tożsamości dla funkcji *f*(x)=cos(*x*)

Ponieważ

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$$

$$\Longrightarrow \qquad f(x)f(y) = \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y)$$

Jeśli mamy iloczyn trzech funkcji:

$$f(x)f(y)f(z) = \frac{1}{2}\left[f(x+y) + f(x-y)\right]f(z) =$$

$$= \frac{1}{2}f(x+y)f(z) + \frac{1}{2}f(x-y)f(z) =$$

$$= \frac{1}{4}f(x+y+z) + \frac{1}{4}f(x+y-z) + \frac{1}{4}f(x-y+z) + \frac{1}{4}f(x-y-z)$$

Nieliniowość kwadratowa:

$$(\cos\omega_1 t+\cos\omega_2 t)^2=(f(\omega_1 t)+f(\omega_2 t))^2=$$

$$f(\omega_1 t)f(\omega_1 t)+2f(\omega_1 t)f(\omega_2 t)+f(\omega_2 t)f(\omega_2 t)=$$

$$=\frac{1}{2}f(2\omega_1 t)+\frac{1}{2}f(0)+f(\omega_1 t+\omega_2 t)+f(\omega_1 t-\omega_2 t)+\frac{1}{2}f(2\omega_2 t)+\frac{1}{2}f(0)$$

Człon kwadratowy odpowiedzi układu jest superpozycją oscylacji o częstościach: **$2\omega_1$, 0, $2\omega_2$, $\omega_1+\omega_2$, $\omega_1-\omega_2$.**
Nazywamy je częstościami kombinacyjnymi.

Dla $\beta\neq 0$ nawet w sytuacji gdy $\omega_1=\omega_2=\omega$, odpowiedź układu będzie zawierać **oscylacje o częstości 2ω (generacja drugiej harmonicznej).**

Zjawisko to wykorzystuje się w optyce do generacji światła o dwukrotnie większej częstości – tak działa np. wskaźnik laserowy emitujący zielone Promieniowanie o długości fali 532nm (1064/2 nm)…
Mamy tu do czynienia z procesem dwufotonowym – dwa fotony zamieniają się w ośrodku nieliniowym w jeden foton o dwukrotnie większej energii…

Przyczynek z nieliniowością trzeciego stopnia:

$$(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)^3 = (f(\omega_1 t) + f(\omega_2 t))^3 =$$

$$f(\omega_1 t)^3 + 3f^2(\omega_1 t) f(\omega_2 t) + 3f(\omega_1 t) f^2(\omega_2 t) + f^3(\omega_2 t)$$

Zbadajmy poszczególne człony w sumie:

$$f(\omega_1 t)^3 = f(\omega_1 t) f(\omega_1 t) f(\omega_1 t) = \frac{1}{2}(f(2\omega_1 t) + f(0)) f(\omega_1 t) =$$

$$= \frac{1}{4} f(3\omega_1 t) + \frac{3}{4} f(\omega_1 t)$$ **Zawiera oscylacje o częstości $3\omega_1$ oraz ω_1**

$f^2(\omega_1 t) f(\omega_2 t)$ **Zawiera oscylacje o częstości $2\omega_1 + \omega_2$, $2\omega_1 - \omega_2$ oraz ω_2**

$f(\omega_1 t) f^2(\omega_2 t)$ **Zawiera oscylacje o częstości $2\omega_2 + \omega_1$, $2\omega_2 - \omega_1$ oraz ω_1**

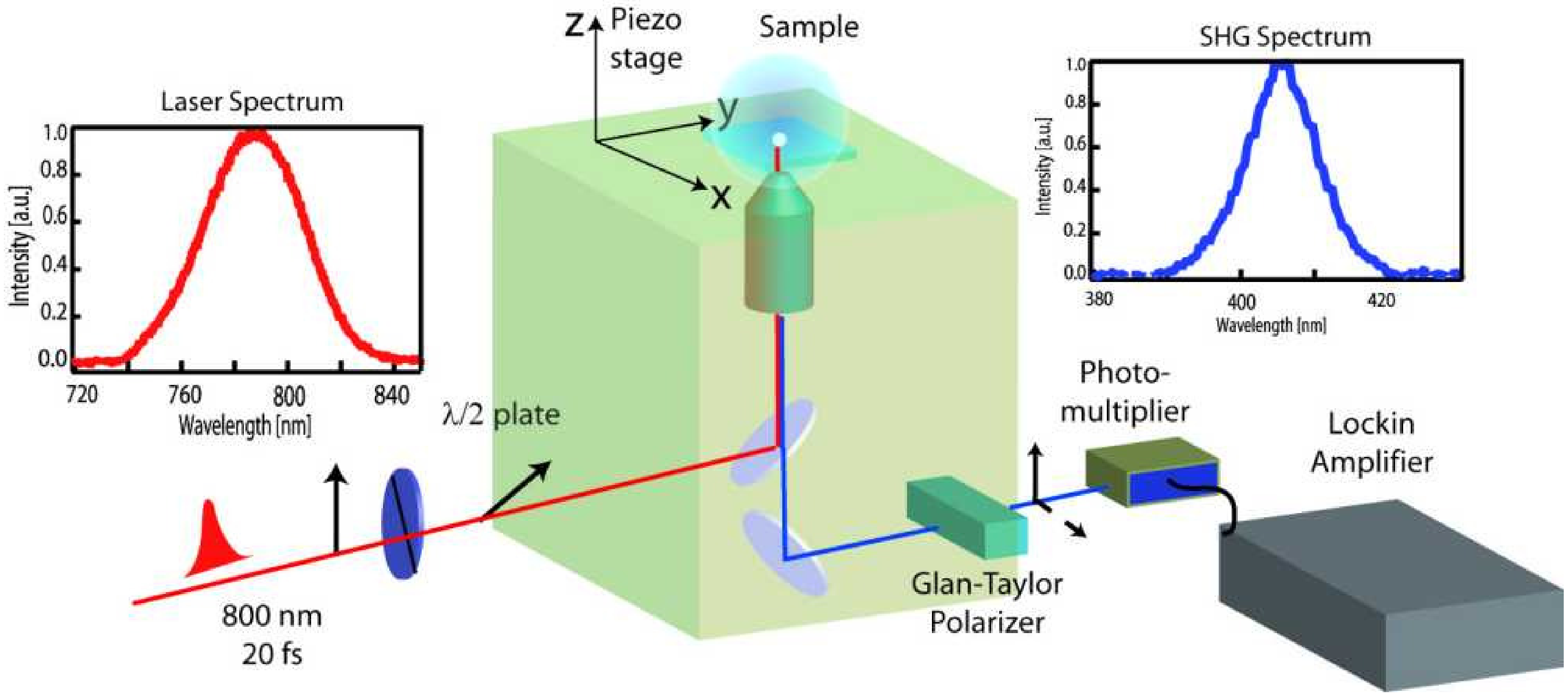
$f(\omega_2 t)^3$ **Zawiera oscylacje oczęstości $3\omega_2$ oraz ω_2**

Przyczynek z nieliniowością trzeciego stopnia jest superpozycją oscylacji harmonicznych o częstościach:

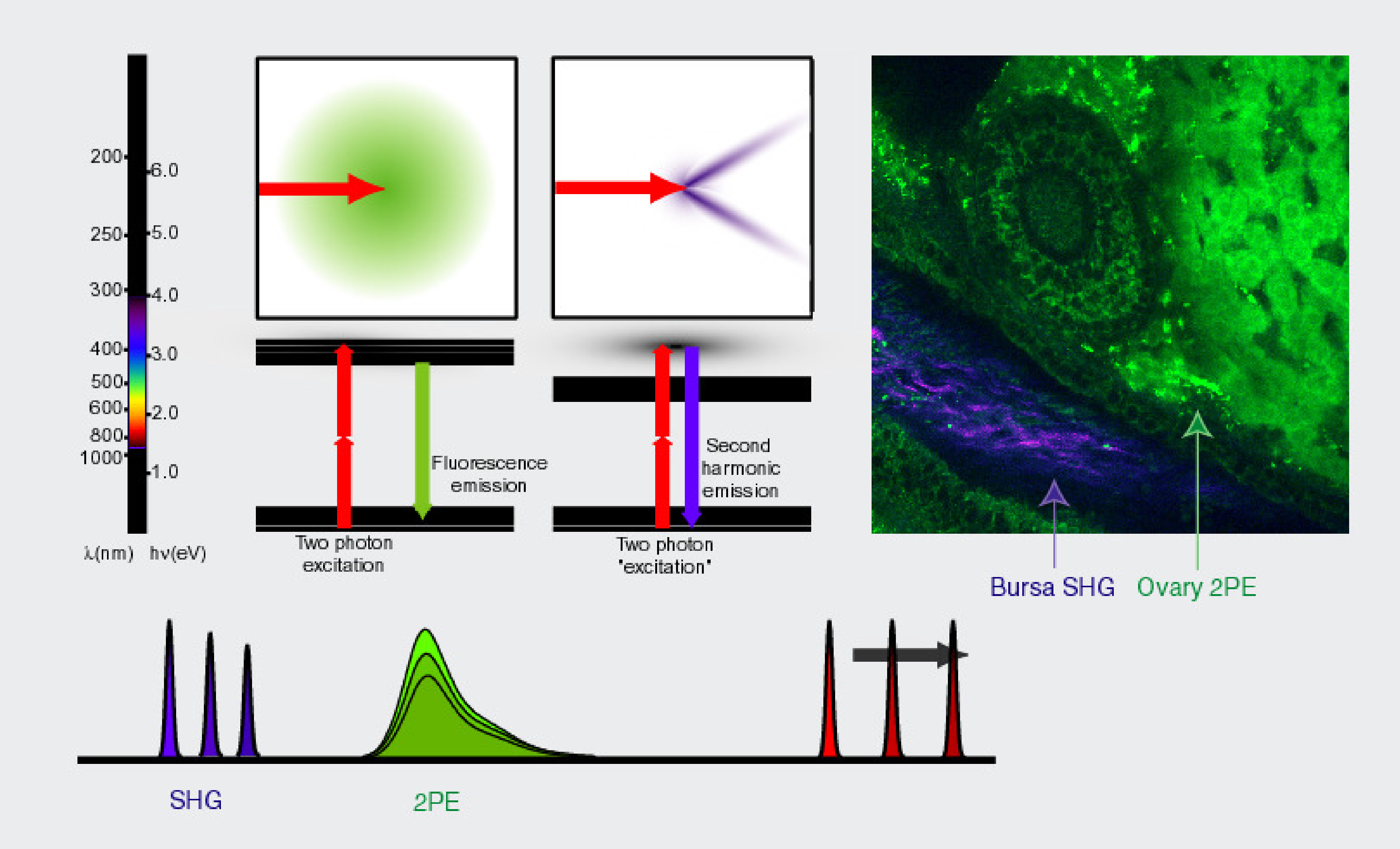
$$3\omega_1, \omega_1, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1, 3\omega_2, \omega_2,$$

Gdy $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ mamy tylko nieparzyste harmoniczne: $3\omega, \omega$

Na dokładniejsze badania zjawisk nieliniowych przyjdzie czas na optyce…



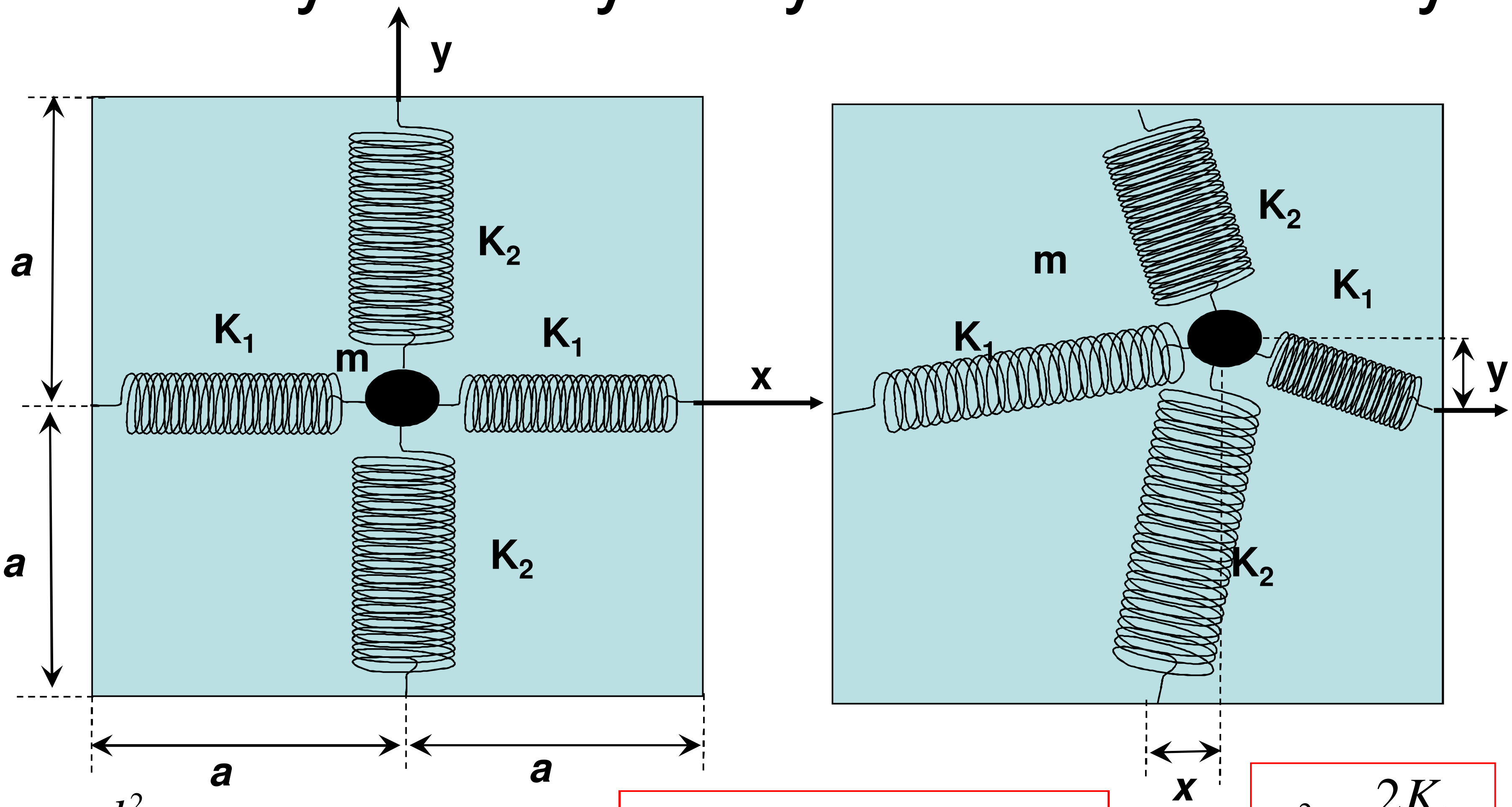
http://support.svi.nl/wiki/SecondHarmonicGeneration



http://support.svi.nl/wiki/SecondHarmonicGeneration

Wracamy do układów liniowych o dwóch stopniach swobody...

Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny



$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -2K_1 x$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -2K_2 y$$

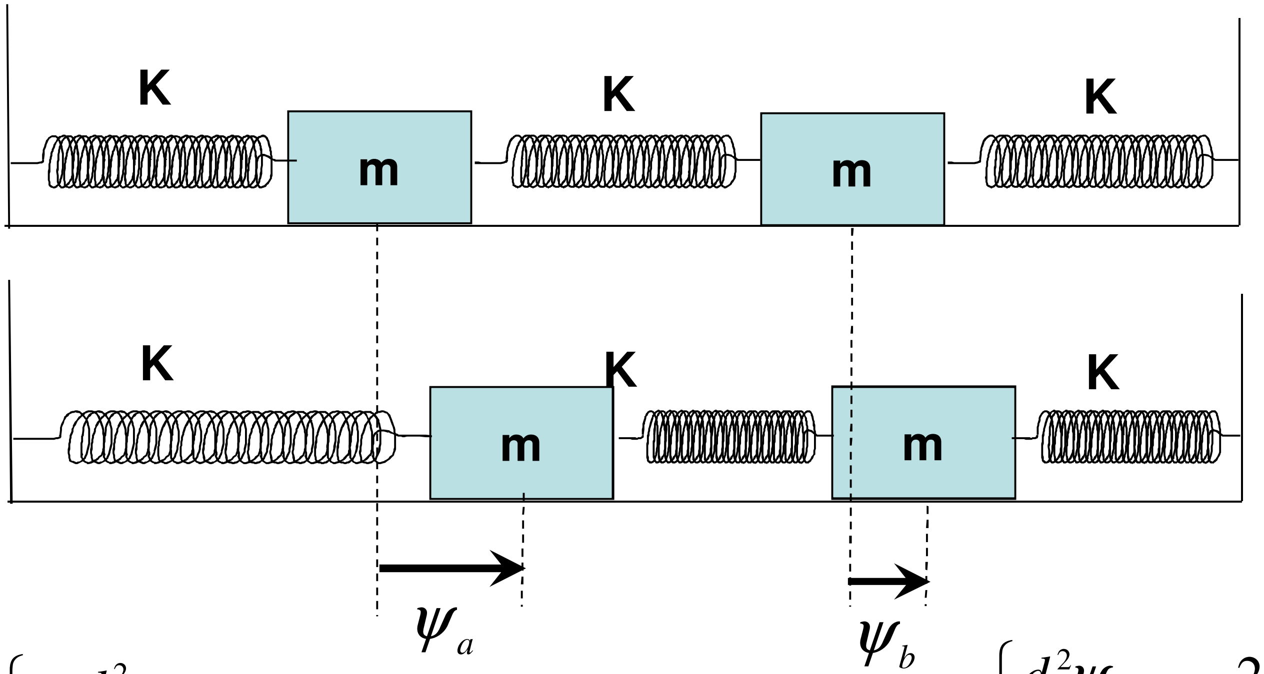
$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) &= B\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2K_1}{m} \\ \omega_1^2 &= \frac{2K_2}{m} \end{aligned}}$$

Drgania normalne!
Niezależne ruchy w dwóch kierunkach, charakterystyczne częstości…

Równania ruchu



$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m\dfrac{d^2\psi_b}{dt^2} = -K\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2\psi_a}{dt^2} = -\dfrac{2K}{m}\psi_a + \dfrac{K}{m}\psi_b \\ \dfrac{d^2\psi_b}{dt^2} = +\dfrac{K}{m}\psi_a - \dfrac{2K}{m}\psi_b \end{cases}$$

$$\psi_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$\psi_b = B\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2\psi_a}{dt^2} = -\omega^2\psi_a, \qquad \frac{d^2\psi_b}{dt^2} = -\omega^2\psi_b$$

Oznaczmy:

$$a_{11} = \frac{2K}{m}, \quad a_{12} = -\frac{K}{m}$$
$$a_{21} = -\frac{K}{m}, \quad a_{22} = \frac{2K}{m}$$

$$\begin{cases} -\omega^2\psi_a = -a_{11}\psi_a - a_{12}\psi_b \\ -\omega^2\psi_b = -a_{21}\psi_a - a_{22}\psi_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\psi_b}{\psi_a} = \dfrac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} \\ \dfrac{\psi_b}{\psi_a} = \dfrac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2)\psi_a + a_{12}\psi_b = 0 \\ a_{21}\psi_a + (a_{22} - \omega^2)\psi_b = 0 \end{cases}$$

lub inaczej

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \omega^2), & a_{12} \\ a_{21}, & (a_{22} - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0}$$

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \omega^2), & a_{12} \\ a_{21}, & (a_{22} - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

pamiętamy, że

$$\psi_a = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_b = B\cos(\omega t + \varphi)$$

Stąd:

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a}\right)_{postać 1} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a}\right)_{postać 2} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\psi_a = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b = \frac{B_1}{A_1}A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_2}{A_2}A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$\psi_b = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

A_1, A_2, φ_1, φ_2 – z warunków początkowych

Częstości własne

$$\boxed{\left(a_{11}-\omega^2\right)\left(a_{22}-\omega^2\right)-a_{12}a_{21}=0}$$

$$\Downarrow$$

Pamiętamy, że:

$$\boxed{a_{11}=\frac{2K}{m},\quad a_{12}=-\frac{K}{m} \\ a_{21}=-\frac{K}{m},\quad a_{22}=\frac{2K}{m}}$$

$$\boxed{\omega^4-\omega^2\left(a_{11}+a_{22}\right)+a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=0}$$

$$\Downarrow$$

$$\omega^4-\frac{4K}{m}\omega^2+\frac{3K^2}{m^2}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_1^2=\frac{K}{m}\qquad \omega_2^2=\frac{3K}{m}$$

$$\Rightarrow$$

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a}\right)_{postać1}=\frac{B_1}{A_1}=\frac{\omega_1^2-a_{11}}{a_{12}}=1$$

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a}\right)_{postać2}=\frac{B_2}{A_2}=\frac{\omega_2^2-a_{11}}{a_{12}}=-1$$

Postać 1 $\Longrightarrow$ $\psi_b=\psi_a$

Postać 2 $\Longrightarrow$ $\psi_b=-\psi_a$

Popatrzmy jeszcze raz na równania…

Dodajmy je i odejmijmy stronami…

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2\psi_a}{dt^2} = -K\psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m\dfrac{d^2\psi_b}{dt^2} = -K\psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\dfrac{d^2(\psi_a + \psi_b)}{dt^2} = -K(\psi_a + \psi_b) \\ m\dfrac{d^2(\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3K(\psi_a - \psi_b) \end{cases}$$

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$
$$\psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

Łatwo wyznaczyć częstości drgań normalnych układu, a potem znaleźć drgania poszczególnych elementów…

Stąd:

$$\psi_a = \frac{1}{2}(A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$
$$\psi_b = \frac{1}{2}(A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$

Czyli znowu widzimy, że dla drgań normalnych z częstością ω_1

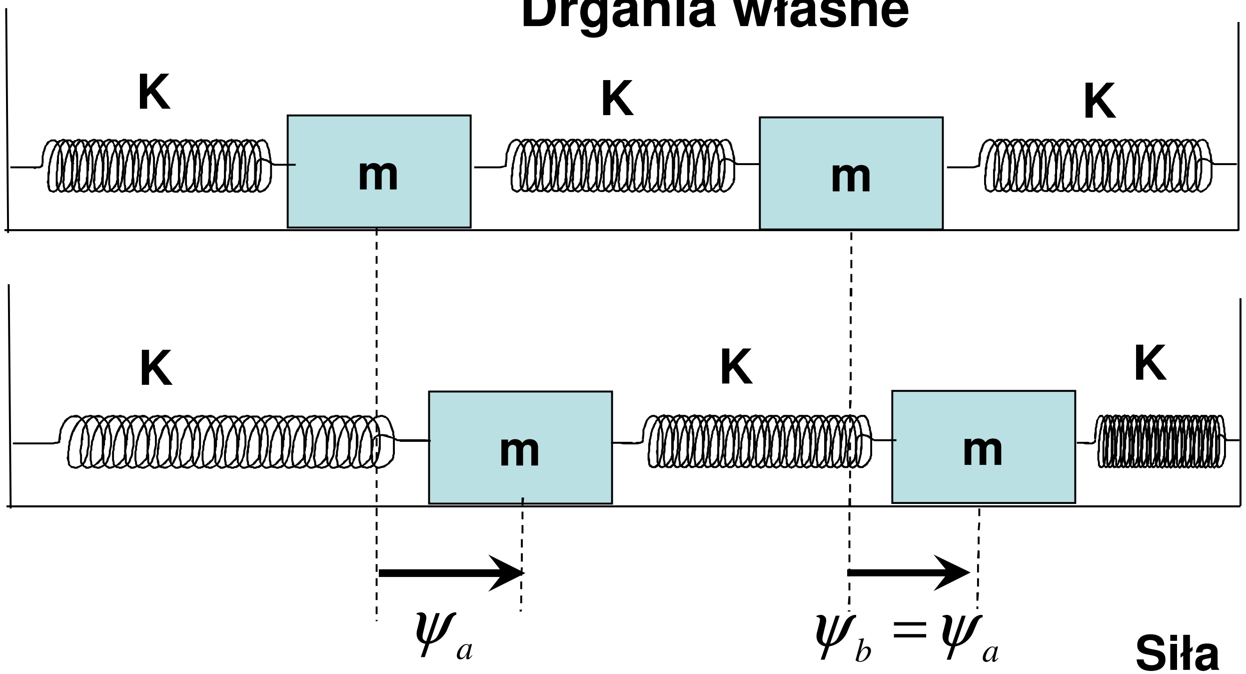
$$\psi_b = \psi_a$$

dla drgań normalnych z częstością ω_2

$$\psi_b = -\psi_a$$

To można zgadnąć!

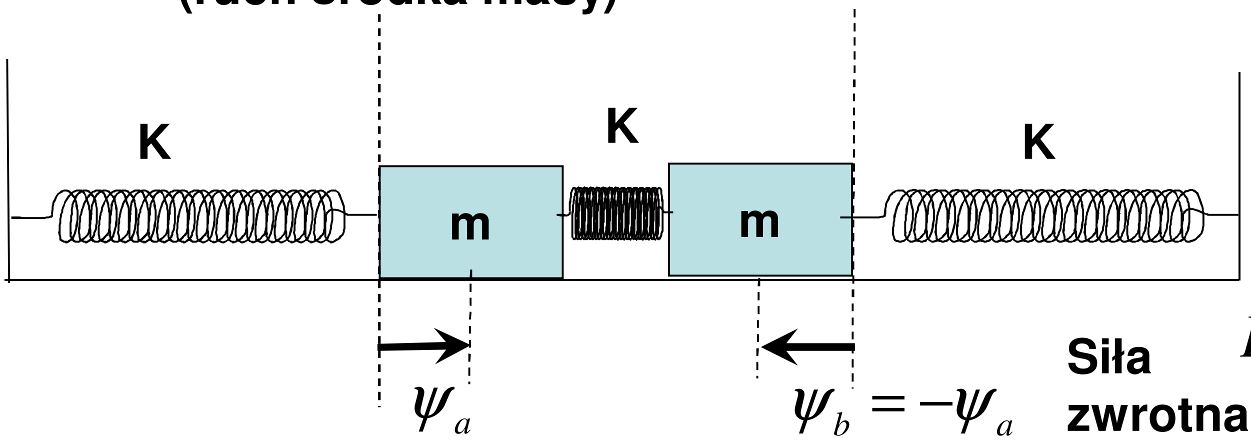
Drgania własne



Postać 1: Sprężynka środkowa nie napięta (ruch środka masy)

Siła zwrotna $F_z = -K\psi_a$

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{K}{m}}$$



Siła zwrotna $F_z = -K\psi_a - 2K\psi_a$

$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{3K}{m}}$$

Postać 1: Sprężynka środkowa ściśnięta podwójnie (ruch wewnętrzny układu)

Dudnienia

- dwa kamertony o bliskiej częstości,
- brzeszczoty w imadle,
- struny gitary (np.. gdy ją stroimy)
- dźwięk dzwonu…

Ruch błony bębenkowej jest superpozycją dwu drgań harmonicznych….

Przyjmijmy, że $A_1=A_2=A$, $\varphi_1=\varphi_2=0$

$$\psi_a(t) = A\cos(\omega_1 t), \quad \psi_b(t) = A\cos(\omega_2 t)$$

Ich suma: $$\psi(t) = \psi_a(t) + \psi_b(t) = A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$$

Korzystając z tego, że $$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})$$

dostajemy: $$\boxed{\psi(t) = 2A\cos(\omega_{\mathrm{mod}} t)\cos(\omega_{śr} t)}$$

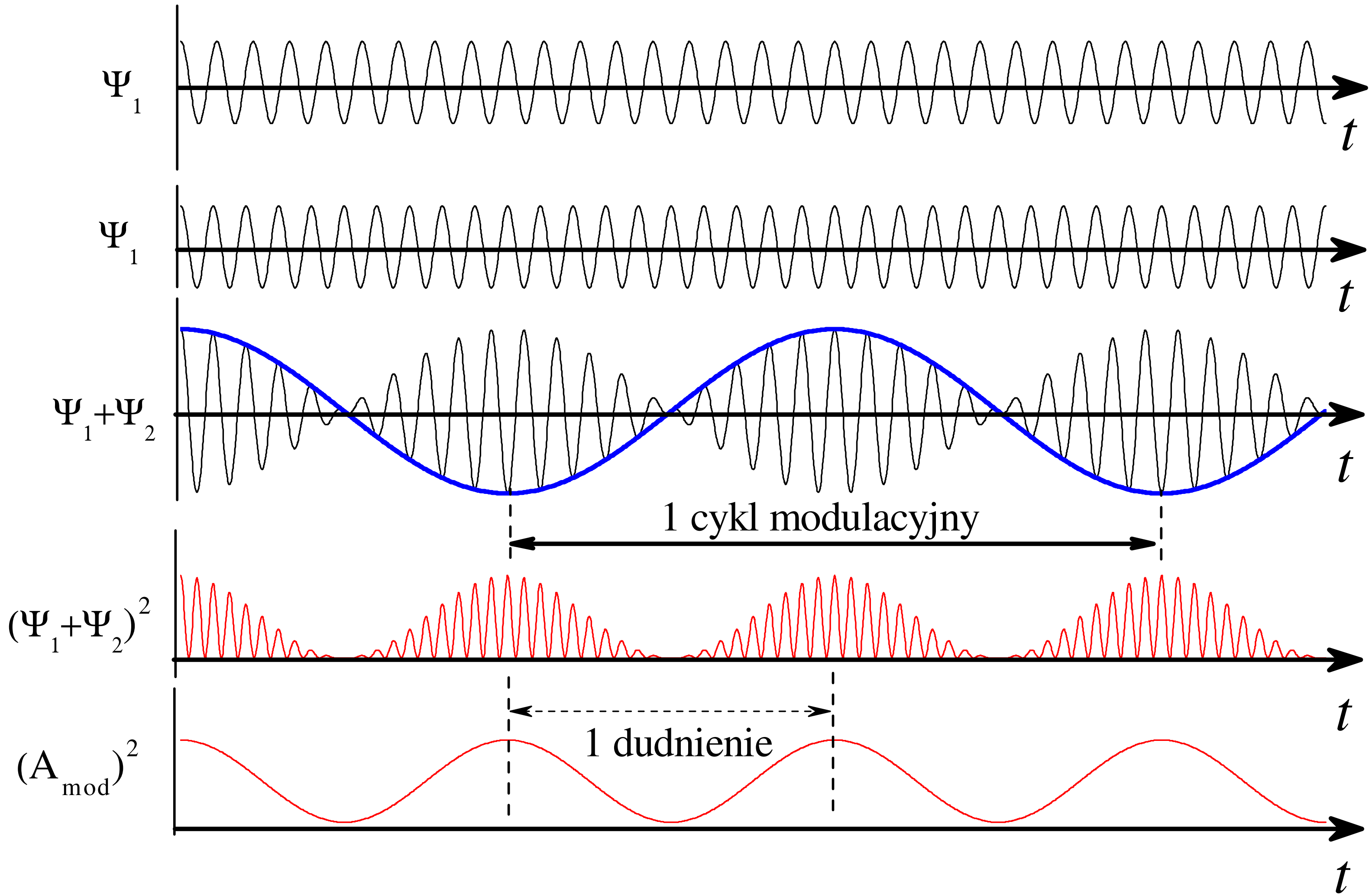
gdzie: $$\omega_{\mathrm{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \qquad \omega_{śr} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

$$\omega_{\mathrm{mod}} << \omega_{śr} \quad \Rightarrow \quad \psi(t) = 2A\cos(\omega_{\mathrm{mod}} t)\cos(\omega_{śr} t)$$

amplituda wolno zmienna

część szybkozmienna

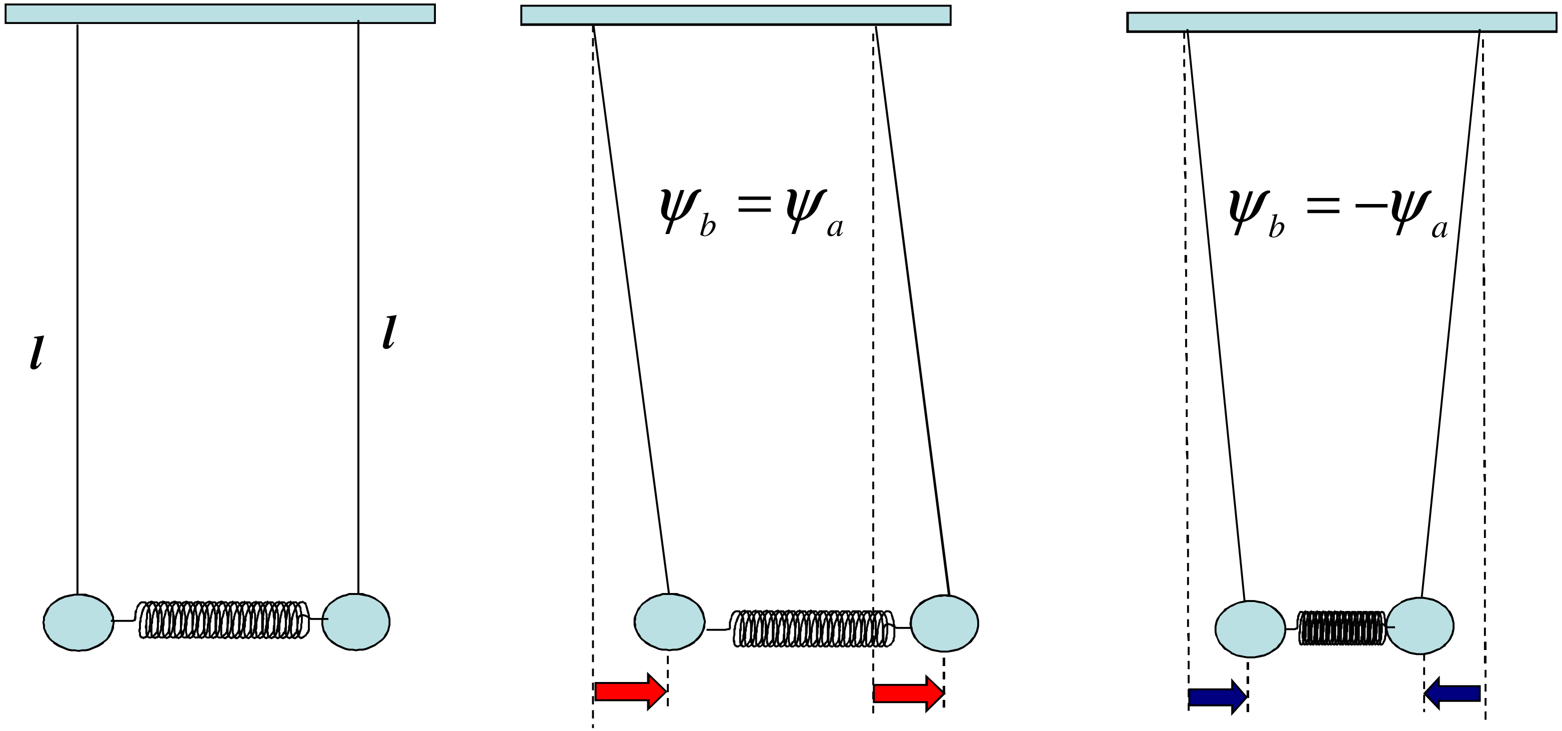
Dudnienia łatwo zasymulować...



$$\boxed{\psi(t) = 2A\cos(\omega_{\text{mod}} t)\cos(\omega_{śr} t)}$$

Wahadła słabo sprzężone

MODY WŁASNE



Sprężynka luźna

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$$

Sprężynka napięta „podwójnie”

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m}$$

Różnicę częstości możemy regulować zmieniając *K* lub *m*!

Rozwiązanie ogólne

$$\psi_a = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Przyjmijmy, że $A_1=A_2=A$, $\varphi_1=\varphi_2=0$, wtedy wychylenia ciężarków:

$$\psi_a(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t)$$

$$\psi_b(t) = A\cos(\omega_1 t) - A\cos(\omega_2 t)$$

Jak takie drgania wzbudzić?

Trzeba odpowiednio dobrać warunki początkowe – dobieramy wychylenia i prędkości dla *t*=0

Prędkości ciężarków

$$\frac{d\psi_a(t)}{dt} = -A\,\omega_1\sin(\omega_1 t) - \omega_2 A\sin(\omega_2 t)$$

$$\frac{\psi_b(t)}{dt} = -\omega_1 A\sin(\omega_1 t) + \omega_2 A\sin(\omega_2 t)$$

$$\psi_a(0) = 2A$$

$$\psi_b = 0$$

$$\frac{d\psi_a}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{d\psi_b}{dt}(0) = 0$$

$$\psi_a(t) = A\cos(\omega_1 t) + A\cos(\omega_2 t) = 2A\cos(\omega_{\text{mod}} t)\cos(\omega_{śr} t)$$

$$\psi_a(t) = A_{\text{mod}}(t)\cos(\omega_{śr} t)$$

$$\psi_b(t) = A\cos(\omega_1 t) - A\cos(\omega_2 t) = 2A\sin(\omega_{\text{mod}} t)\sin(\omega_{śr} t)$$

$$\psi_b(t) = B_{\text{mod}}(t)\sin(\omega_{śr} t)$$

Wciągu jednego szybkiego cyklu „szybkich drgań" traktujemy wahadła jak oscylatory harmoniczne o stałej amplitudzie (A_{mod} oraz B_{mod}) i częstości $\omega_{śr}$

$$E_a = \frac{1}{2} m\omega_{śr}^2 A_{\text{mod}}^2 = 2mA^2\omega_{śr}^2\cos^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

$$E_b = \frac{1}{2} m\omega_{śr}^2 B_{\text{mod}}^2 = 2mA^2\omega_{śr}^2\sin^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

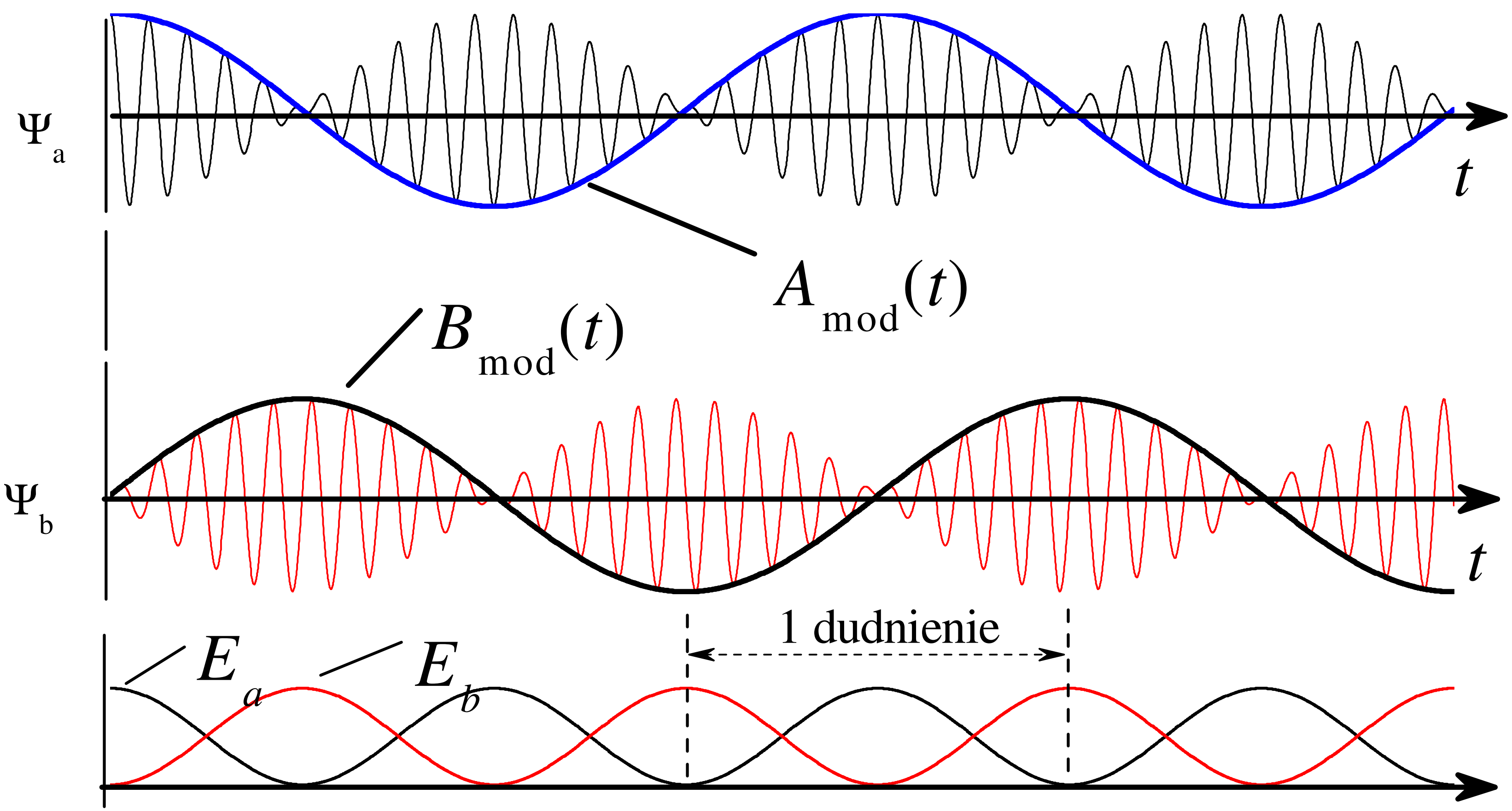
$$\boxed{E_a + E_b = 2mA^2\omega_{śr}^2 = E}$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_a - E_b &= E(\cos^2(\omega_{\text{mod}} t) - \sin^2(\omega_{\text{mod}} t)) = \\ &= E\cos(2\omega_{\text{mod}} t) = E\cos[(\omega_1 - \omega_2)t] \end{aligned}}$$

Energia przepływa z jednego do drugiego wahadła z częstością dudnień

$$\boxed{\begin{aligned} E_a &= \frac{1}{2}E[1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)] \\ E_b &= \frac{1}{2}E[1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)] \end{aligned}}$$

Zagadnienie energii w układzie drgań sprzężonych



Przepływ energii pomiędzy wahadłami

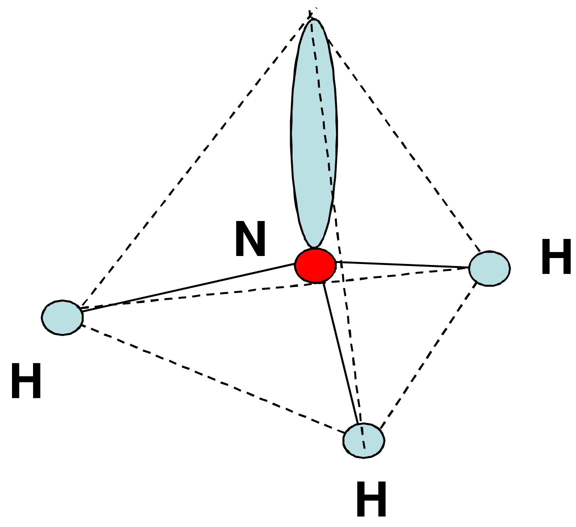
W mechanice kwantowej energia jest „skwantowana" - pomiędzy różnymi stopniami swobody przepływa prawdopodobieństwo posiadania energii wzbudzenia…(F.C. Crawford)

$$E_a = \frac{1}{2}E[1+\cos((\omega_1-\omega_2)t)]$$

$$E_b = \frac{1}{2}E[1-\cos((\omega_1-\omega_2)t)]$$

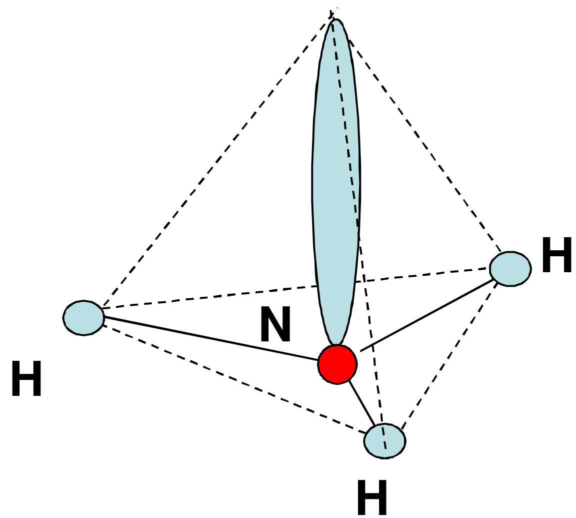
Cząsteczka amoniaku jako przykład słabo sprzężonych oscylatorów

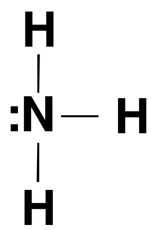
A (stan podstawowy)



NH_3

B (stan wzbudzony)





Dwa położenia azotu względem płaszczyzny wyznaczonej wodory.

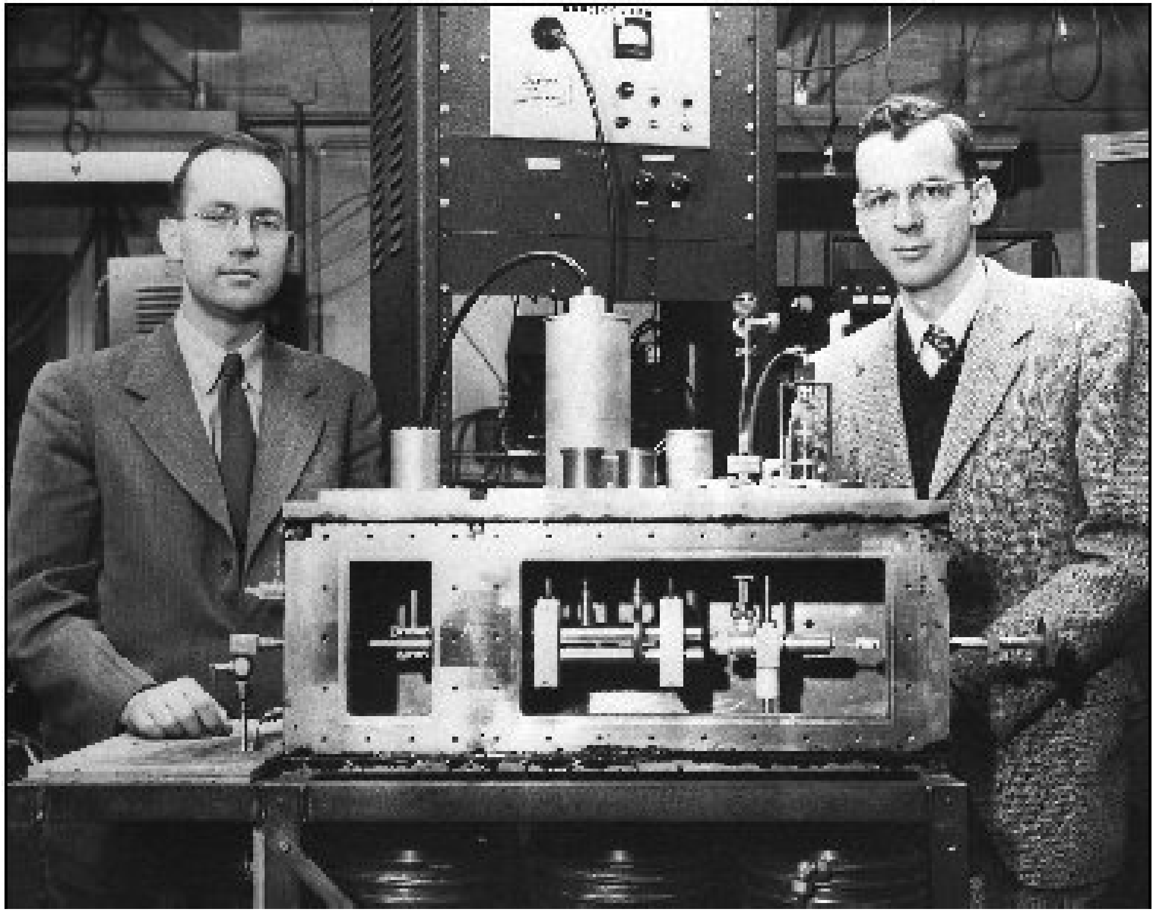
$$\boxed{\nu_{dud} = \omega_{dud}/2\pi = (\omega_2 - \omega_1)/2\pi \approx 2\cdot 10^{10}\,\mathrm{Hz}}$$

$$\psi_a = \frac{1}{2}[1+\cos((\omega_1-\omega_2)t)]$$

$$\psi_b = \frac{1}{2}[1-\cos((\omega_1-\omega_2)t)]$$

Maser amoniakalny (emitujący mikrofale) – prekursor lasera…

Inny przykład oscylacji – układ mezonów K^0…



The first maser *Charles H. Townes (left), winner of the 1964 Nobel Prize for Physics, and associate James P. Gordon in 1955 with the first maser.*
Bettmann/Corbis

http://www.britannica.com/EBchecked/topic-art/601072/92025/The-first-maser-Charles-H-Townes-winner-of-the-1964