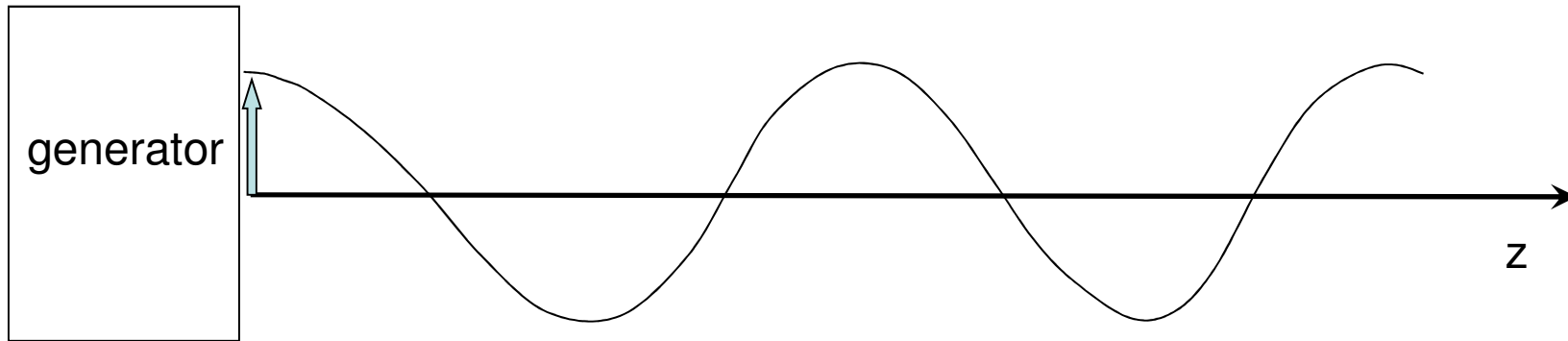


# Prędkość grupowa

# Superpozycja dwu fal biegnących



Założmy, że w punkcie  $z=0$   
struna wykonuje drgania

$$\psi(0,t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

W strunie wytworzone  
zostaną dwie fale  
biegnące...

$$\omega_1 t \Rightarrow \omega_1 t - k_1 z$$

$$\omega_2 t \Rightarrow \omega_2 t - k_2 z$$

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$



$$\psi(z,t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z) \cos(\omega_{\text{sr}} t - k_{\text{sr}} z)$$

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad \omega_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$k_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \quad k_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\psi(z,t) = A_{\text{mod}} \cos(\omega_{\text{sr}} t - k_{\text{sr}} z)$$

$$A_{\text{mod}}(z,t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z)$$

# Prędkość rozchodzenia się modulacji

Założmy, że  $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{śr}}$



Z jaką prędkością porusza się grzbiet modulowanej fali?

$$A_{\text{mod}}(z, t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z)$$

$$\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z = \text{const}$$



$$\omega_{\text{mod}} dt - k_{\text{mod}} dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{mod}} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

Obowiązuje związek  
dyspersyjny

$$\omega_1 = \omega(k_1), \quad \omega_2 = \omega(k_2)$$

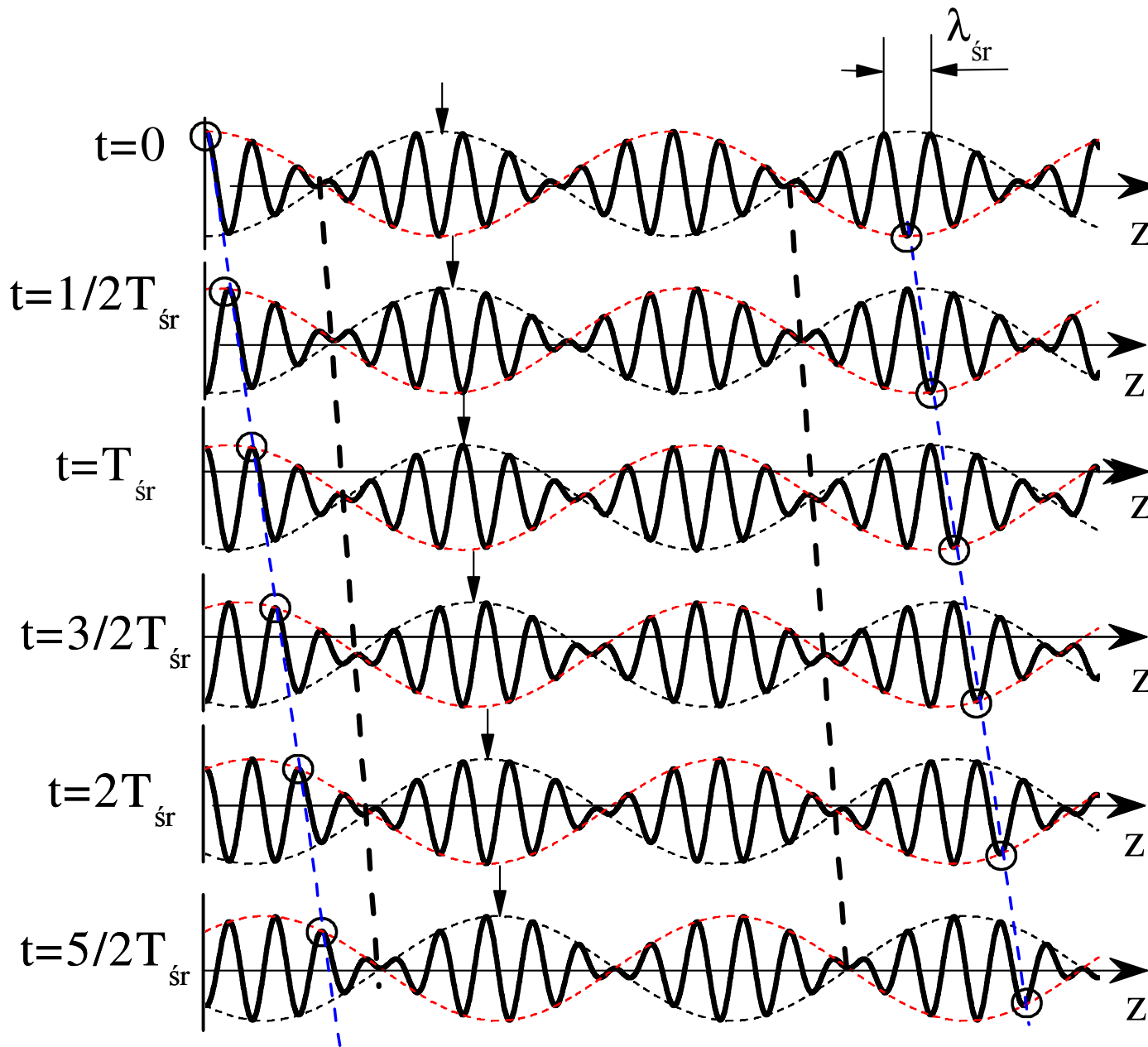
$$v_{\text{mod}} = \frac{\omega_1(k_1) - \omega_2(k_2)}{k_1 - k_2}$$



$$k_1 \rightarrow k_2$$

$$v_{\text{mod}} = \frac{d\omega}{dk} \equiv v_g$$

$v_g$  - prędkość grupowa



**Symulacja:**

$$\omega_{sr} = 10\omega_{mod}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{sr}}{k_{sr}}$$

**Takie zachowanie można obserwować np. wodzie - wystarczy wrzucić kamień...**

# Związek dyspersyjny dla fal na wodzie

## Fale na wodzie

- siła ciężenia (decydujące dla fal o długości powyżej kilku cm)
- napięcie powierzchniowe

Dyspersja fal na głębokiej wodzie (długość fali mała w porównaniu z głębokością)

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3$$

$\rho$  - gęstość (wody)  
 $T$  - napięcie powierzchniowe  
 $g$  - przyspieszenie ziemskie

Dla fal krótszych niż ok. 1.7cm  $v_g > v_\phi$ ,  
dla długich fal  $v_g < v_\phi$ .  
Warto to sprawdzić samodzielnie...

# Fale radiowe o modulowanej amplitudzie

Napięcie wymuszające przyłożone do anteny moduluje amplitudę fali nośnej. Wpływ tego napięcia możemy wyrazić za pomocą szeregu Fouriera:

$$A_{\text{mod}}(t) = A_0 + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos(\omega_{\text{mod}} t + \varphi(\omega_{\text{mod}}))$$

Różnica  $A_{\text{mod}}(t) - A_0$  tak dobrana, aby była proporcjonalna do sygnału elektrycznego np. z mikrofonu w studio radiowym

Stała  $A_0$  jest obecna bez względu na to, czy do mikrofonu docierają dźwięki, czy też nie...

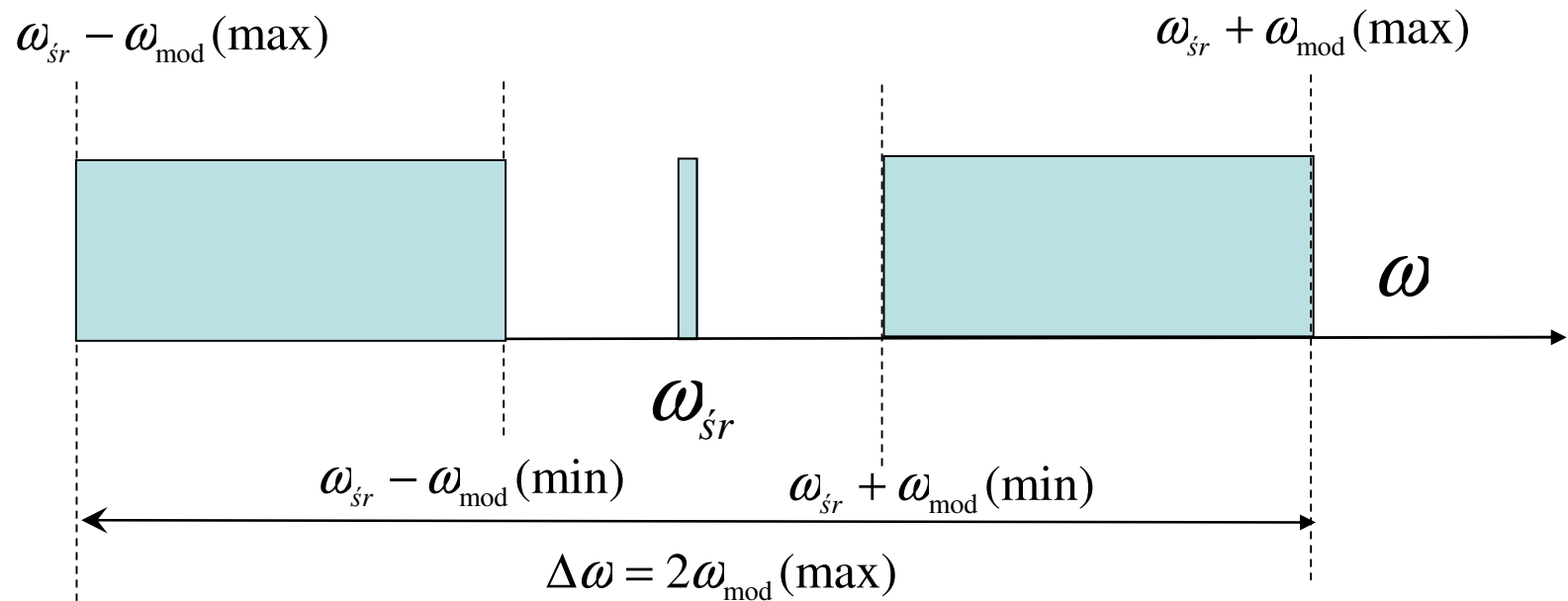
Reszta wyrazów pochodzą od fal akustycznych docierających do mikrofonu. Ich częstotliwości (20Hz-20KHz), są znacznie mniejsze od częstotliwości fali nośnej (np. Warszawa I – 225kHz)

$$U(t) = A_0 \cos(\omega_{sr} t) + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos[\omega_{\text{mod}} t + \varphi(\omega_{\text{mod}})] \cos(\omega_{sr} t)$$

$$U(t) = A_0 \cos(\omega_{sr} t) + \leftarrow \text{drżanie nośne}$$

$$+ \sum_{\omega_{mod}} 1/2 A(\omega_{mod}) \cos[(\omega_{mod} + \omega_{sr})t + \varphi(\omega_{mod})] + \text{górne pasmo nośne}$$

$$+ \sum_{\omega_{mod}} 1/2 A(\omega_{mod}) \cos[(\omega_{mod} - \omega_{sr})t - \varphi(\omega_{mod})] \quad \text{dolne pasmo nośne}$$



**szerokość pasma**  $\Delta \nu = 2\nu_{mod}(\max)$

**Modulacje (a zatem i muzyka) rozchodzą się w ośrodku z prędkością grupową fale elektromagnetycznych! (Dla próżni prędkość fazowa i grupowa są równe  $c$ .)**

# Układ mas połączonych sprężynkami (drgania podłużne)

Poznaliśmy już  
związek dyspersyjny

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{k} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{K}{m}} \cos\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Widać, że  $k \rightarrow 0$

$$v_{\varphi}(k \rightarrow 0) = v_g(k \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{K}{m}} a = \sqrt{\frac{Ka}{m/a}} = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\rho}}$$

Czyli tak jak dla struny!

Natomiast, że  $k \rightarrow \pi/a$

$$v_g\left(\frac{\pi}{a}\right) = 2a\sqrt{\frac{K}{m}} \cos\left(\frac{\pi a}{2a}\right) = 0 \quad v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} = \frac{2a}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

**Fala biegnąca staje się falą stojącą!**

# Związek dyspersyjny dla fal de Broglie'a

$$\psi(z, t) = Af(z)e^{-i\omega t}$$

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przedziale  $dz$  wokół położenia  $z$

$$|\psi(z, t)|^2 \quad \text{nie zależy od czasu...}$$

Jeśli energia potencjalna cząstki jest stała i cząstka porusza się w jednorodnym ośrodku to  $f(z)$  jest sinusoidalną funkcją  $kz$

$$\psi(z, t) = [A \sin(kz) + B \cos(kz)]e^{-i\omega t}$$

$$\text{lub} \quad \psi(z, t) = [Ae^{ikz} + Be^{-ikz}]e^{-i\omega t}$$

Dla cząstki nierelatywistycznej w obszarze o stałej energii potencjalnej  $V$  możemy napisać:

**Związek energii z częstością**

$$E = \hbar\omega$$

**Związek pędu z liczbą falową**

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k$$

## Dla cząstek nierelatywistycznych

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad \Rightarrow \quad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar}$$

Prędkość fazowa

$$v_\varphi(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} + \frac{V}{\hbar k}$$

Pęd cząstki

$$p = m v_{cz} \quad v_\varphi(k) = \frac{1}{2} v_{cz} + \frac{V}{p_{cz}}$$

W mechanice kwantowej prędkość cząstki jest prędkością „paczki” fal złożonej z szeregu sąsiadujących wartości  $k$ . Prędkość rozchodzenia się paczki fal równa jest prędkości grupowej  $v_g$ :

$$v_g(k) = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \frac{d}{dk} \left( \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar} \right)_0 = \left( \frac{\hbar k}{m} \right)_0 = \frac{p}{m} = v_{cz}$$

Dla swobodnej cząstki relatywistycznej:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2$$

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \hbar k$$

$$\hbar^2\omega^2 = (mc^2)^2 + (\hbar ck)^2$$

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} \quad \text{ale} \quad p = v_{cz} \frac{E}{c^2} \quad \text{(patrz początkowe wykłady)}$$

$v_{cz}$  - prędkość cząstki

Czyli ostatecznie prędkość fazowa

$$v_\varphi = \frac{c^2}{v_{cz}}$$

dla swobodnej cząstki relatywistycznej

$$v_\varphi > c$$

Prędkość grupowa

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2 p}{E} = v_{cz}$$

Zależność pomiędzy prędkością fazową i grupową dla cząstki relat.

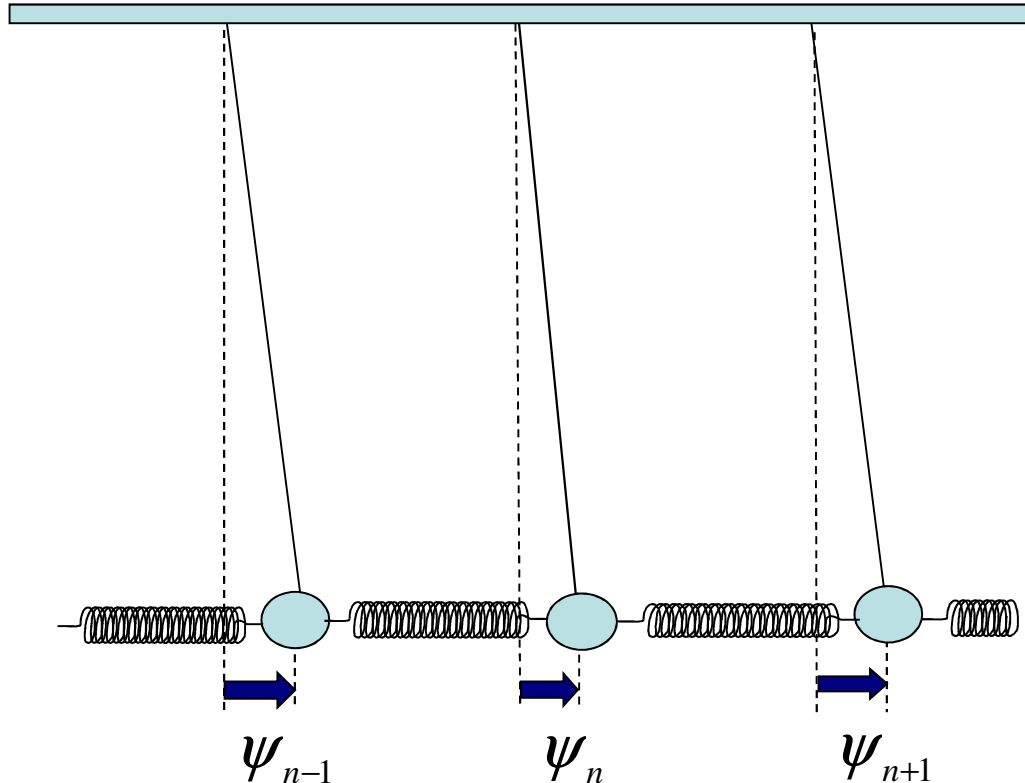
$$v_\varphi v_g = c^2$$

**Dla fotonu w próżni:**

$$v_\varphi = v_g = c$$

# Wnikanie w obszar „zabroniony”

Zanim przejdziemy do fal de Broglie’a uwięzionych w pewnym obszarze przestrzeni wróćmy na chwilę do wahadeł sprzężonych...



Równanie ruchu:

$$M\psi_n = -M\omega_0^2\psi_n + K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1})$$

Najniższa częstość własna:  $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$

# Przybliżenie ciągłości

$\psi_n(t) = \psi(z, t) \Rightarrow$  Korzystamy z rozwinięcia w szereg Taylora

$$\psi_{n+1}(t) = \psi(z + a, t) = \psi(z, t) + a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi(z - a, t) = \psi(z, t) - a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$



$$\psi_{n+1}(t) - \psi_{n-1}(t) = a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$

$$\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t) = a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$



$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(z, t) + \frac{Ka^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}$$

**Równanie Kleina-Gordona-  
spełniają je fale de Broglie'a  
relatywistycznych cząstek  
swobodnych**

**Skąd takie przypuszczenie?**

Rozważmy monochromatyczne :  
fale  $E = \hbar\omega$  , potencjał  $V = \text{const}$

$$\psi(z,t) = [Ae^{ikz} + Be^{-ikz}]e^{-i\omega t}$$



a)  $\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = -i\omega\psi(z,t)$

b)  $\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2\psi(z,t)$

c)  $\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} = e^{-i\omega t} (ikAe^{ikz} - ikBe^{-ikz})$

d)  $\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = -k^2\psi(z,t)$

Mnożymy związek a) obustronnie przez  $i\hbar$

$$\frac{i\hbar \partial \psi(z,t)}{\partial t} = \hbar\omega\psi(z,t)$$

Korzystając z tego, że dla cząstek nierelatywistycznych mamy:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad \text{oraz ze związku d) dostajemy}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} + V\psi(z,t)$$

**Uogólnienie dla  $V=V(z)$   
– równanie Schrödingera!**

Dla cząstek relatywistycznych mamy:

$$\hbar^2 \omega^2 = (mc^2)^2 + (\hbar ck)^2$$

Mnożąc powyższe równanie przez  $-\frac{1}{\hbar^2} \psi(z, t)$

dostajemy

$$-\omega^2 \psi(z, t) = -c^2 k^2 \psi(z, t) - \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \psi(z, t)$$

Korzystając z ze związków **b)** oraz **d)**

otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \psi(z, t)$$

**Równanie  
Kleina-Gordona**

Dla cząstek o masie  $m=0$ , równanie Kleina-Gordona przechodzi w klasyczne równanie falowe dla fal nie ulegających dyspersji o prędkości  $c$ !

**Foton ma zerową masę...**

# Wahadła sprzężone (granica ciągłości)

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(z, t) + \frac{Ka^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}$$

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi) \\ \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} &= \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \frac{M}{Ka^2} (\omega_0^2 - \omega^2) A(z) \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

**Fale sinusoidalne, gdy**

$$\omega^2 > \omega_0^2$$

$$k^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{M}{Ka^2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{Ka^2}{M} k^2$$

$$A(z) = A \sin(kz) + B \cos(kz)$$

**Fale wykładnicze**

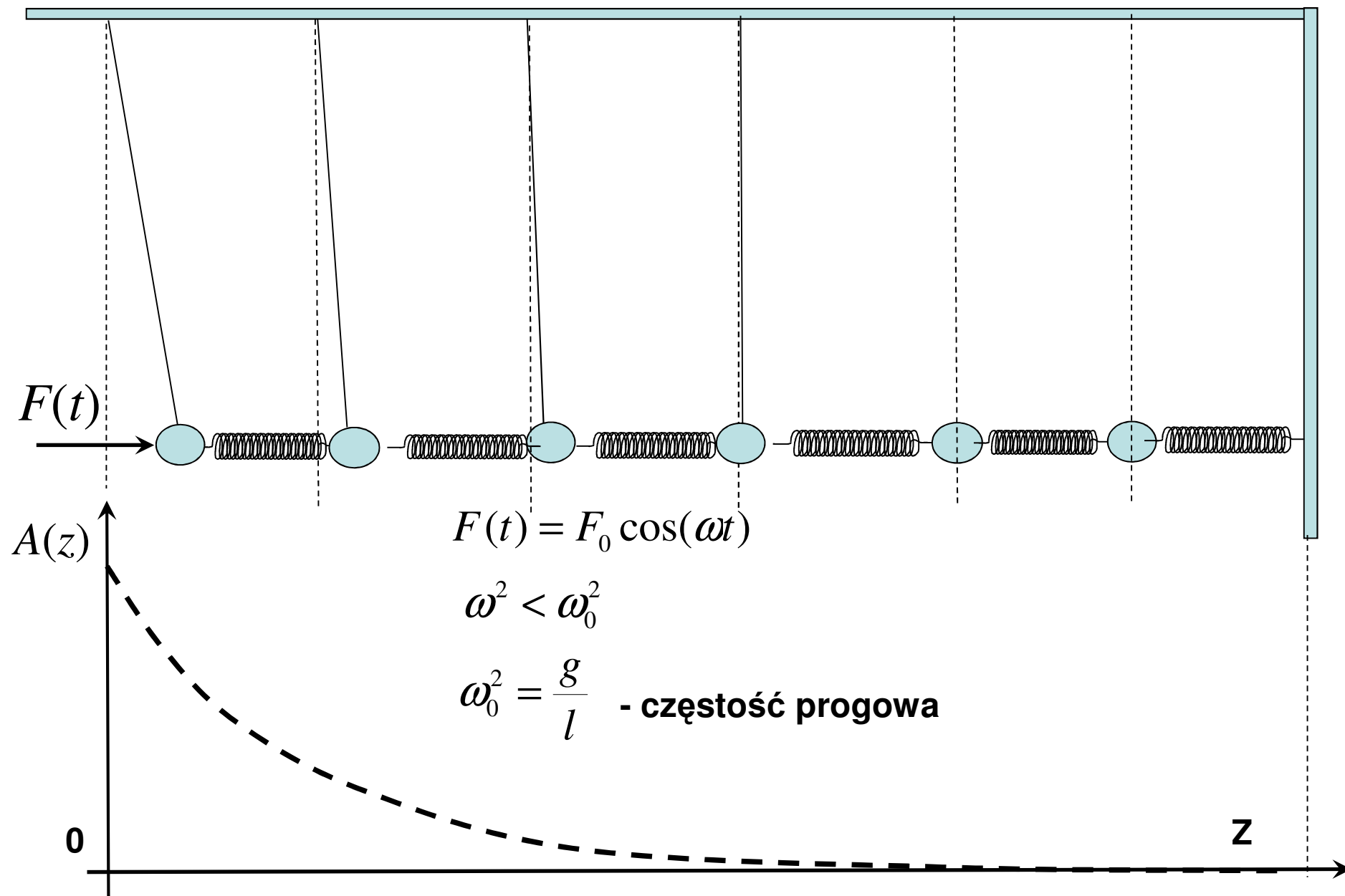
$$\omega^2 < \omega_0^2$$

$$\kappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{M}{Ka^2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{Ka^2}{M} \kappa^2$$

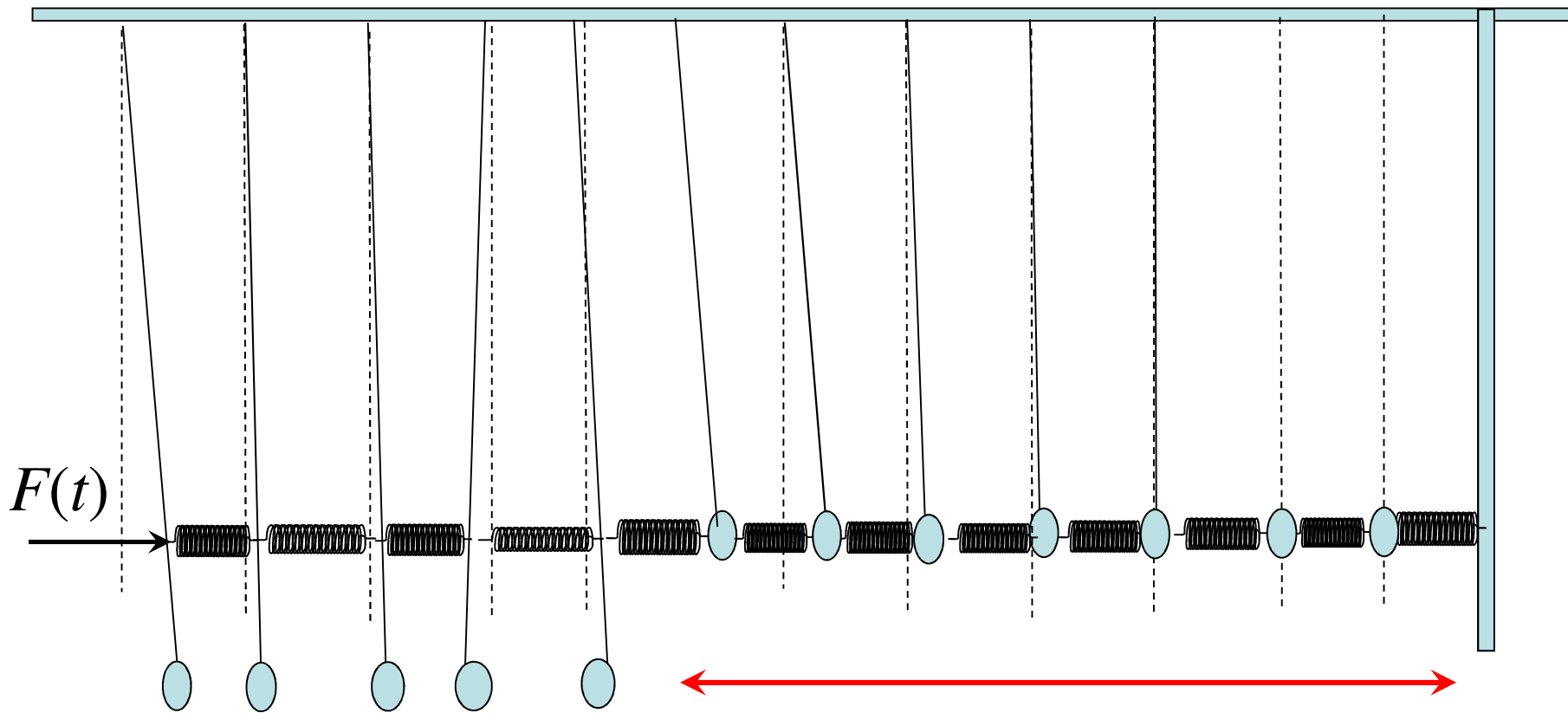
$$A(z) = A e^{-\kappa z} + B e^{\kappa z}$$

# Fale zanikająco wykładniczo – ośrodek reaktywny



$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

# Granica obszarów



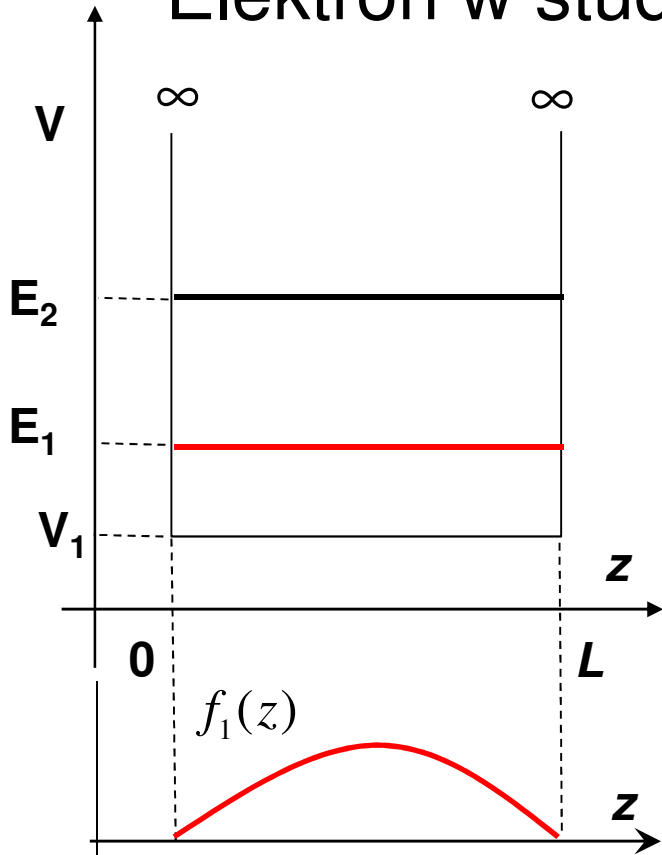
$$\omega_{01}(z) = \sqrt{\frac{g}{l_1}} < \omega$$

**Obszar dyspersyjny:**  
fale sinusoidalne

$$\omega_{02}(z) = \sqrt{\frac{g}{l_2}} > \omega$$

**Obszar reaktywny**  
- fale wykładnicze wnikają  
na pewną głębokość...

# Elektron w studni (o nieskończonych barierach)



$$\psi(z, t) = [A \sin(kz) + B \cos(kz)] e^{-i\omega t}$$

$|\psi(z, t)|^2$  prawdopodobieństwo znalezienia elektronu równe zero poza przedziałem  $0 \leq z \leq L$

warunki brzegowe jak dla struny zamocowanej z dwóch końców



$$\psi(z, t) = A \sin(kz) e^{-i\omega t} \quad \sin(kL) = 0$$

$$k_1 L = \pi \dots k_n L = n\pi$$

Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu na jednostkę długości

$$|\psi(z, t)|^2 = |e^{-i\omega t} A \sin(kz)|^2 = |A|^2 \sin^2(kz)$$

Powinno być ono unormowane

$$1 = \int_{z=0}^L |\psi(z, t)|^2 dz = |A|^2 \int_{z=0}^L \sin^2(kz) dz = \frac{1}{2} |A|^2 L \quad \Rightarrow \quad A = |A| e^{i\alpha} = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{i\alpha}$$

$\alpha$  - stała faza

**Stąd funkcja falowa elektronu w w studni:**

$$\psi_n(z, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-i(\omega t - \alpha)} \sin(k_n z)$$

**Przyjmując (jak poprzednio) dla cząstki „klasycznej” związek dyspersyjny”**

$$E = \hbar \omega \quad \omega_n = \omega_0 + \frac{\hbar k_n^2}{2m} \quad \omega_0 = \frac{V}{\hbar}$$
$$p = \hbar k$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + V_1 = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + V_1, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

**Częstości fal inne niż częstości fal stojących na strunie!**

# Przenikanie cząstki do zakazanego obszaru

Analogia z wahadłami sprzężonymi:

Obszar dyspersyjny:

$$0 \leq z \leq L \quad \omega^2 > \omega_0^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2(z) + \frac{Ka^2}{M} k^2$$

$$\omega_0^2(z) \equiv \frac{g}{l} \quad \text{co odpowiada} \quad \omega_0(z) \equiv \frac{V_1}{\hbar}$$

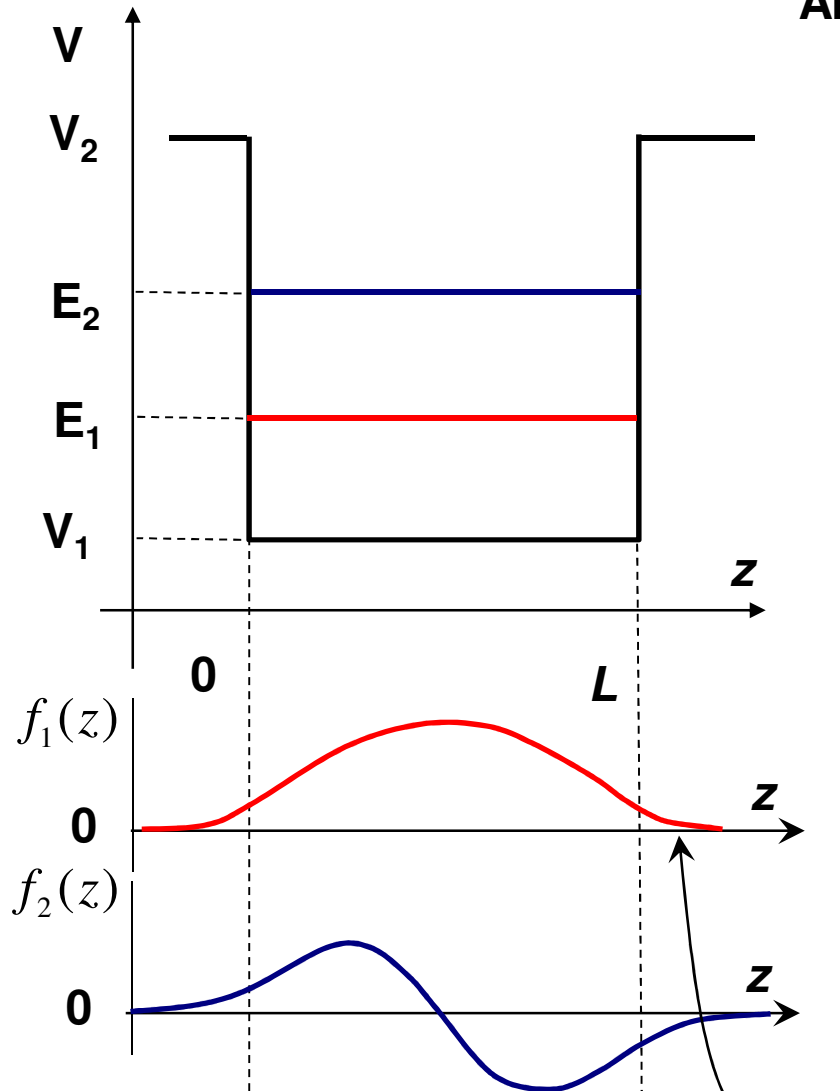
Obszar reaktywny (zanik wykładniczy):

$$\omega^2 = \omega_0^2(z) - \frac{Ka^2}{M} \kappa^2 \quad \omega^2 < \omega_0^2$$

$$E - V_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0 \quad 0 \leq z \leq L$$

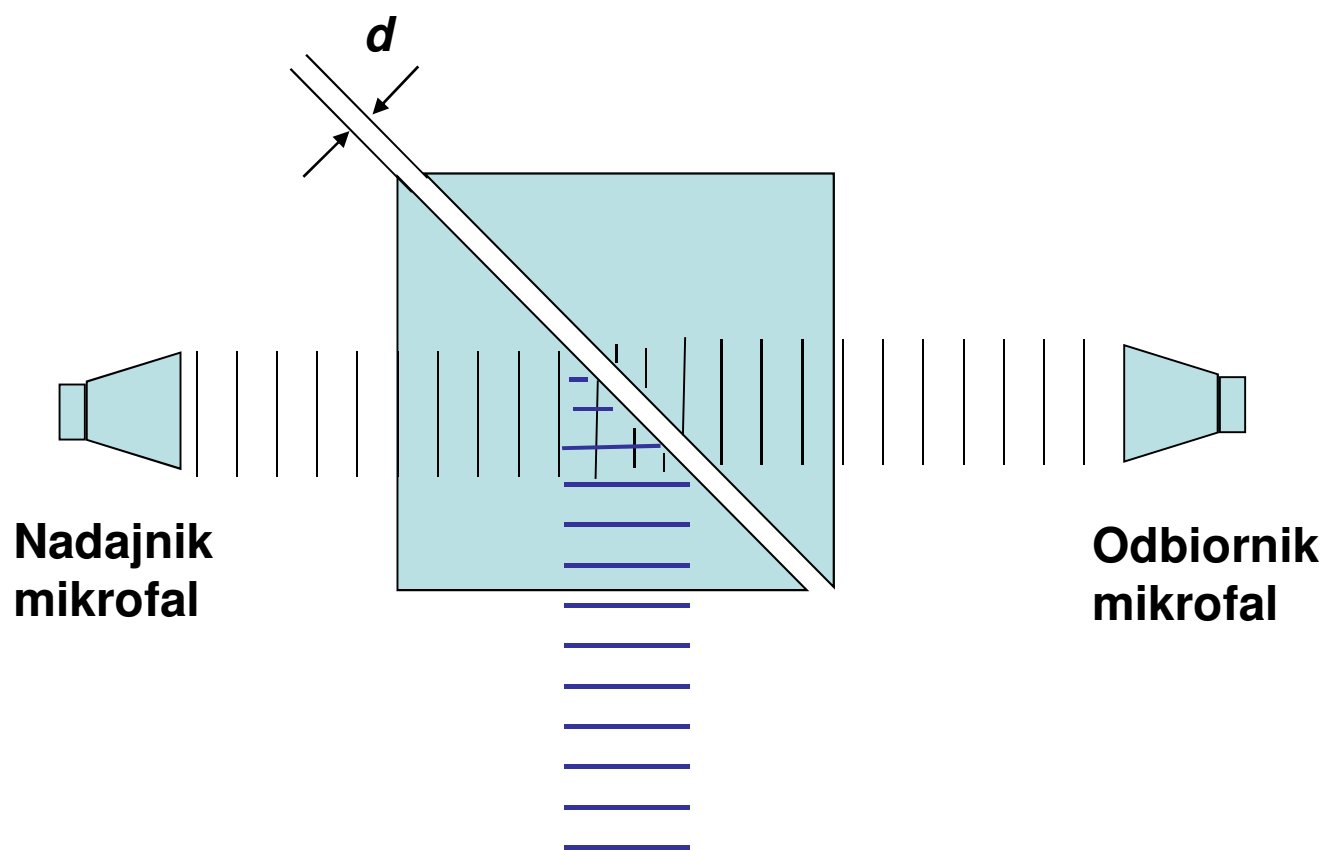
$$E - V_1 = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} < 0 \quad \text{w innych miejscach}$$

zanik wykładniczy  $|\psi(z,t)|^2 \sim |e^{-\kappa(z-L)}|^2$



Fale de Broglie'a wnikają w obszar zakazany...

# Tunelowanie przez barierę



Dla  $d \sim \lambda$  mikrofałe przenikają przez szczelinę – analogia do efektu tunelowego – przenikania cząstek przez barierę potencjału...