

Wyznaczenie momentu
bezwładności przy użyciu
wahadła torsyjnego

Wahadło torsyjne

Równanie ruchu obrotowego krążka

$$I_0 \frac{d^2 \alpha}{dt^2} = M$$

I_0 – moment bezwładności
krążka

M – moment siły

D – moment kierujący

$$M = -D\alpha$$



$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \frac{D}{I_0} \alpha = 0$$

Równanie oscylatora
harmonicznego



$$\alpha = A \sin(\omega t + \varphi)$$

Częstość kołowa

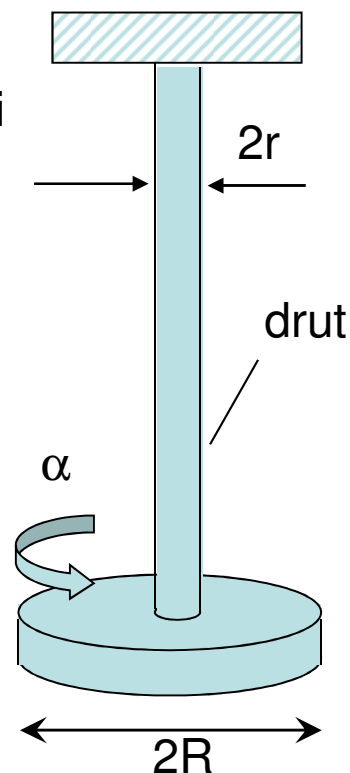
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{I_0}}$$

Okres drgań

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_0}{D}}$$



- 1) Informacja o momencie bezwładności
- 2) Informacja o własnościach sprężystych drutu



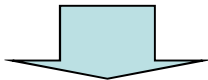
Wahadło torsyjne

Nowy moment bezwładności
z tw. Steinera:

$$I_1 = I_0 + 2[m(R - r)^2 + \frac{1}{2}mr^2]$$

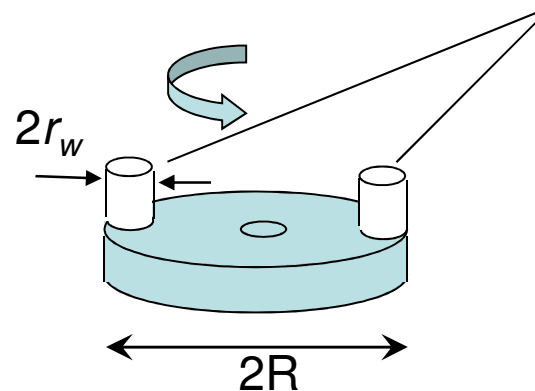
$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{D}}$$

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{I_1}{D}}$$



Wyznaczając doświadczalnie T_0 oraz T_1
znajdziemy D oraz nieznany moment
bezwładności I_0

Dwa walce o masie m
Moment bezwładności
walca względem osi
 $I_w = 1/2mr^2$



Podczas drgań wahadła zachodzi odkształcenie drutu polegające na ścinaniu...

Odształcenia sprężyste

Sprężystość (elastyczność) – własność powodująca, że odkształcone ciało dąży do stanu początkowego.

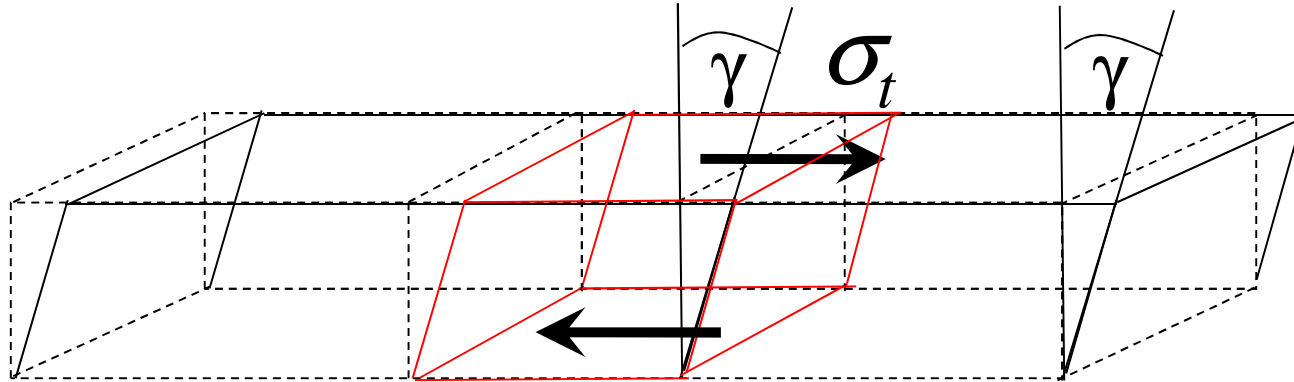
Dla idealnie sprężystych ciał naprężenia w nich wywoływane są jednoznacznymi funkcjami odkształceń.

Przy niewielkich odkształceniach własności ciał stałych można opisywać traktując je jak ciała idealnie sprężyste, wtedy, jak to wykrył R. Hooke dla prostych odkształceń, odkształcenie jest proporcjonalne do naprężenia (sprawdźmy czy ono działa...).

... a potem zajmijmy się przypadkiem odkształcenia postaci bez zmiany objętości jakim jest tzw. ścinanie...

Ścinanie

Rozważmy kostkę prostopadłościenną przyklejonej do podłoża*



Każdy element górnej powierzchni kostki poddany jest naprężeniu stycznemu...

$$\sigma_t = \frac{F}{S}$$

F – siła działająca stycznie do górnej powierzchni kostki
S – powierzchnia górnej ścianki kostki

Odkształcenie kostki polega przesunięciu górnej ścianki w kierunku naprężenia, bez zmiany kształtu tej ścianki. Ścianka przednia i tylna przyjmują kształt równoległoboków, ścianki boczne pochylają się o kąt γ

W tym wypadku prawo Hooke'a ma postać:

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

G – moduł sztywności

*Aby naprężenia powstające na brzegach nie miały znaczenia wysokość kostki powinna być znacznie mniejsza od pozostałych wymiarów

Skręcanie (ściananie) pręta

Pręt dzielimy na rurki o promieniu r i grubości dr . Górny koniec rurki jest zamocowany.

Do dolnego końca przykładamy parę sił o tej samej wartości i przeciwnych zwrotach – tworzą one moment skręcający pręt, który równoważą naprężenia ścinające powstałe w pręcie.

Każdy element rurki ulega ścinaniu o kąt γ

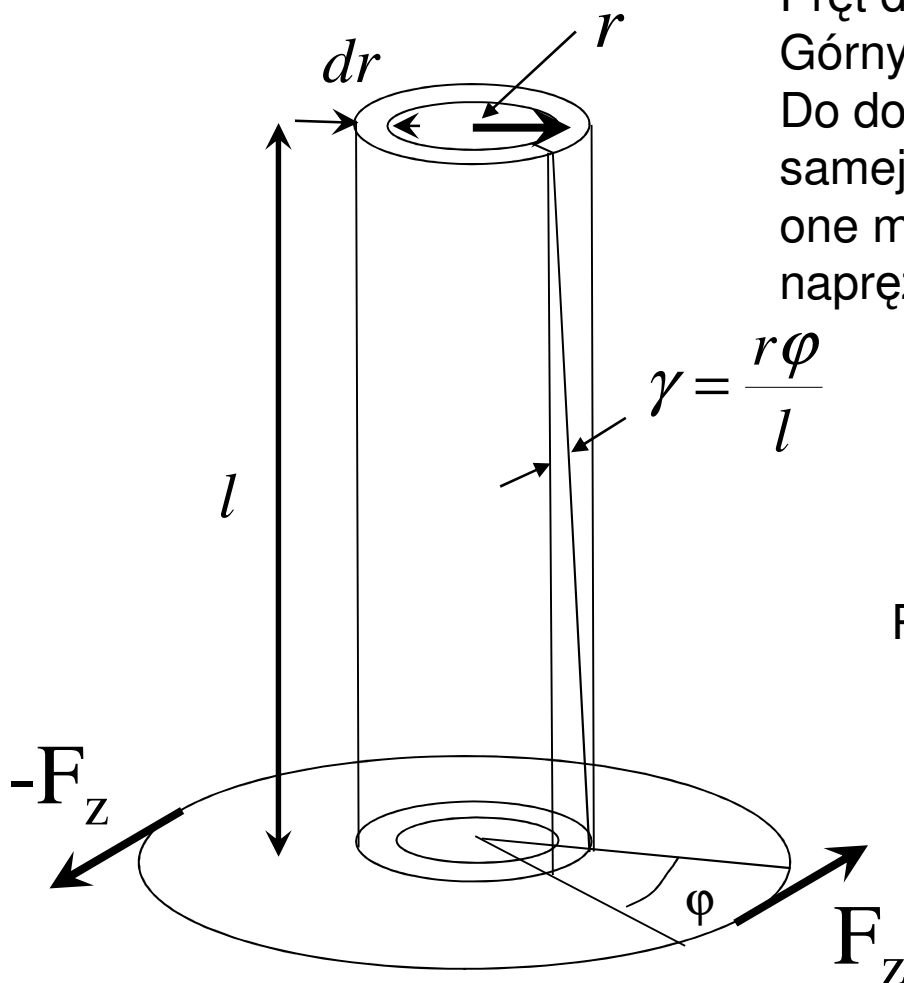
$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G} \quad G - \text{moduł sztywności}$$

Ponieważ

$$\gamma = \frac{r\varphi}{l} \quad \begin{array}{l} \varphi - \text{kąt skręcenia końca} \\ \text{rurki} \\ l - \text{długość rurki} \end{array}$$

Zatem naprężenie ścinające:

$$\sigma_t = \frac{r\varphi}{l} G$$



Skrećanie pręta

Moment sił sprężystości
równoważący moment sił zewnętrznych:

$$dM = \Delta F r$$

$$dM = \sigma_t \Delta S r$$

$$dM = \sigma_t 2\pi r dr r$$

$$dM = \frac{r\varphi}{l} G 2\pi r^2 dr$$

$$dM = \frac{2\pi G}{l} \varphi r^3 dr$$

$$\sigma_t = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

z definicji
naprężenia ścinającego

ΔF – siła styczna

ΔS – powierzchnia
przekroju rurki

Sumując przyczynki od rurek o różnych promieniach
dostajemy całkowity moment sił sprężystości równoważący
moment sił zewnętrznych

$$M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} \varphi = D \varphi$$

$$D = \frac{G}{l} \frac{\pi R^4}{2} = \frac{G}{l} J$$

D – moment kierujący

J – geometryczny moment bezwładności

$$J = \iint_S r^2 dS$$

Badając drgania torsyjne wahadła fizycznego możemy wyznaczyć moduł sztywności G materiału, z którego wykonany jest drut...

Materiał	Moduł sztywności GPa	Współczynnik Poissona
guma	$1.6 \cdot 10^{-3}$	0.46-0.49
miedź	40-48	0.35
stal	82	0.29
wolfram	132	0.17
szkło	17-30	0.2-0.3

Skręcanie wałów napędzających maszyny

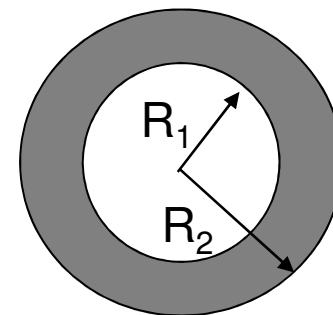
Moc przekazywana przez wał napędowy:

$$P = M\omega$$

Zamiast wałów stosuje się czasem rury...

$$M = \frac{2\pi G}{l} \varphi \int_{R_1}^{R_2} r^3 dr = \frac{G}{l} \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} \varphi = \frac{G}{l} J_r \varphi$$

$$J_r = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}$$



Jaki powinien być promień zewnętrzny R_2 rury o promieniu wewnętrznym R_1 , aby dawała ona taki sam moment skręcający jak pręt o promieniu R_1

$$\frac{\pi R_1^4}{2} = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2}$$



$$R_2 = \sqrt[4]{2} R_1 \cong 1,19 R_1$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{2} R_1^2 - R_1^2}{R_1^2} = \sqrt{2} - 1$$

Warto używać pustych wałków!

Sprężyna

Przy rozciąganiu sprężyny drut, z którego jest ona wykonana ulega skręceniu o kąt θ (nie jest to jednak tak proste jakby się wydawało – trudno zauważyć skręcenie drutu, gdy rozciągamy sprężynę – jak to się dzieje - patrz dodatek).

$$\varphi = \frac{\Delta h}{R_s} \quad R_s - \text{promień sprężyny}$$

Skręcenie to wywoła pojawienie się momentu siły:

$$M = \frac{\pi r^4}{2} \frac{G}{l} \varphi \quad \begin{array}{l} r - \text{promień drutu} \\ l - \text{długość drutu} \end{array}$$

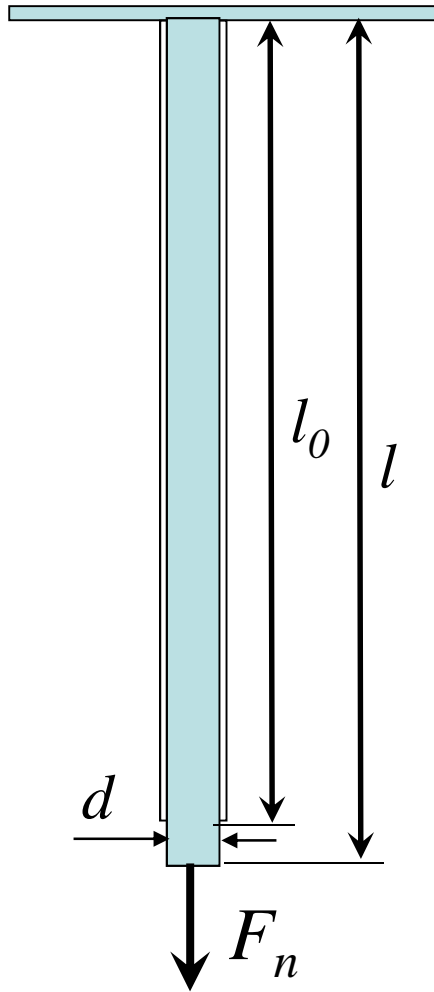
Moment sił sprężystości równoważy moment siły zewnętrznej F przyłożonej dokładnie wzdłuż osi sprężyny

$$M = R_s F$$

Łącząc powyższe wzory i biorąc pod uwagę, że długość drutu sprężyna wynosi $l = 2\pi N R_s$ (gdzie N – liczba zwojów sprężyny) dostajemy ostatecznie:

$$F = \frac{G r^4}{4 R_s^3 N} \Delta h \quad F_z = -k \Delta h \quad k = \frac{G r^4}{4 R_s^3 N}$$

Rozciąganie drutu



Wydłużenie względne: $\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} = \varepsilon$

Prawo Hooke'a (dla niewielkich odkształceń):

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

σ - naprężenie normalne
 E - moduł Younga

$$\sigma = \frac{F_n}{S}$$

$$F_n = SE \frac{\Delta l}{l_0}$$

Przewężenie względne:

$$\varepsilon_t = -\frac{\Delta d}{d_0}$$

Dla odkształceń sprężystych:

$$\varepsilon_t = \mu \varepsilon$$

lub

$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

μ - współczynnik Poissona

Moduł Younga

Material	Moduł Younga (E) GPa
guma	0,01-0,10
Polietylen (LDPE)	0,2
Polipropylen (PP)	1,5-2,0
Oślonka wirusa	1-3
Poli(tereftalan etylenu) (PET)	2,0-2,5
Polistyren (PS)	3,0-3,5
Nylon	2-4
Drewno dębowe (wzdłuż włókien)	11
Beton wysokiej wytrzymałości (ściskany)	30
Magnez (Mg)	45
Stop glinu (aluminium) (Al)	69
Szkło (SiO₂ , Na₂CO₃ , CaCO₃)	72

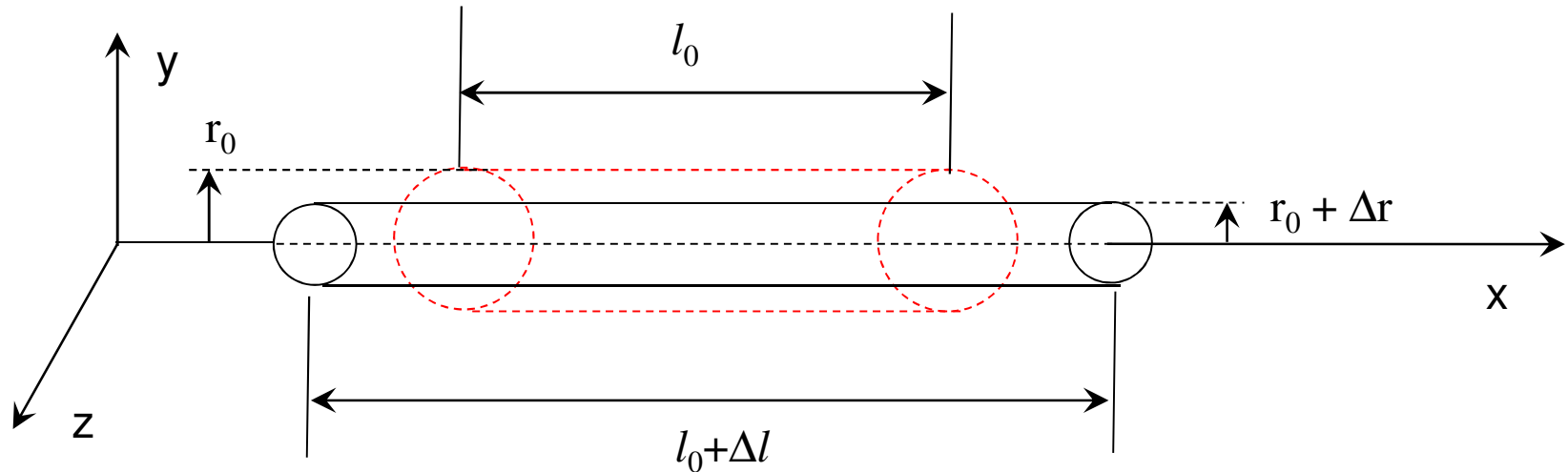
Material	Moduł Younga (E) GPa
Szkło (SiO₂ , Na₂CO₃ , CaCO₃)	72
Mosiadz (Cu , Zn) i Brąz (Cu, Sn)	103-124
Tytan (Ti)	105-120
Kompozyt z włókna węglowego	150
Żelazo kute i stal	190-210
Wolfram (W)	400-410
Węglik krzemu (SiC)	450
Węglik tytanu (TiC)	450-650
Miedź	100-115
Cynk	84
Ołów	16
Cyna	47
Nanorurka ^[1]	>1 000
Diamant (C)	1 050-1 200

http://pl.wikipedia.org/wiki/Modu%C5%82_Younga

Współczynnik Poissona

Materiał	μ
Guma	0,46-0,49
Ołów	0,45
Aluminium	0,34
Stal	0,29
Szkło	0,2-0,3
Kwarc	0,2
Wolfram	0,17

Zmiana objętości pręta przy rozciąganiu



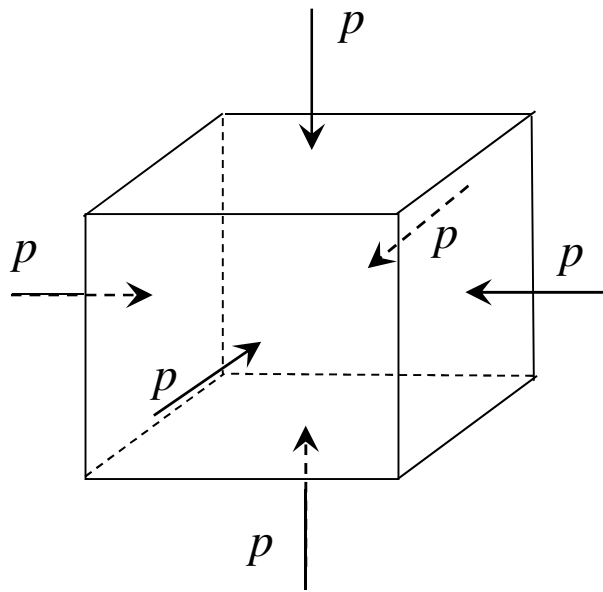
Zmiana objętości przy rozciąganiu:

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi(r_0 + \Delta r)^2(l_0 + \Delta l) - \pi r_0^2 l_0 = \\ &\approx \pi r_0^2 l_0 \left(\frac{\Delta l}{l_0} + 2 \frac{\Delta r}{r_0} \right) = V_0 \left(\frac{\sigma}{E} - 2\mu \frac{\sigma}{E} \right) = V_0 \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu)\end{aligned}$$

Doświadczenie pokazuje, że $\Delta V/V \geq 0 \quad \longrightarrow \quad \mu \leq 1/2$

Odkształcenie objętości

Względna zmiana objętości:



$$\mu = \frac{\varepsilon_t}{\varepsilon}$$

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = -\kappa p$$

$$K = \frac{1}{\kappa}$$

p – ciśnienie

κ – współczynnik ścisłości

K – moduł ścisłości

Doświadczenie myślowe:

- każda z krawędzi ulega skróceniu o czynnik

$$(1 - p/E)$$

- jednocześnie w wyniku działania ciśnienia w kierunku poprzecznym poissonowskiemu wydłużeniu w stosunku $(1 + \mu p/E)(1 + \mu p/E)$

Długość krawędzi po deformacji:

$$l = l_0(1 - p/E)(1 + \mu p/E)^2$$

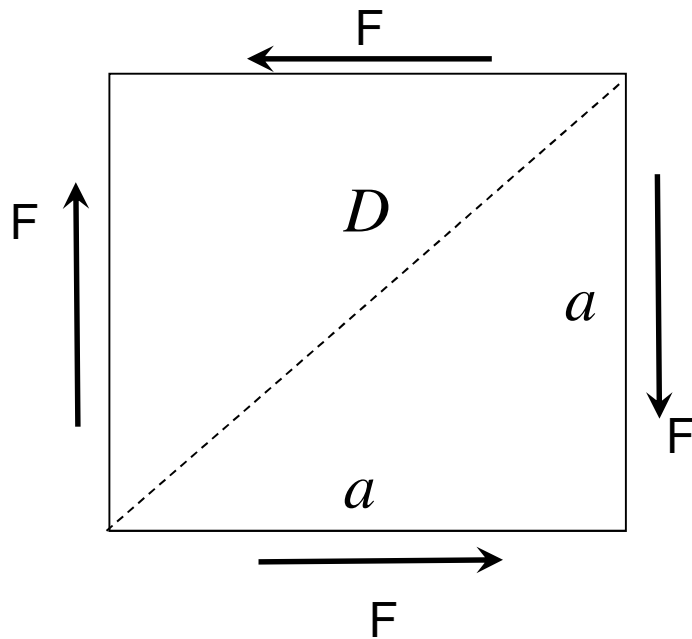
$$V = l_0^3 \left(1 - \frac{p}{E}\right)^3 \left(1 + \frac{\mu p}{E}\right)^6 \cong V_0 \left(1 - 3\frac{p}{E}\right) \left(1 + 6\frac{\mu p}{E}\right) \cong V_0 \left(1 - \frac{3(1 - 2\mu)}{E} p\right)$$

$$-\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} p$$

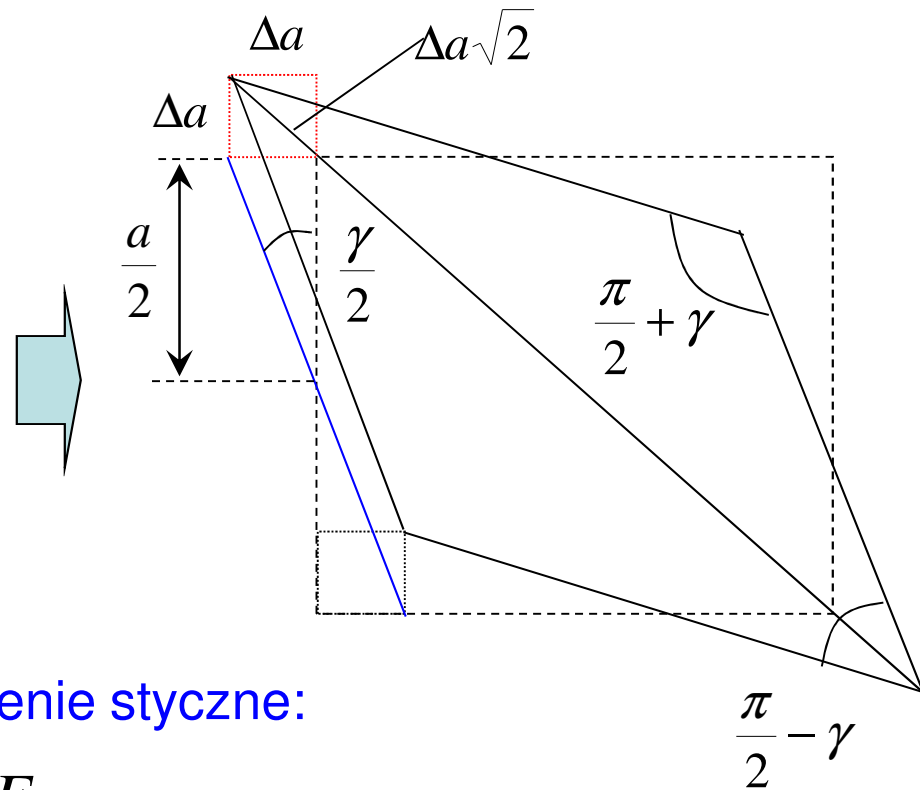
$$\kappa = \frac{3(1 - 2\mu)}{E} \text{ lub } K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$$

Związek pomiędzy modułem Younga i modułem sztywności.

Rozważmy ścinanie płytki...



d – grubość płytki



Naprężenie styczne:

$$\sigma_t = \frac{F}{ad}$$

Naprężenie normalne:

$$\sigma_n = \frac{F\sqrt{2}}{ad\sqrt{2}} = \frac{F}{ad} = \sigma_t$$



$$\sigma_n = \sigma_t$$

Wypadkowa siła wzdłuż przekątnej, do powierzchni przekroju płytki wzdłuż przekątnej...

Naprężenia normalne
rozciąga przekątną

Zmiana kąta
pomiędzy bokami

$$\gamma = \frac{\sigma_t}{G}$$

G – moduł
sztywności

$$2\Delta D = 2\Delta a\sqrt{2}$$

Zmiana długości przekątnej:

- rozciąganie „podłużne”
- rozciąganie poissonowskie

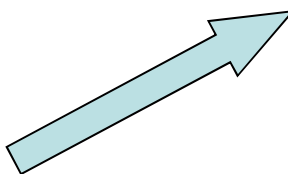
$$2\Delta D = \frac{\sigma_n}{E} D + \mu \frac{\sigma_n}{E} D = \frac{1+\mu}{E} \sigma_n D$$



$$2\Delta a\sqrt{2} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t a\sqrt{2}$$



$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t$$



$$\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cong \frac{\gamma}{2} = \frac{\Delta a}{a/2} = \frac{2\Delta a}{a}$$



$$\frac{2\Delta a}{a} = \frac{\sigma_t}{2G}$$



$$\frac{\sigma_t}{2G} = \frac{1+\mu}{E} \sigma_t$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$



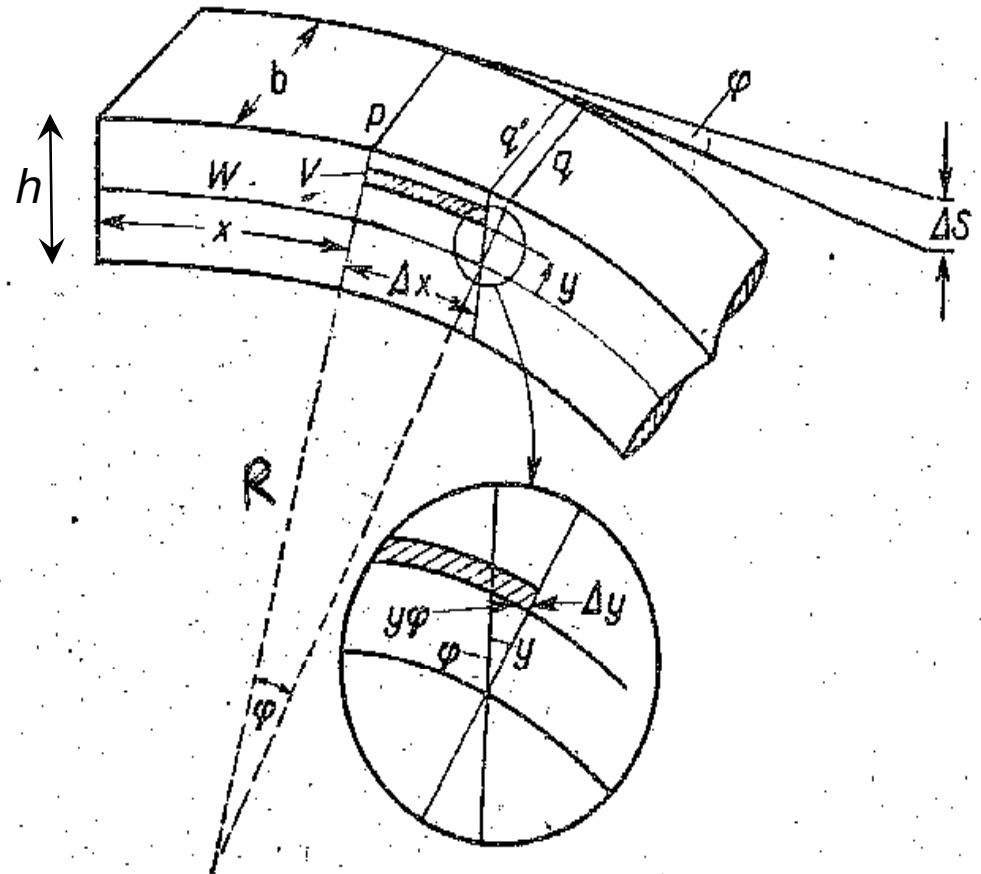
**ograniczenie na
wsp. Poissona**

$$\mu > -1$$

Czyli:

G mniejsze niż E (od $1/3$ do $1/2$ E)

Popatrzmy jak odkształca się
gumka myszka,
napisy na papierze...



- H. Szydłowski Pracownia Fizyczna (PWN)

$$\Delta F_n = \sigma \Delta A = E \varepsilon \Delta A$$

Powierzchnia elementu V :

$$\Delta A = b \Delta y$$

Wydłużenie względne (rysunek): $\varepsilon = \frac{\varphi y}{\Delta x}$

Stąd:
$$\Delta F_n = E \frac{\varphi y}{\Delta x} b \Delta y$$

Moment tej siły względem warstwy W

$$\Delta M = y \Delta F_n = E \frac{\varphi}{\Delta x} b y^2 \Delta y$$

Sumując przyczynki od wszystkich warstw mamy:

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = E \frac{\varphi}{\Delta x} J$$

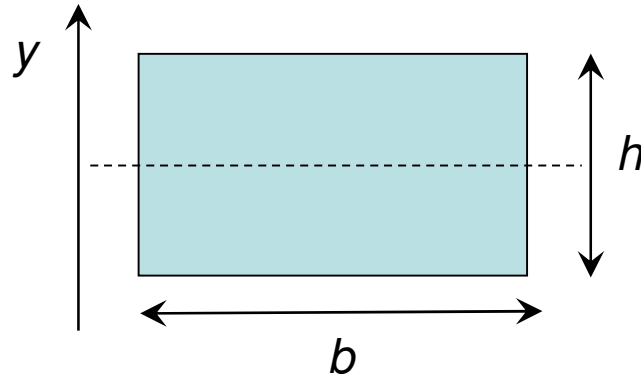
gdzie geometryczny moment
bezwładności

(element powierzchni zamiast masy)

$$J = \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy \equiv \int_A y^2 dA$$

Dla belki o przekroju prostokątnym (zginanej prostopadle do h)

$$J = \frac{1}{12}bh^3$$



Moment sił sprężystości
wytworzony w elemencie belki o
długości Δx :

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} J \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{M}{EJ} \Delta x$$

Belkę odkształca moment siły
zewnętrznej F

$$M = (l - x)F \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{F}{EJ} (l - x) \Delta x$$

Ponieważ pomiędzy stycznymi do belki w punktach p , q wynosi φ , to
przyczynek ΔS do ugięcia belki S wyniesie:

$$\Delta S = \varphi(l - x) \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{F}{EJ} (l - x)^2 \Delta x$$

Sumując ugięcia od wszystkich przyczynków Δx dostajemy:

$$S = \frac{F}{EJ} \int_0^l (l-x)^2 dx = \frac{1}{3} \frac{F}{EJ} l^3$$

Dla belki o przekroju prostokątnym:

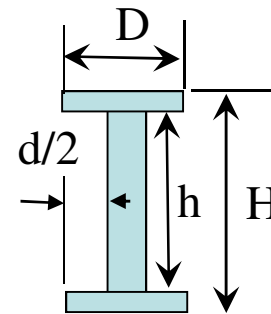
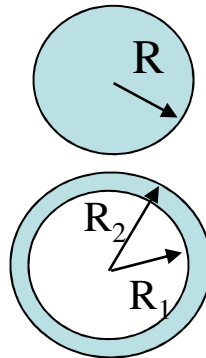
$$S = \frac{4}{bh^3} \frac{l^3}{E} F$$

Ugięcie zależy od kształtu przekroju!

$$J_p = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$J_r = \frac{\pi}{4} (R_2^4 - R_1^4)$$

$$J_t = \frac{1}{12} (DH^3 - 2dh^3)$$

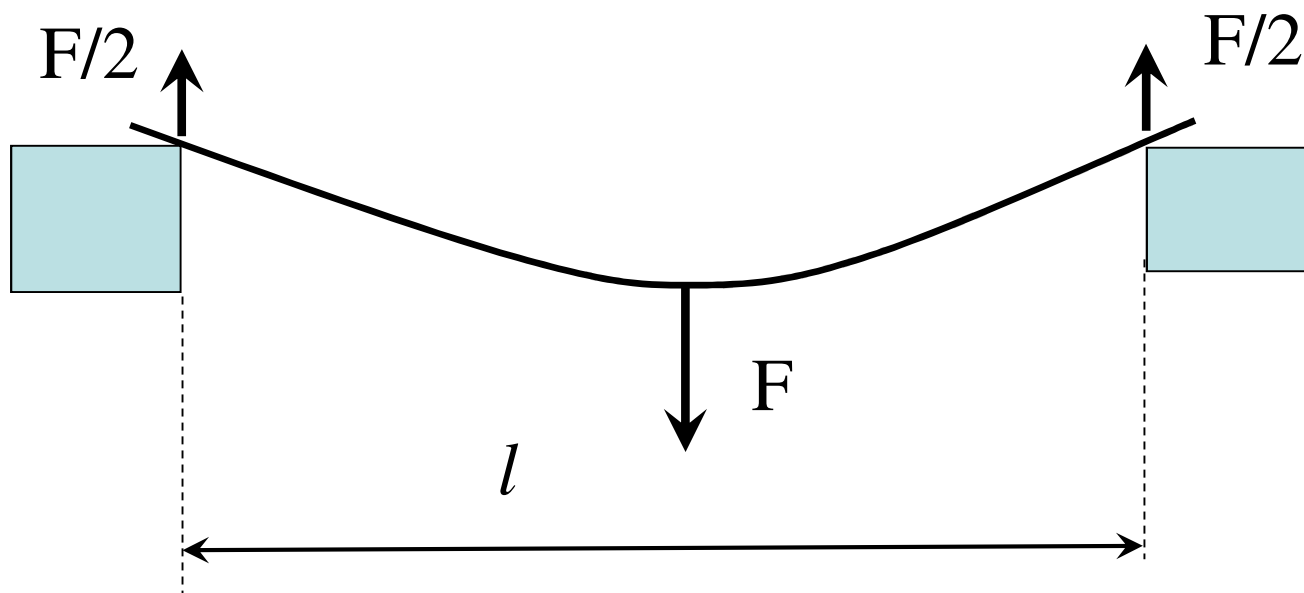


Im większy moment
Geometryczny, tym trudniej
zginać!

Materiał powinien być więc
jak najdalej od osi zginania.
Puste w środku wytrzymalsze?

Mosty, konstrukcje i kości...

Podparcie (nieważkiej...) belki z dwóch końców



Belka zamocowana
z jednej strony

Belka podparta
z dwóch stron

$$S_1 = \frac{4}{bh^3} \frac{l^3}{EJ} F \quad \Rightarrow \quad S_2 = \frac{4}{bh^3} \frac{(l/2)^3}{EJ} (F/2) = S_1 / 16$$

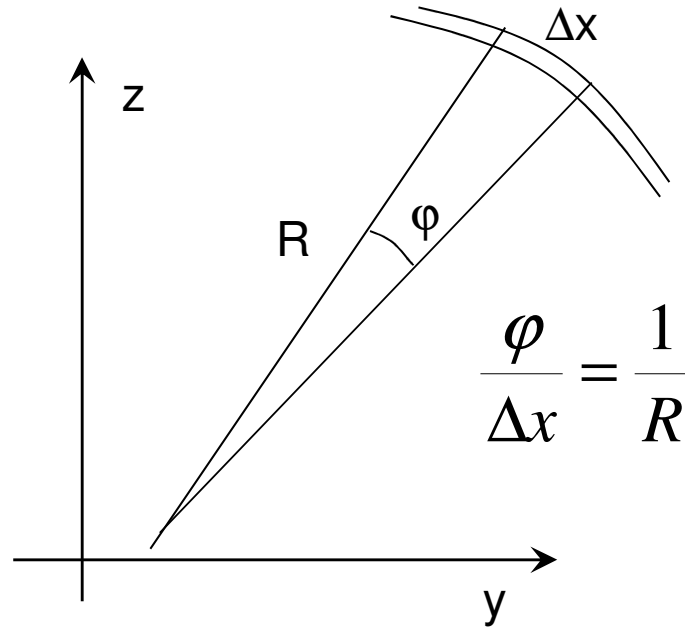
Czyli znacznie mniej się ugina!

Spróbujcie sami znaleźć ugięcie belki zamocowanej z dwóch stron...

Moment siły jeszcze raz...

$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} J$$

$$M(x) = \frac{EJ}{R(x)}$$



Promień krzywizny

$$\frac{\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{R}$$

Z matematyki wiadomo, że krzywizna

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{1}{\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}}$$

Dla małych ugięć:

$$\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

Stąd można uzyskać informacje
kształcie belki...

$$M(x) = EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\text{równanie na kształt belki}}$$

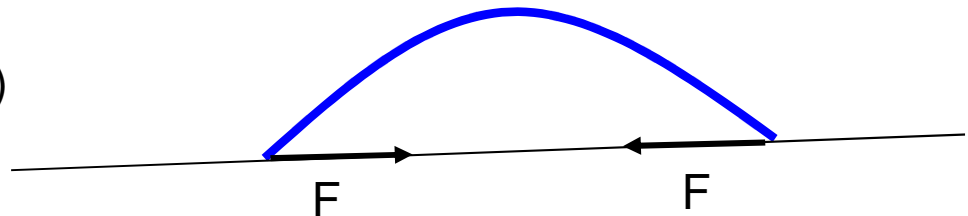
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{F}{EJ} (l - x) \quad \text{dla } x = 0 \quad z = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{2} \frac{F}{EJ} (l - x)^2 + C \\ z(x) &= \frac{1}{6} \frac{F}{EJ} (l - x)^3 + Cx + D \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{warunki} \\ \text{brzegowe} \end{array} \quad \begin{aligned} C &= \frac{1}{2} \frac{F}{EJ} l^2 \\ D &= -\frac{1}{6} \frac{F}{EJ} l^3 \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{Strzałka ugięcia} \\ \text{belki zamocowanej} \\ \text{na jednym z końców} \end{array}$$

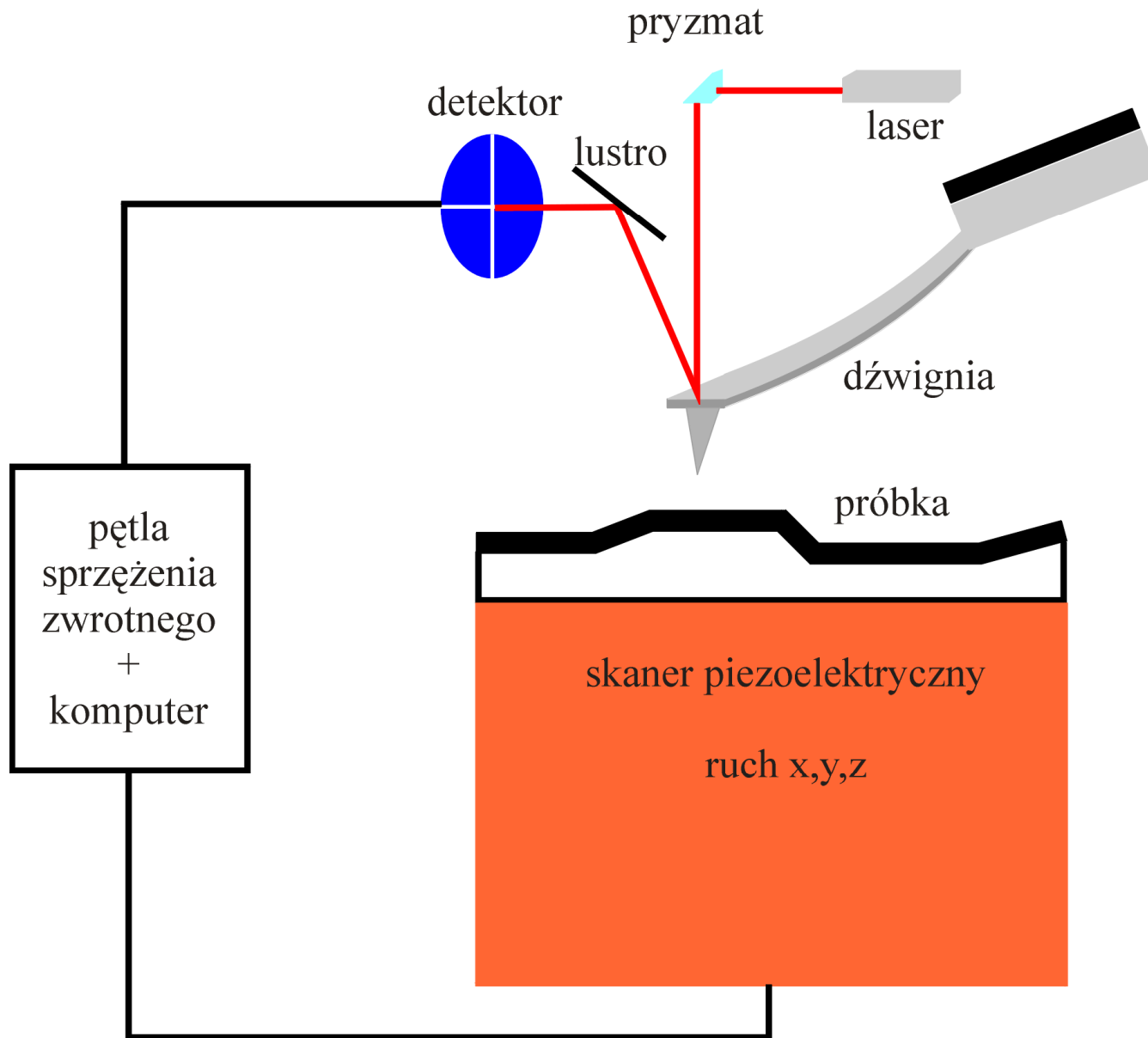
$$z(l) = \frac{1}{3} \frac{F}{EJ} l^3$$

Wyboczenie belki ...(ćwiczenia)

$$M(x) = EJ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$



ZASADA DZIAŁANIA MIKROSKOPU SIŁ ATOMOWYCH

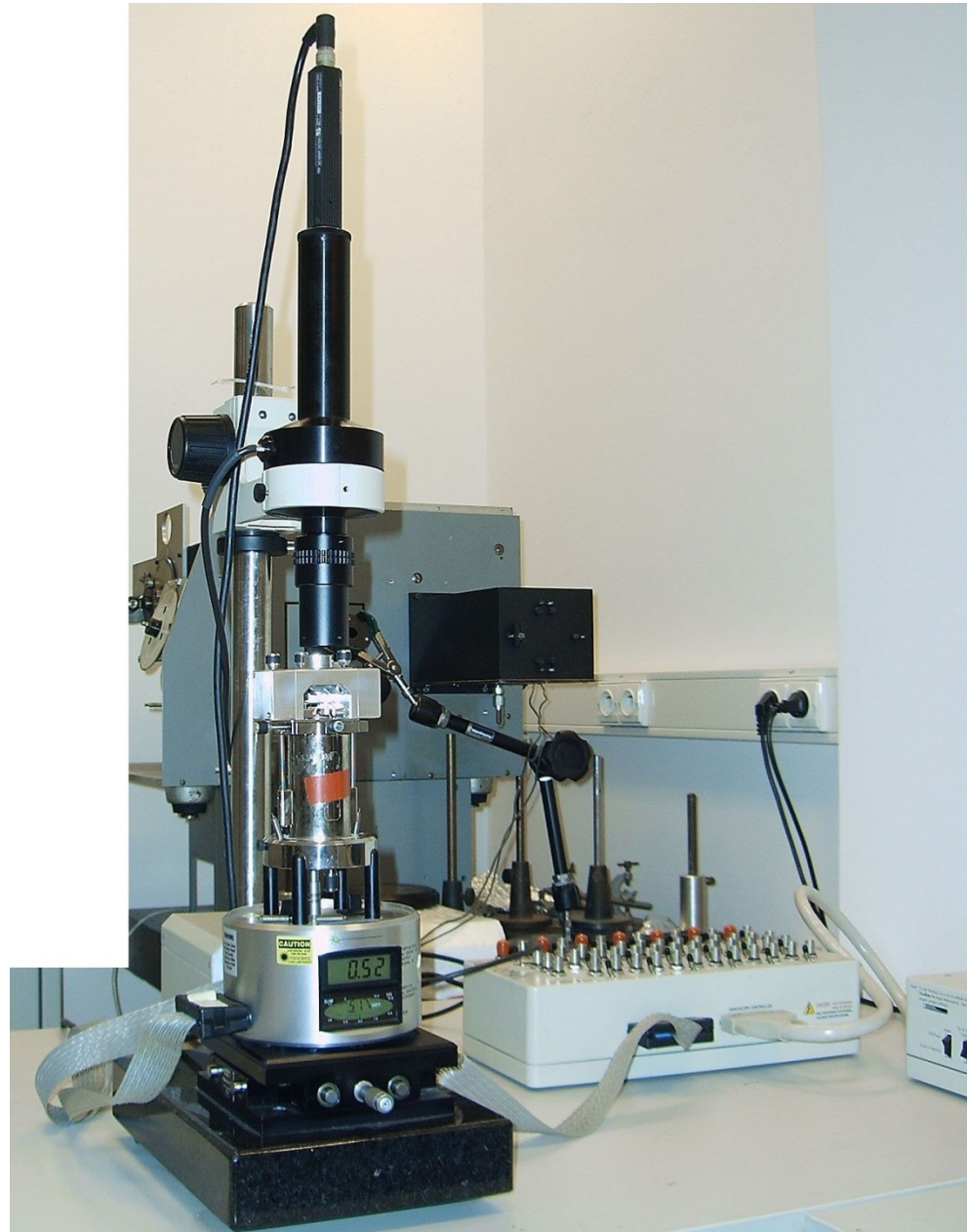


Mikroskop AFM

mikroskop
optyczny
z kamerą

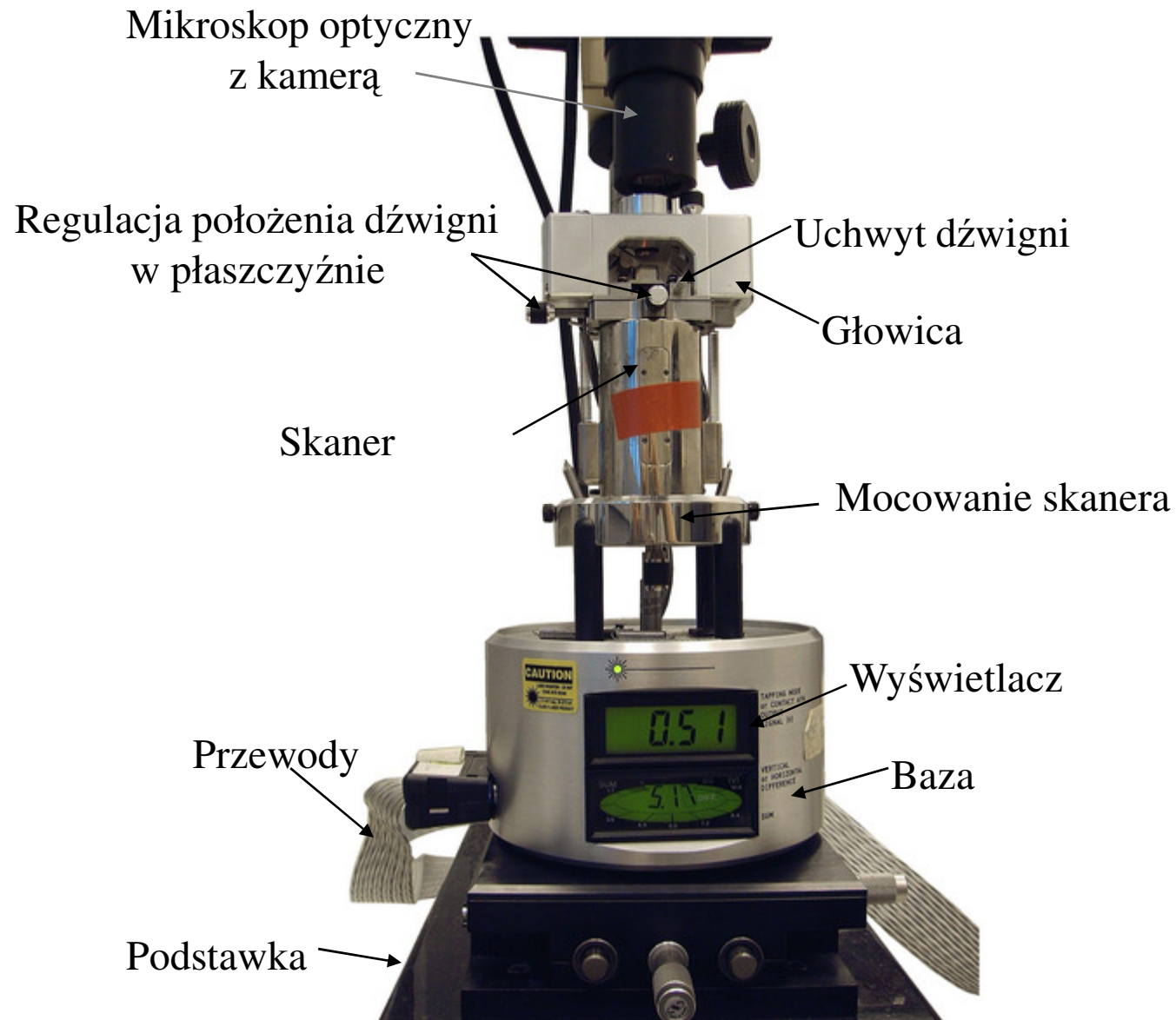
AFM
~25cm

podstawa

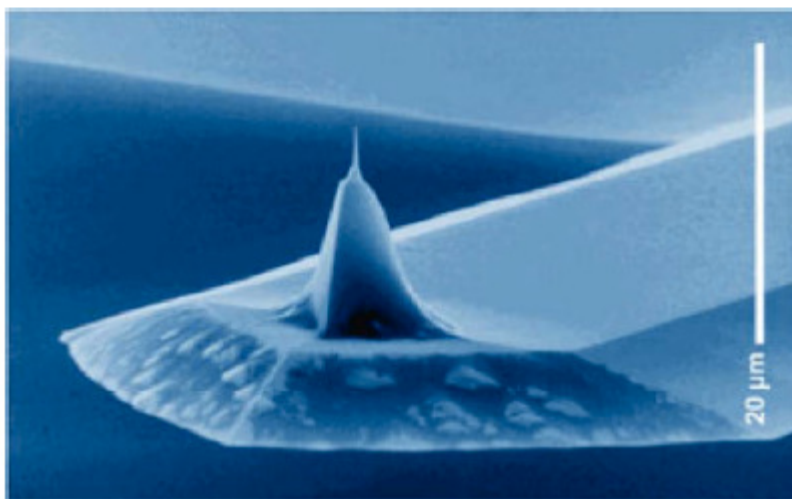
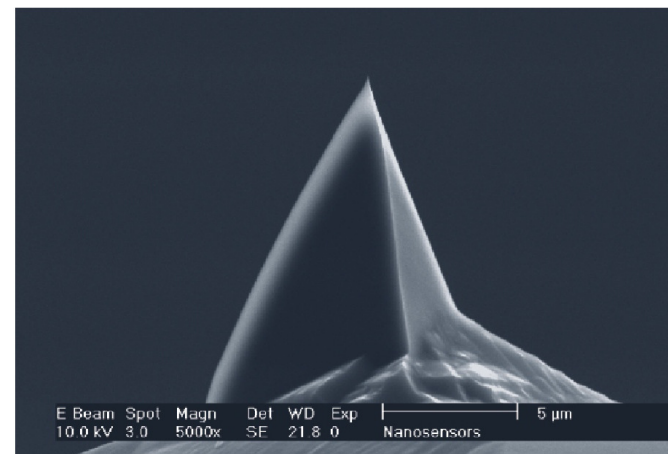
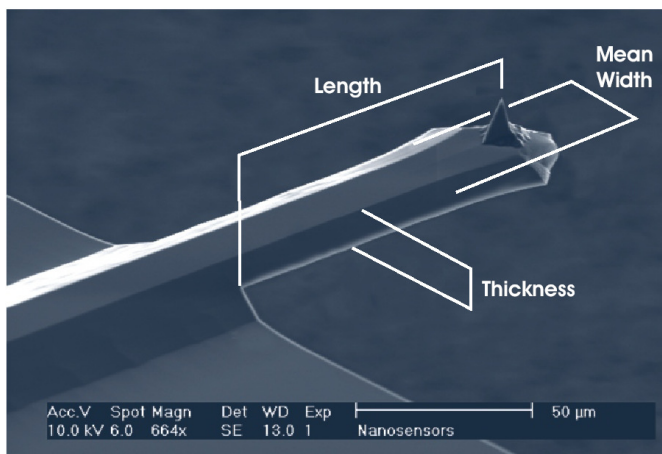


MultiMode AFM
+Nanoscope IIIa
Digital Instruments
(obecnie Veeco)

Budowa mikroskopu AFM: ruchoma próbka

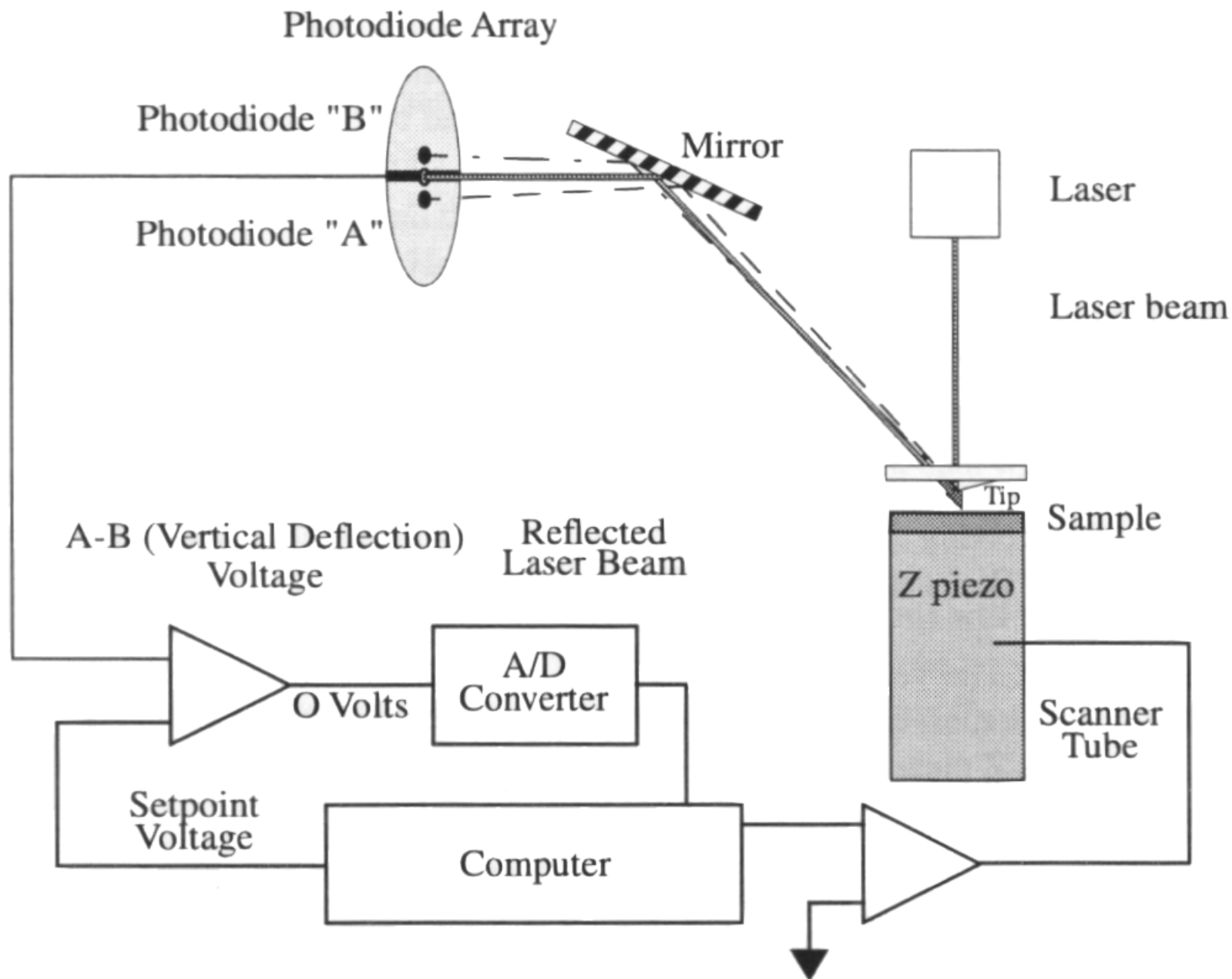


Dźwignia „tapping mode”

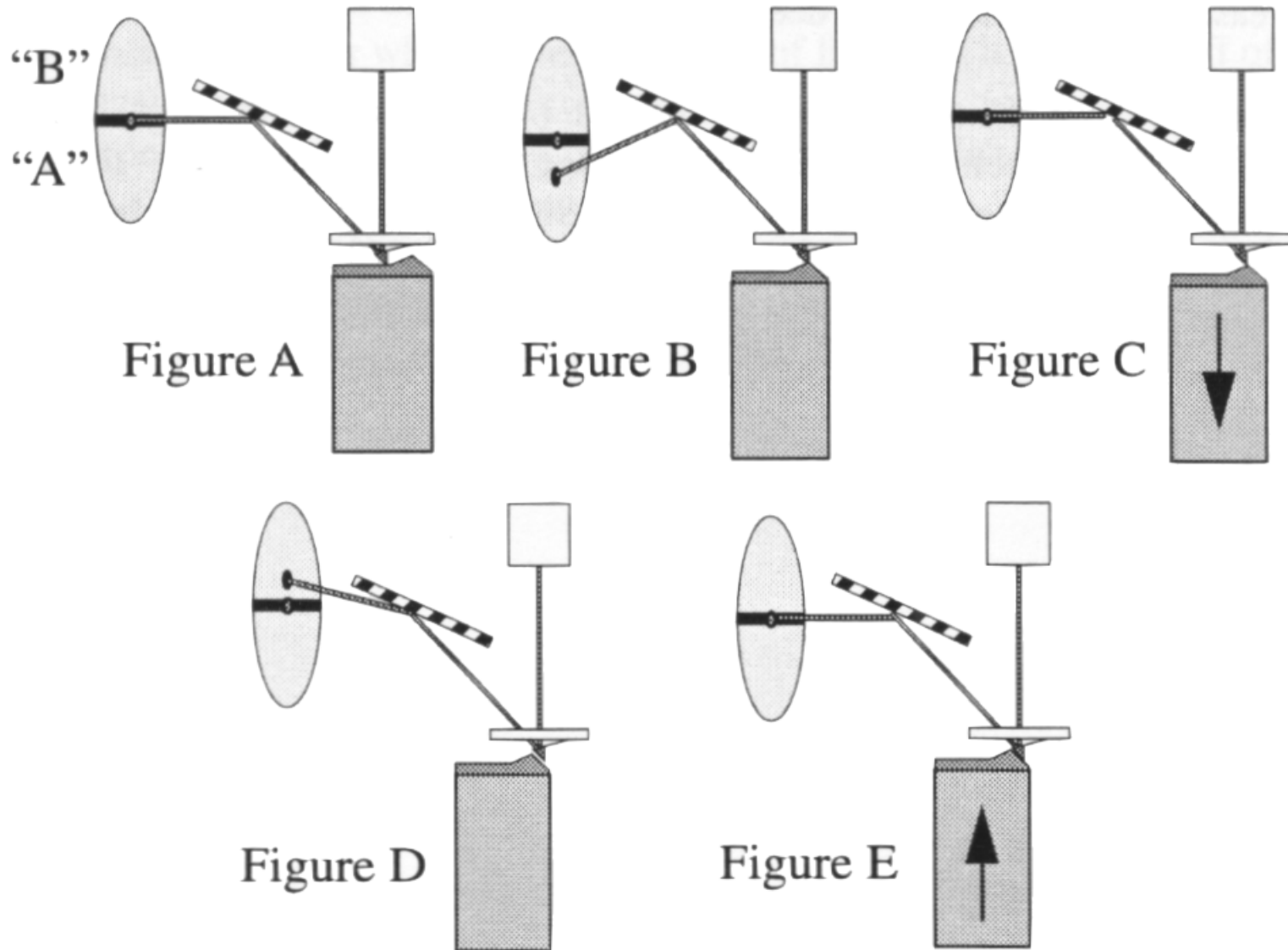


Długość	125 μm
Szerokość	30 μm
Grubość	3 μm
Wysokość	10 μm
Stała sprężystości	100 N/m
Częstość rezonansowa	~300 kHz
Promień krzywizny	10 nm
Kąt rozwarcia stożka	30°

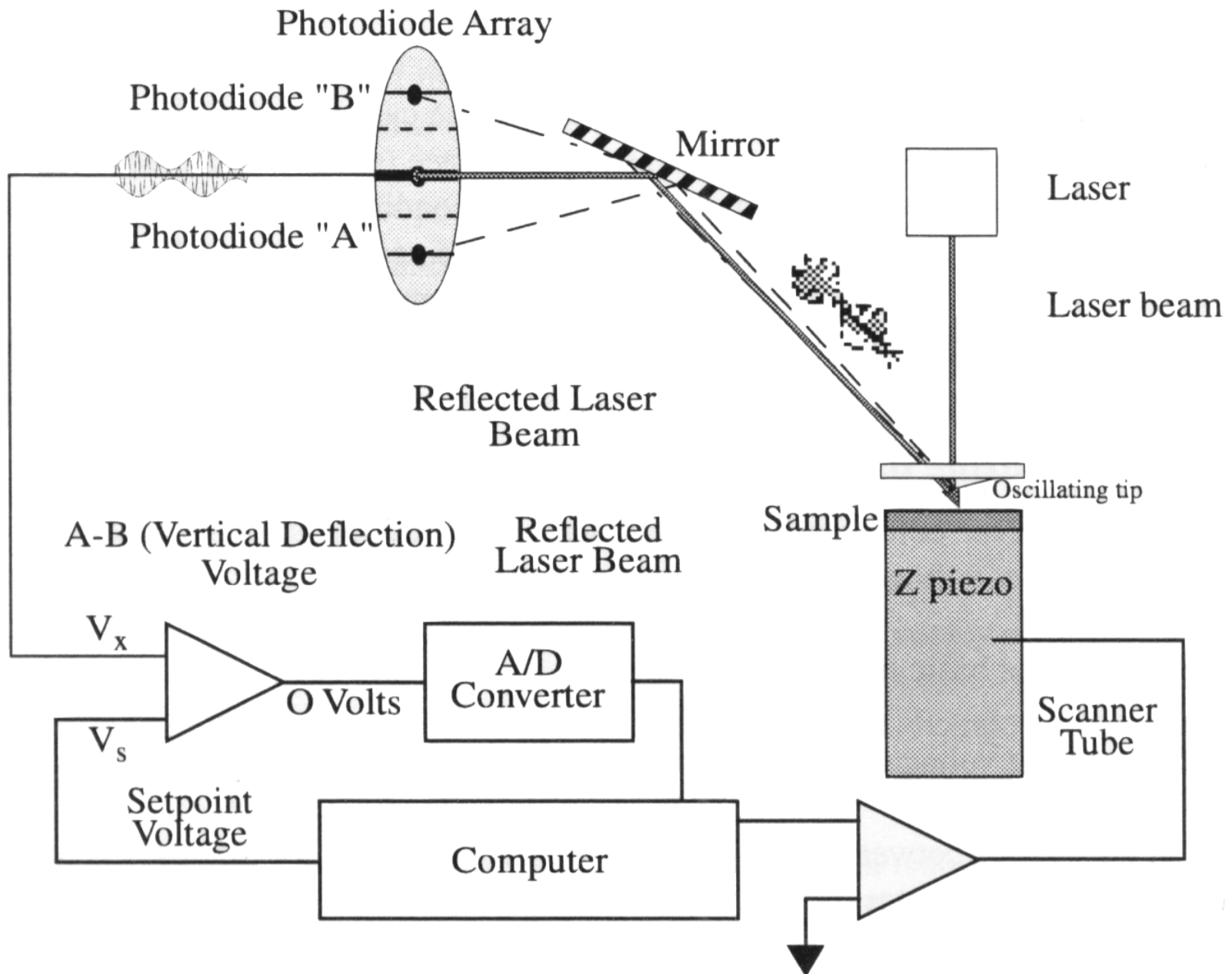
Tryb kontaktowy („contact mode”)



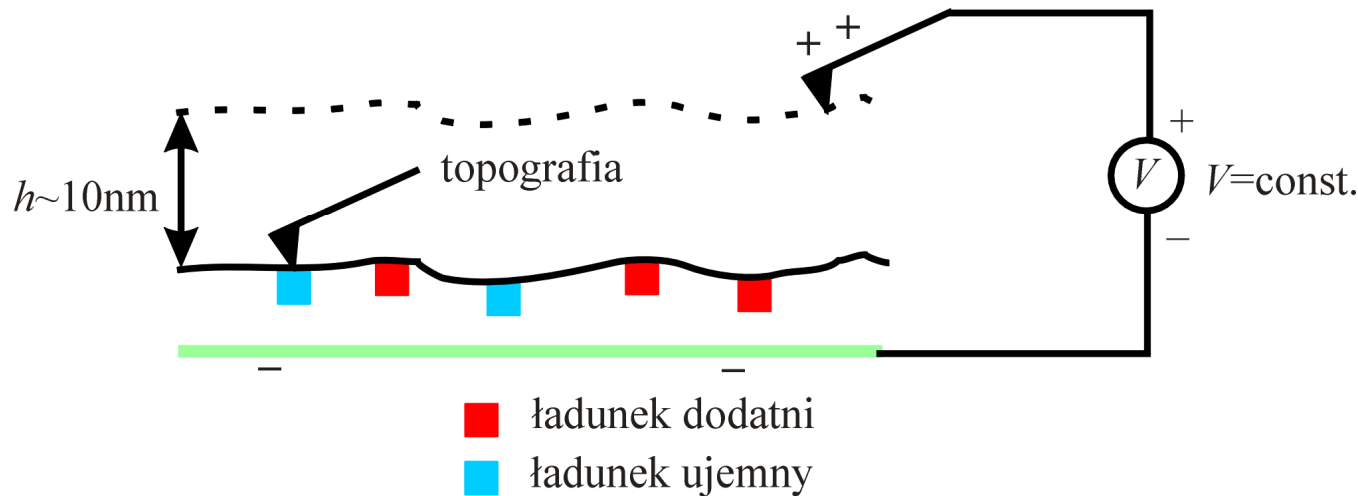
Tryb kontaktowy („contact mode”)



(TappingMode™ AFM)



EFM – Electric Force Microscopy (Kelvin Probe Microscopy)



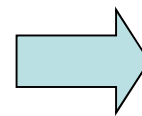
$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + \dots$$

$$\Delta\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\omega_0}{k}$$

Siła elektryczna (gradient) $\Leftrightarrow$ zmiana częstotliwości rezonansowej

Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

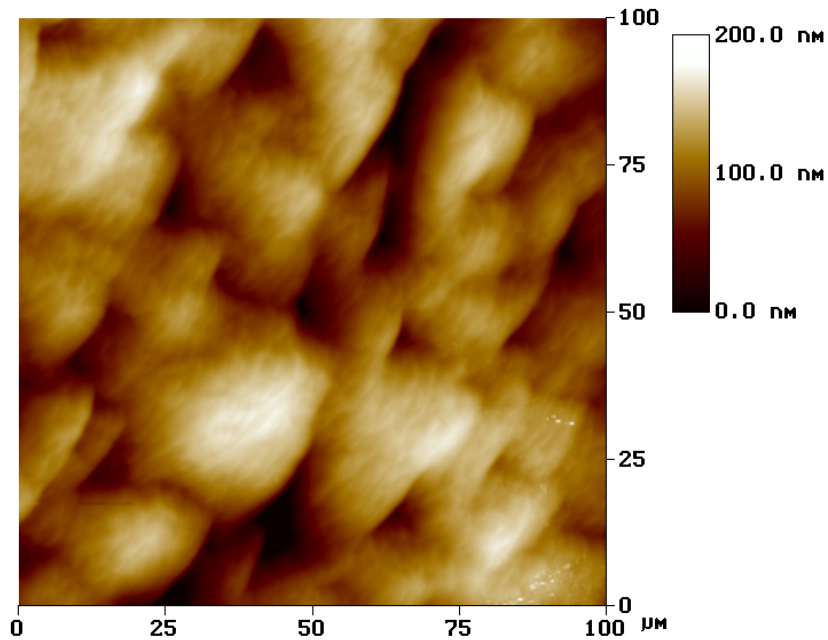
Przyciąganie $\Leftrightarrow$ Spadek częstotliwości
Odpychanie $\Leftrightarrow$ Wzrost częstotliwości



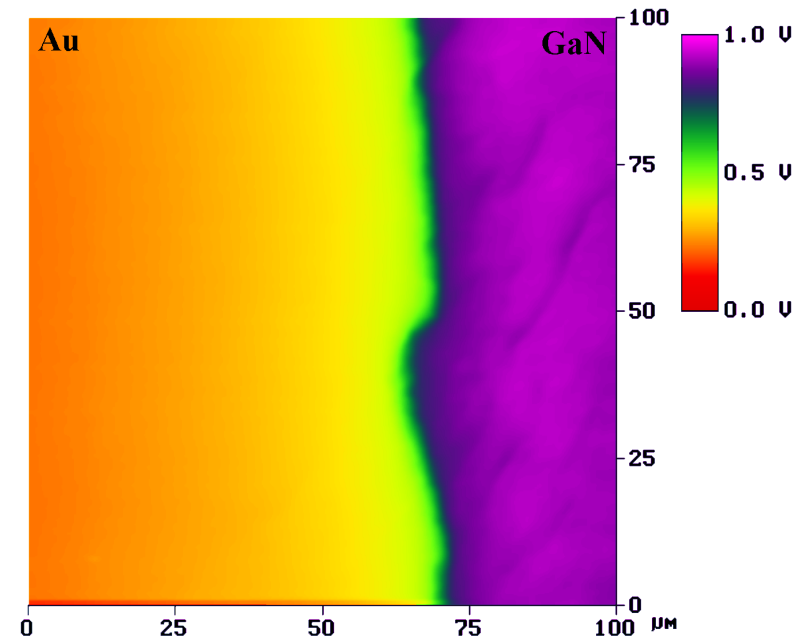
Doświadczenie w skali makro
z ciężarkiem na brzeszczocie
i magnesami...

Dioda Schottky'ego Au/GaN

(złącze metal-półprzewodnik)



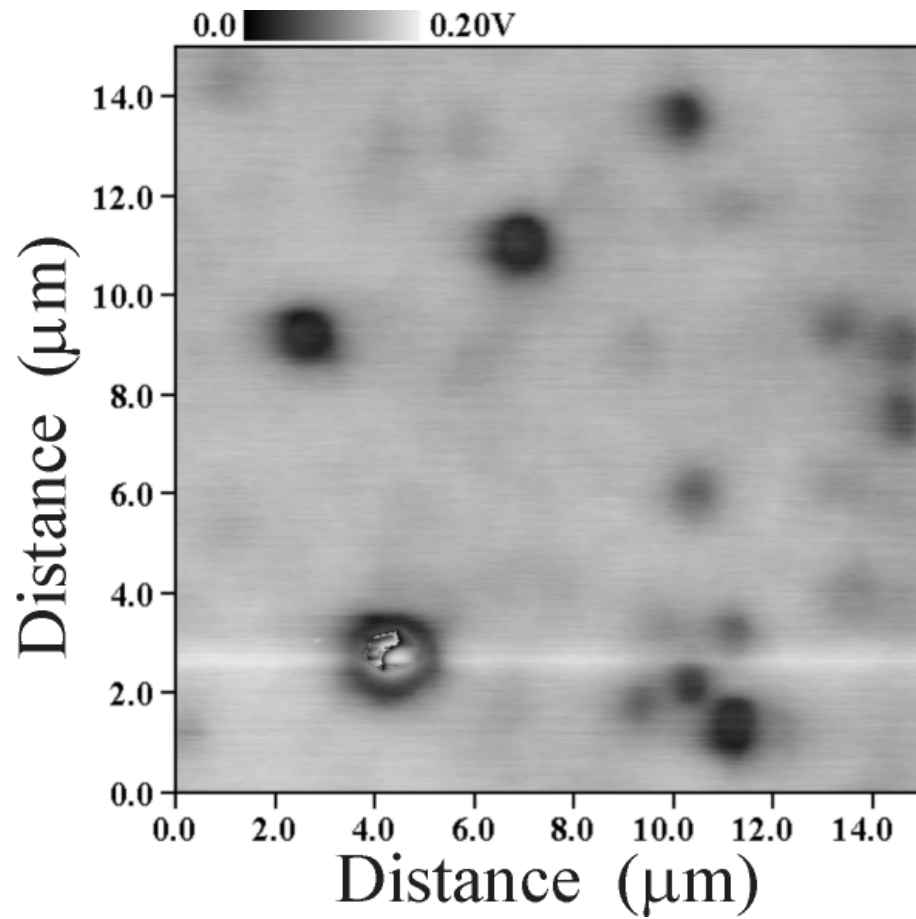
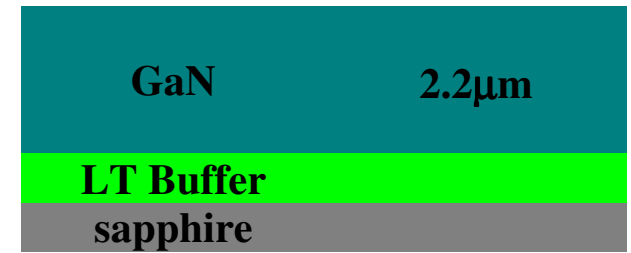
topografia



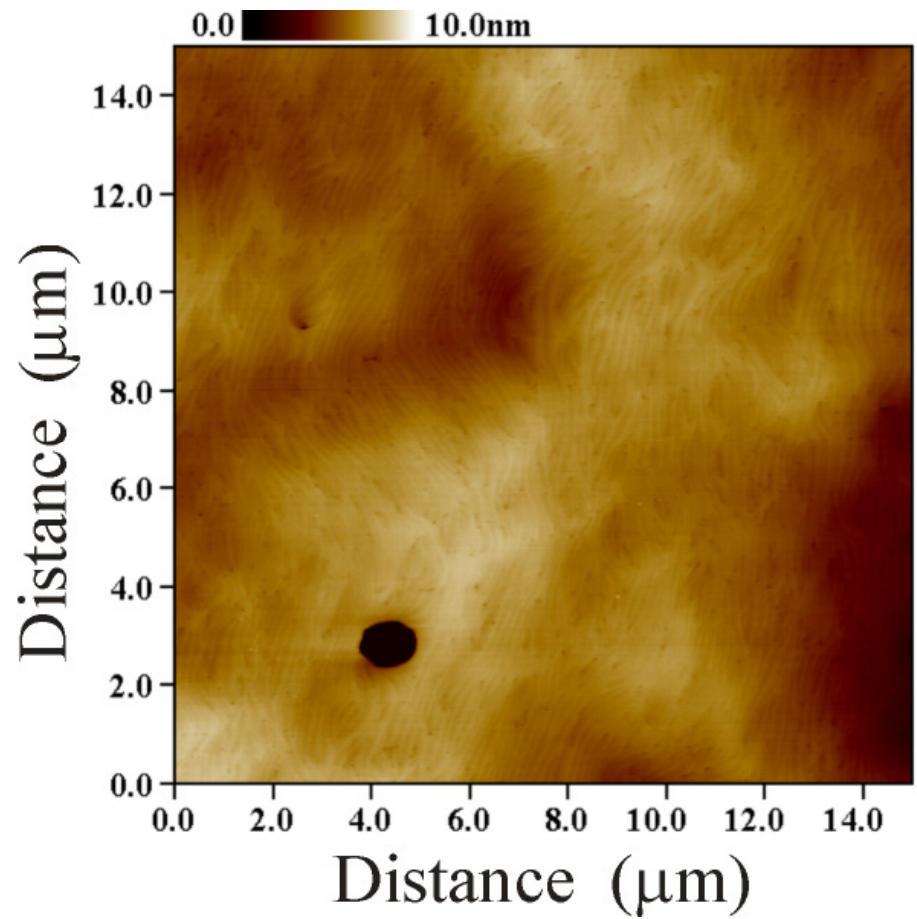
potencjał

granica półprzezroczystej warstwy Au

GaN

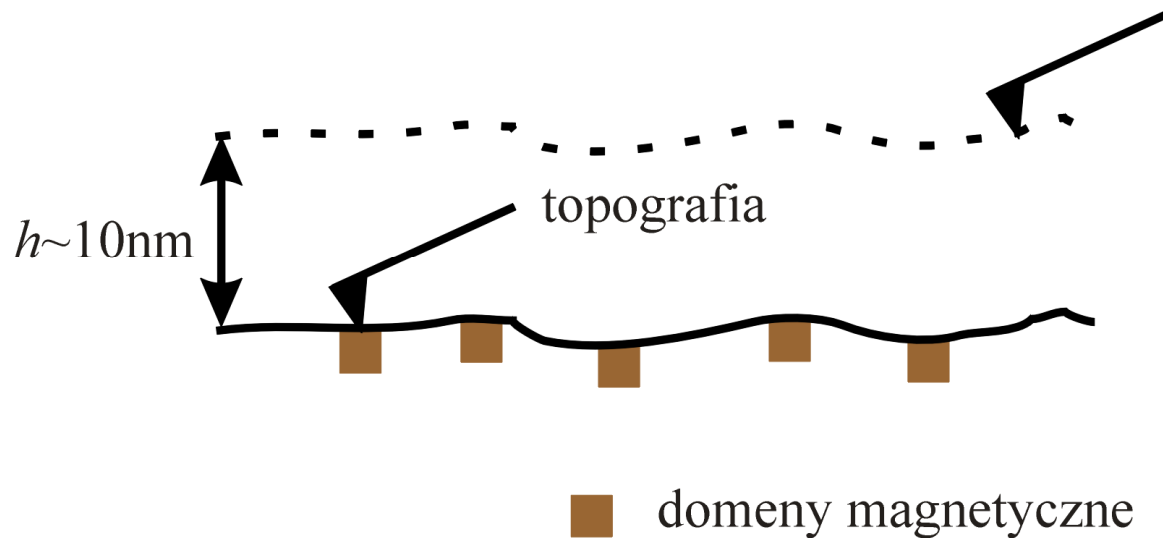


potecjał (KPFM)



topografia (AFM)

MFM – Magnetic Force Microscopy



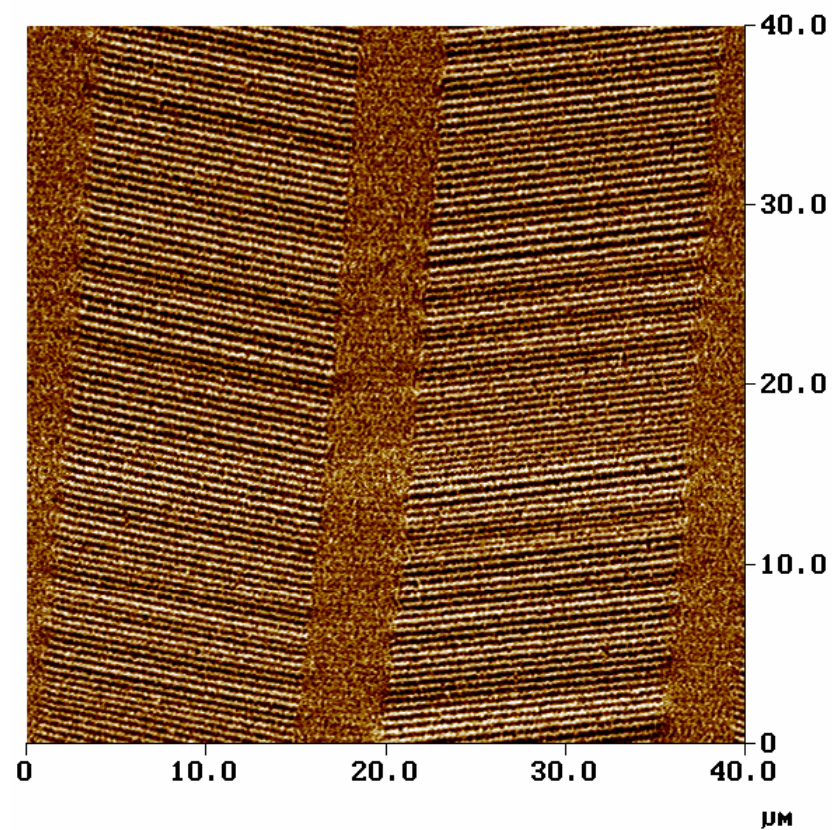
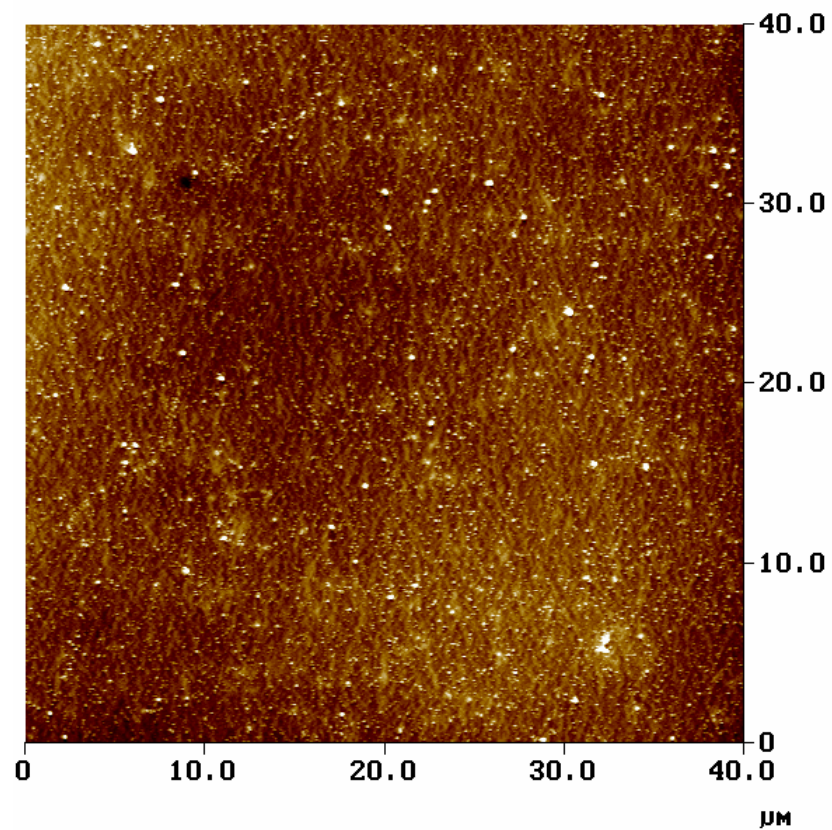
$$F(x) = F(x_0) + (x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x} + \dots$$

$$\Delta\omega_0 = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\omega_0}{k}$$

Siła magnetyczna (gradient) $\Leftrightarrow$ zmiana częstości rezonansowej

Pętla sprzężenia zwrotnego: utrzymanie rezonansu

Mikroskop sił magnetycznych (MFM)



Nanorurki węglowe

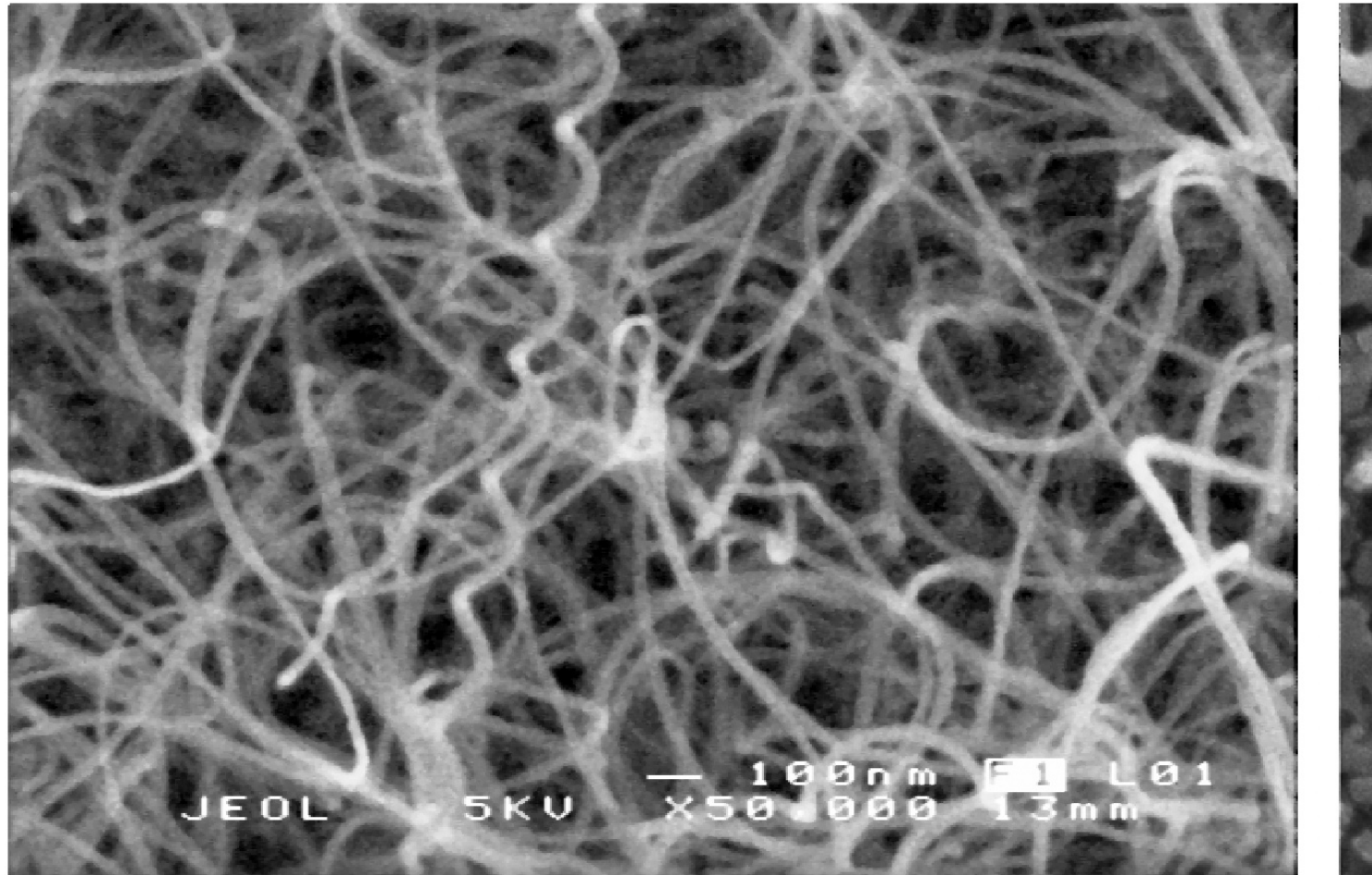


Figure 3. Scanning electron (SEM) micrographs of MWNTs

L. Forrero et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes*,

Moduł Younga dla nanorurki?

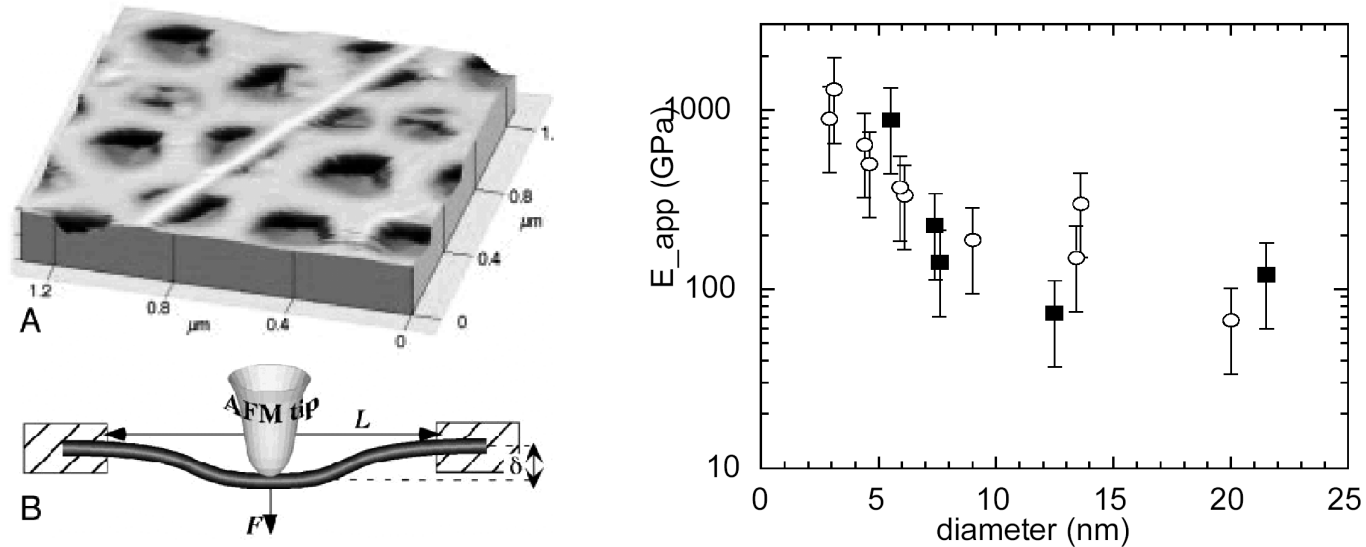


Figure 5. Dependence of the apparent Young's modulus (E_{app}) on the diameter of SWNT bundles measured using AFM. The untreated bundles are represented by the open circles and the hydrogenated and irradiated bundles by the filled squares.

L. Forrero et al. *Electronic and mechanical properties of carbon nanotubes* (Wikipedia)

A. Volodin et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 3342 (2000)

Palaci et al., Phys. Rev. Lett. **94**, 175502 (2005)

NT-MDT sets new standards for SPM solutions

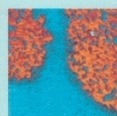


The widest range of Scanning Probe Microscopes and related products

New



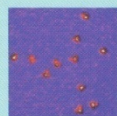
Demagnetization of the hard disk sample with the external magnetic field increase (0, 1520 Gauss). MFM images. Scan size: 30x30µm.



AFM image of composite protein film with areas of different components. Scan size: 3x3 µm.



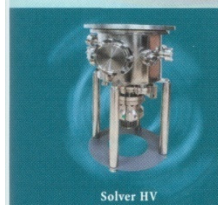
AFM nanolithography image obtained by electrical local probe oxidation technique on ultrathin titanium film. Scan size: 2.5x2.5 µm.



Monoclonal antibodies (IgG2) to A-chain of ricin (IgG1). Scan size: 270x270x3 nm.



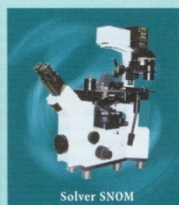
STM image of carbon nanotube deposited on an HOPG substrate. Scan size: 20x20 nm.



Solver HV



Solver P47H



Solver SNOM



Solver LS



NanoTech America

Distributed through **NanoTech America**:
313 South Jupiter Road, Suite 105
Allen, TX 75002
P: 972-954-8014; F: 972-954-8018; E: info@nt-america.com

For more information, see <http://advertisers.mrs.org>

NT-MDT
Molecular Devices and Tools for NanoTechnology



Nanosurf® MobileS
The Next Generation AFM



Nanosurf AG
Grammetstrasse 14
CH-4410 Liestal

Tel. +41-61-927 56 46 Fax +41-61-927 56 47 www.nanosurf.com

For more information, see <http://advertisers.mrs.org>



www.veeco-europe.com