

Oscylator harmoniczny tłumiony – drgania wymuszone

Oscylator swobodny tłumiony

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0$$

$$x(t) = e^{-1/2\Gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4}\Gamma^2$$

Jeśli $\frac{1}{2}\Gamma \ll \omega_0 \Rightarrow$ **Słabe tłumienie:**

$e^{-1/2\Gamma t}$ Praktycznie stałe dla jednego okresu, to energia układu praktycznie stała...

Po wielu okresach, zanik wykładniczy :

$$E(t) = E_0 e^{-\Gamma t} = E_0 e^{-t/\tau}$$

Czas zaniku
(czas życia oscylatora)

$$\tau = \frac{1}{\Gamma}$$

Czy badając drgania wymuszone oscylatora można uzyskać informacje o czasie życia oscylatora? Tak! Zbadajmy drgania stacjonarne pod wpływem harmonicznego siły wymuszającej...

Drgania stacjonarne oscylatora tłumionego – harmoniczna siła wymuszająca

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\Gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F_0 \cos(\omega t) \quad *$$

Szeroką klasę funkcji $F(t)$ możemy przedstawić jako:

$$F(t) = \sum F(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

a potem skorzystać z zasady superpozycji...

Drgania stacjonarne (założenia):

- **drżania niestacjonarne wytłumione po czasie kilku τ**
- **amplituda oscylacji proporcjonalna do amplitudy siły wymuszającej F_0**
- przesunięcie fazowe wyznaczone przez przesunięcie fazowe siły wymuszającej

$$x_s(t) = C \cos(\omega t + \varphi) = -C \sin(\varphi) \sin(\omega t) + C \cos(\varphi) \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$$

Bezpośrednie podstawienie do równania * daje warunki na A i B :

$$A = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \equiv A_{ab}$$

$$B = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2} \equiv A_{el}$$

A_{ab} – amplituda absorpcyjna,

A_{el} – amplituda elastyczna:

Jak absorbowana jest energia?

Rozważmy uśrednioną w czasie (jednego okresu) moc pobieraną przez oscylator:

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P(t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F(t) \frac{dx_s}{dt} dt$$

$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) = A_{ab} \sin(\omega t) + A_{el} \cos(\omega t) \quad \frac{dx_s(t)}{dt} = \omega A_{ab} \cos(\omega t) - \omega A_{el} \sin(\omega t)$$

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} F_0 \cos(\omega t) [\omega A_{ab} \cos(\omega t) - \omega A_{el} \sin(\omega t)] dt$$

$$\langle P_s \rangle = F_0 \omega A_{ab} \langle \cos^2(\omega t) \rangle - F_0 \omega A_{el} \langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle$$

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\omega t) \right] dt = \frac{1}{2}$$

Gdyż $\int_{t_0}^{t_0+T} \cos(2\omega t) dt = 0$ **Podobnie:** $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \sin(2\omega t) \rangle = 0$

Jak absorbowana jest energia?

Za absorpcję energii odpowiedzialna jest część przesunięta w fazie o 90° (lub $\pi/2$)!

$$\langle P_s \rangle = \frac{1}{2} F_0 \omega A_{ab}$$

$$P = P_0 \frac{\Gamma^2 \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$P_0 = \frac{F_0^2}{2m\Gamma}$$

Szukamy ω dla których:

$$P(\omega) = \frac{1}{2} P_0$$

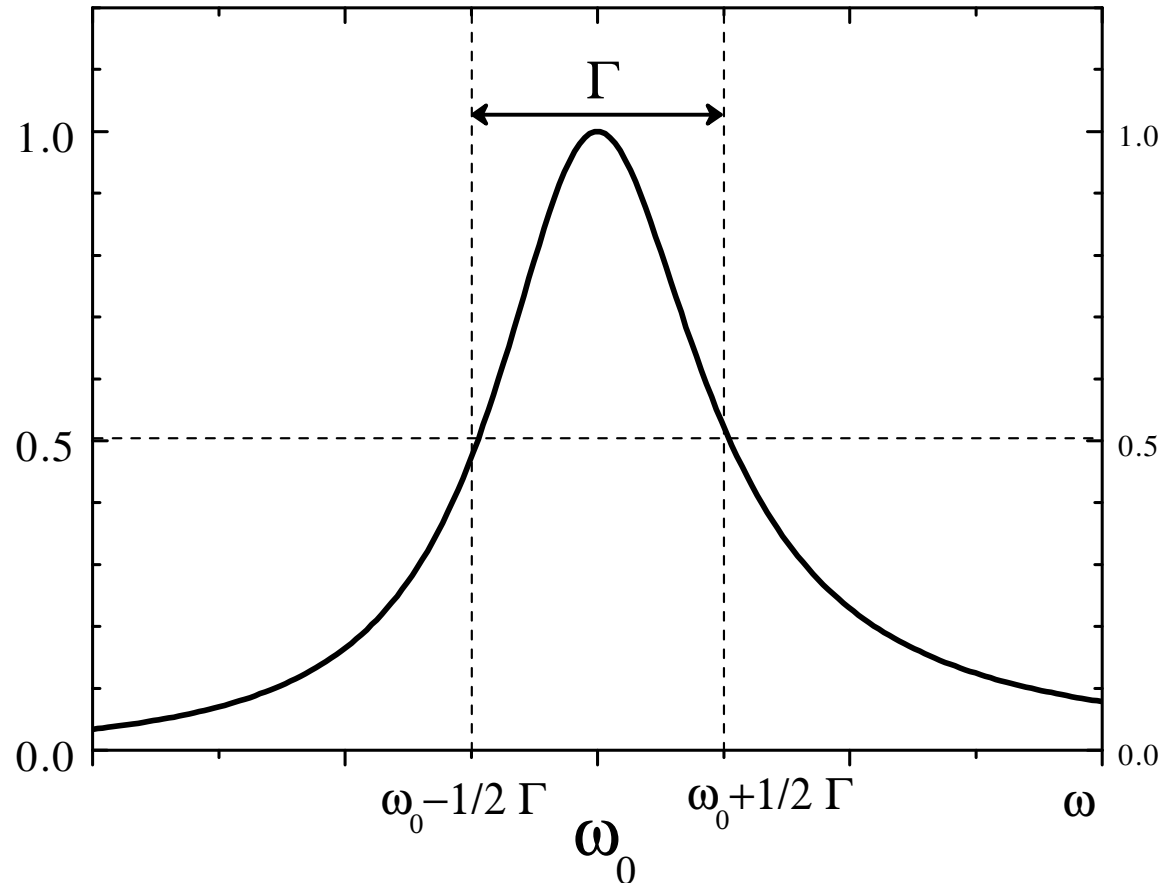


$$\omega^2 = \omega_0^2 \pm \Gamma \omega$$



$$\omega_{1,2} = \sqrt{\omega_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \pm \frac{1}{2}\Gamma$$

$P(\omega)/P(\omega_0)$



$$(\Delta\omega)_{rez} = \Gamma \text{ lub } (\Delta\omega)_{rez} \tau = 1$$

Szerokość krzywej ma związek ze średnim czasem życia tłumionych drgań swobodnych! Ważne dla spektroskopii (rozkład Lorentzowski...)

Amplituda i przesunięcie fazowe

$$A_{ab} = \frac{F_0}{m} \frac{\Gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$A_{el} = \frac{F_0}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}$$

$$\frac{A_{el}}{A_{ab}} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\Gamma \omega}$$

Daleko od rezonansu...

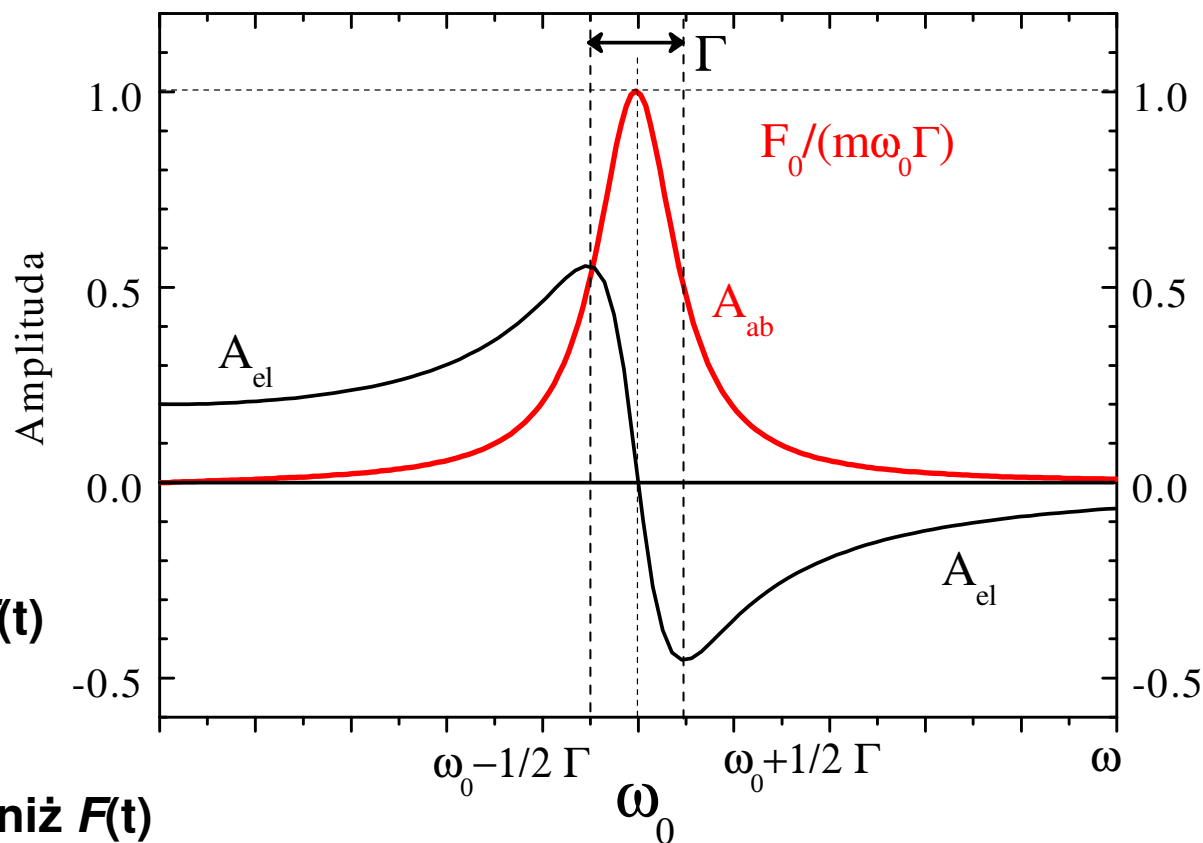
$$x_s(t) \approx A_{el} \cos(\omega t)$$

$$x_s(t) \approx \frac{F_0 \cos(\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \text{zgodnie z } F(t) \quad (\varphi=0)$$

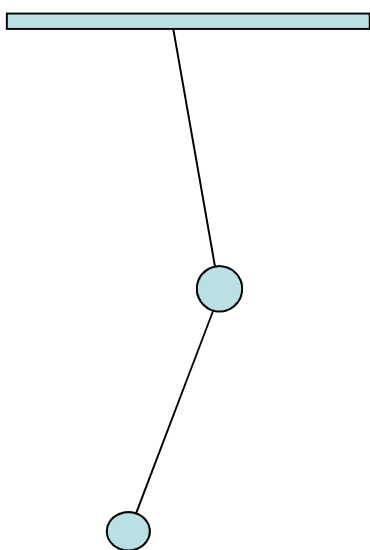
$$\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$$

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \text{Przeciwnie niż } F(t) \quad \varphi = \pi$$

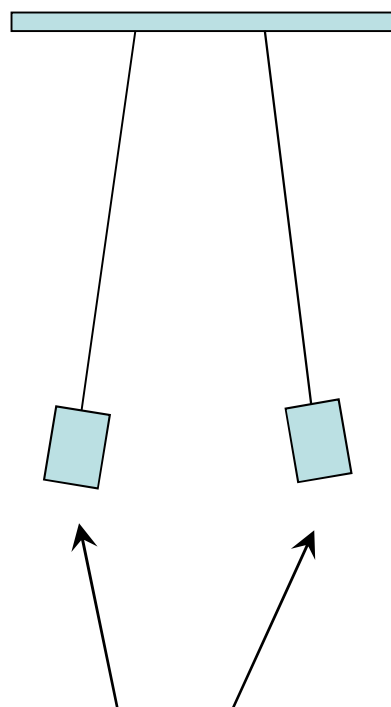


Sprawdźmy to w doświadczeniu...

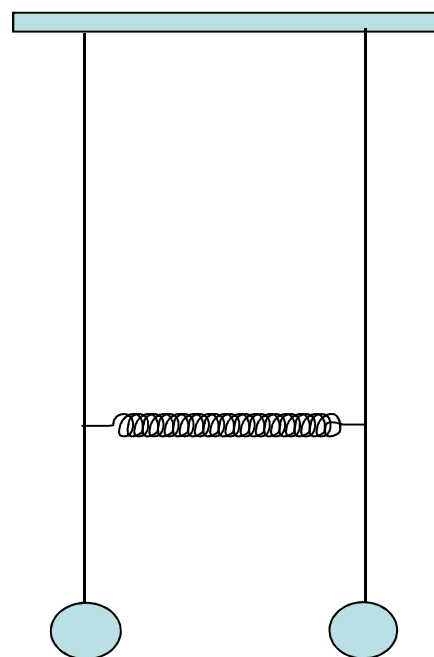
Drgania swobodne układu o dwóch stopniach swobody



Wahadło podwójne
(płaskie)



Magnesy
(odpychające się)
na prętach



Wahadła sprzężone

Liniowość i zasada superpozycji

$$\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi + \beta\psi^2 + \gamma\psi^3 + \dots$$

Liniowe, tylko wtedy gdy $\beta = 0, \gamma = 0, \dots itd.$ Dlaczego?

Czyli równanie $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi$ (jednorodne) lub równanie $\frac{d^2\psi(t)}{dt^2} = \alpha\psi + F(t)$ (niejednorodne)

Przypomnienie:

- **suma dwu dowolnych rozwiązań równania liniowego i jednorodnego jest również rozwiązaniem tego równania.**
- **dla sumy rozwiązań równania liniowego, warunki początkowe są sumą warunków początkowych**
- **suma sił wymuszających dla dwóch rozwiązań, jest siłą wymuszającą dla rozwiązania będącego sumą rozwiązań...**

Najbardziej ogólny ruch układu o dwu stopniach swobody, opisanego równaniami liniowymi stanowi superpozycję dwu niezależnych, jednoczesnych ruchów harmoniczych – **drgań własnych** lub inaczej **drgań normalnych** układu.

Jak je znaleźć?

Dygresja – układy nieliniowe

Niech reakcja pewnego fizycznego układu będzie nieliniową funkcją zaburzenia...

$$\psi(t) = \alpha\varphi(t) + \beta\varphi^2(t) + \gamma\varphi^3(t)$$

Założmy, że zaburzenie jest sumą dwóch oscylacji harmoniczných:

$$\varphi(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$$

$$\psi(t) = \alpha(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) + \beta(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^2 + \gamma(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^3$$

Jeśli $\beta=\gamma=0$ to odpowiedź układu będzie superpozycją dwóch fal harmoniczných o częstościach ω_1 i ω_2 .

Jeśli $\beta \neq 0$ oraz $\gamma \neq 0$ to odpowiedź układu będzie bardziej skomplikowana...

Przedstawmy teraz $\psi(t)$ jako superpozycję oscylacji harmoniczných.

Skorzystajmy z tożsamości dla funkcji $f(x)=\cos(x)$

Ponieważ $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)$

$$\Rightarrow f(x)f(y) = \frac{1}{2}f(x+y) + \frac{1}{2}f(x-y)$$

Jeśli mamy iloczyn trzech funkcji:

$$\begin{aligned} f(x)f(y)f(z) &= \frac{1}{2}[f(x+y) + f(x-y)]f(z) = \\ &= \frac{1}{2}f(x+y)f(z) + \frac{1}{2}f(x-y)f(z) = \\ &= \frac{1}{4}f(x+y+z) + \frac{1}{4}f(x+y-z) + \frac{1}{4}f(x-y+z) + \frac{1}{4}f(x-y-z) \end{aligned}$$

Nieliniowość kwadratowa:

$$\begin{aligned}(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^2 &= (f(\omega_1 t) + f(\omega_2 t))^2 = \\&f(\omega_1 t)f(\omega_1 t) + 2f(\omega_1 t)f(\omega_2 t) + f(\omega_2 t)f(\omega_2 t) = \\&= \frac{1}{2} f(2\omega_1 t) + \frac{1}{2} f(0) + f(\omega_1 t + \omega_2 t) + f(\omega_1 t - \omega_2 t) + \frac{1}{2} f(2\omega_2 t) + \frac{1}{2} f(0)\end{aligned}$$

Człon kwadratowy odpowiedzi układu jest superpozycją oscylacji o częstościach: $2\omega_1$, 0 , $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$.
Nazywamy je częstościami kombinacyjnymi.

Dla $\beta \neq 0$ nawet w sytuacji gdy $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, odpowiedź układu będzie zawierać oscylacje o częstości 2ω (**generacja drugiej harmoniczej**).

Zjawisko to wykorzystuje się w optyce do generacji światła o dwukrotnie większej częstości – tak działa np. wskaźnik laserowy emitujący zielone Promieniowanie o długości fali 532nm (1064/2 nm)...

Mamy tu do czynienia z procesem dwufotonowym – dwa fotony zamieniają się w ośrodku nieliniowym w jeden foton o dwukrotnie większej energii...

Przyczynek z nieliniowością trzeciego stopnia:

$$(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)^3 = (f(\omega_1 t) + f(\omega_2 t))^3 = \\ f(\omega_1 t)^3 + 3f^2(\omega_1 t)f(\omega_2 t) + 3f(\omega_1 t)f^2(\omega_2 t) + f^3(\omega_2 t)$$

Zbadajmy poszczególne człony w sumie:

$$f(\omega_1 t)^3 = f(\omega_1 t)f(\omega_1 t)f(\omega_1 t) = \frac{1}{2}(f(2\omega_1 t) + f(0))f(\omega_1 t) =$$

$$= \frac{1}{4}f(3\omega_1 t) + \frac{3}{4}f(\omega_1 t) \quad \text{Zawiera oscylacje o częstotności } 3\omega_1 \text{ oraz } \omega_1$$

$$f^2(\omega_1 t)f(\omega_2 t) \quad \text{Zawiera oscylacje o częstotności } 2\omega_1 + \omega_2, 2\omega_1 - \omega_2 \text{ oraz } \omega_2$$

$$f(\omega_1 t)f^2(\omega_2 t) \quad \text{Zawiera oscylacje o częstotności } 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1 \text{ oraz } \omega_1$$

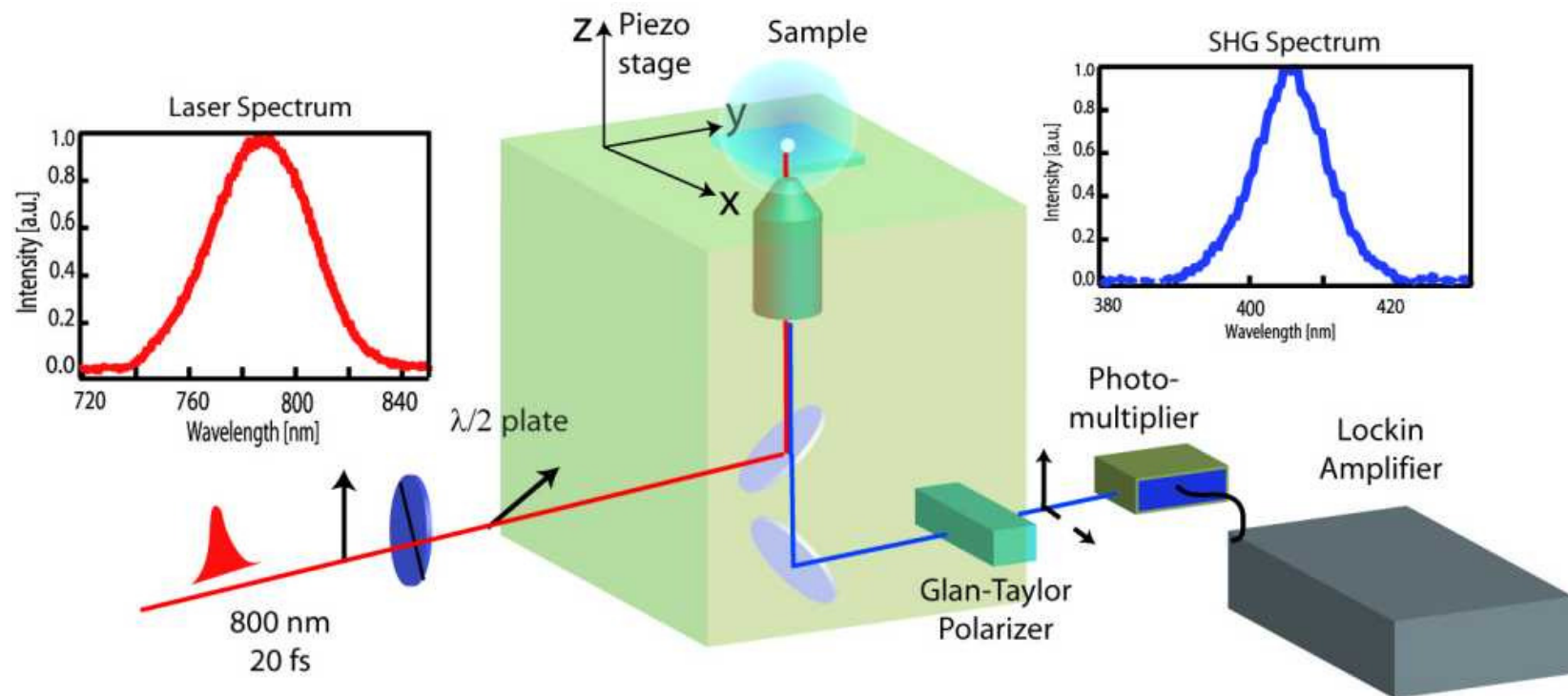
$$f(\omega_2 t)^3 \quad \text{Zawiera oscylacje o częstotności } 3\omega_2 \text{ oraz } \omega_2$$

Przyczynek z nieliniowością trzeciego stopnia jest superpozycją oscylacji harmoniczných o częstotnościach:

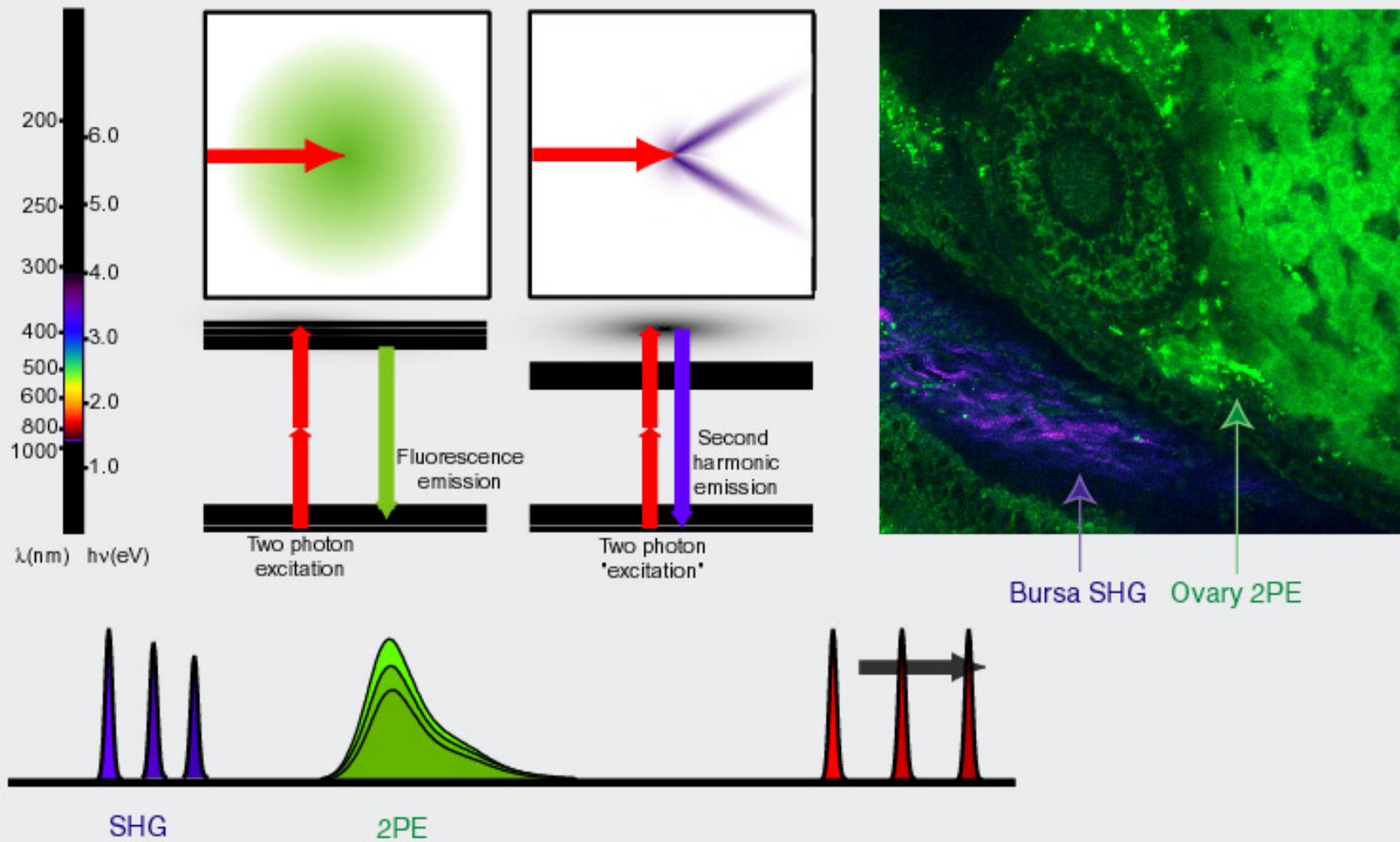
$$3\omega_1, \omega_1, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1, 3\omega_2, \omega_2,$$

Gdy $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ mamy tylko nieparzyste harmoniczne: $3\omega, \omega$

Na dokładniejsze badania zjawisk nieliniowych przyjdzie czas na optyce...



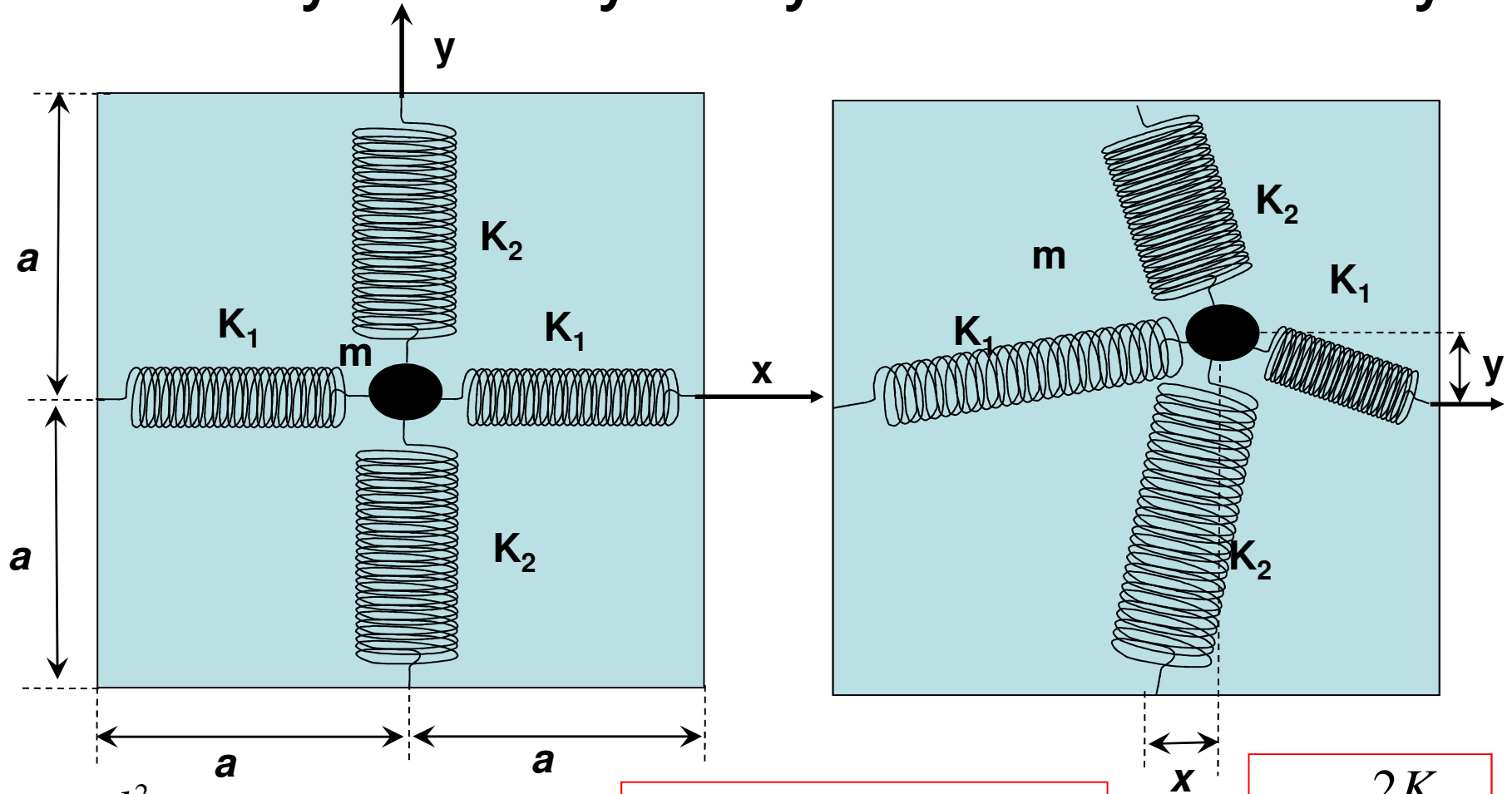
<http://support.svi.nl/wiki/SecondHarmonicGeneration>



<http://support.svi.nl/wiki/SecondHarmonicGeneration>

Wracamy do układów liniowych o
dwóch stopniach swobody...

Dwuwymiarowy oscylator harmoniczny



$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -2K_1 x$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = -2K_2 y$$

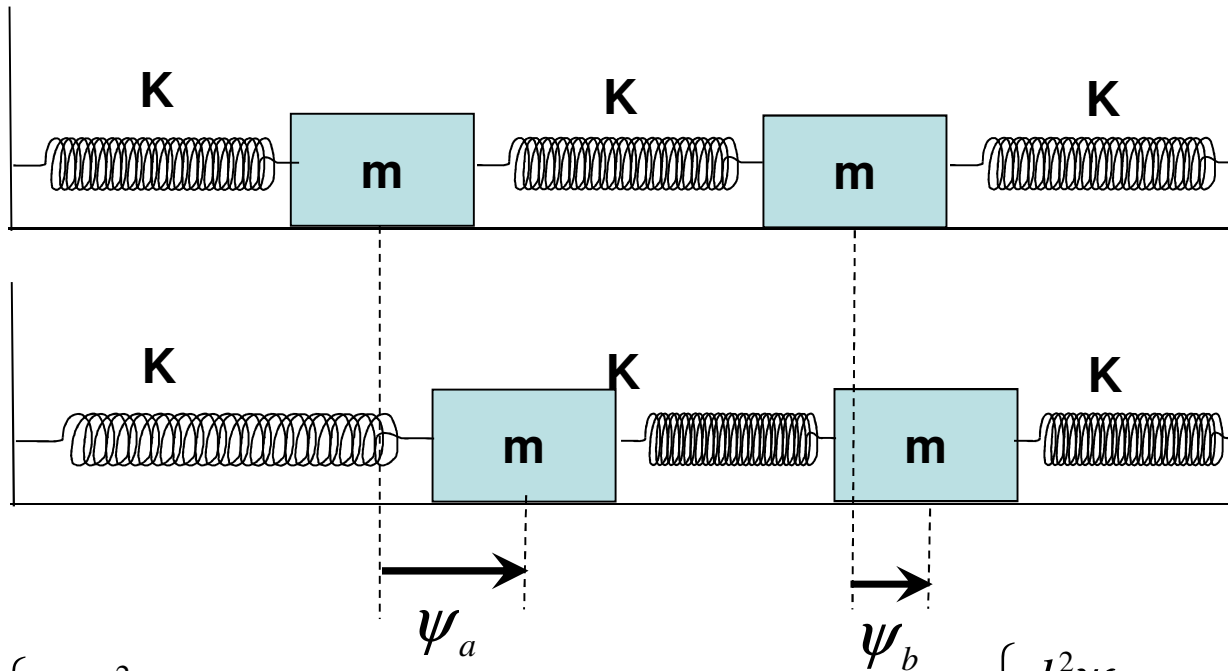


$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ y(t) &= B \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{aligned}$$

Drgania normalne!
Niezależne ruchy w dwóch kierunkach,
charakterystyczne częstości...

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \frac{2K_1}{m} \\ \omega_2^2 &= \frac{2K_2}{m} \end{aligned}$$

Równania ruchu



$$\begin{cases} m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -K \psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -K \psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -\frac{2K}{m} \psi_a + \frac{K}{m} \psi_b \\ \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = +\frac{K}{m} \psi_a - \frac{2K}{m} \psi_b \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \psi_a &= A \cos(\omega t + \varphi) \\ \psi_b &= B \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} &= -\omega^2 \psi_a \\ \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} &= -\omega^2 \psi_b \end{aligned}$$

Oznaczmy:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{2K}{m}, & a_{12} &= -\frac{K}{m} \\ a_{21} &= -\frac{K}{m}, & a_{22} &= \frac{2K}{m} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \psi_a = -a_{11} \psi_a - a_{12} \psi_b \\ -\omega^2 \psi_b = -a_{21} \psi_a - a_{22} \psi_b \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \omega^2) \psi_a + a_{12} \psi_b = 0 \\ a_{21} \psi_a + (a_{22} - \omega^2) \psi_b = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{\omega^2 - a_{11}}{a_{12}} \\ \frac{\psi_b}{\psi_a} = \frac{a_{21}}{\omega^2 - a_{22}} \end{cases}$$



lub inaczej

$$\begin{bmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \omega^2) & a_{12} \\ a_{21} & (a_{22} - \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

pamiętamy, że

$$\psi_a = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\psi_b = B \cos(\omega t + \varphi)$$

Stąd:

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać1}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}}$$

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b = \frac{B_1}{A_1} A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \frac{B_2}{A_2} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) =$$

$$\psi_b = B_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$ – z warunków początkowych

Częstości własne

$$(a_{11} - \omega^2)(a_{22} - \omega^2) - a_{12}a_{21} = 0$$



$$\omega^4 - \omega^2(a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$$



$$\omega^4 - \frac{4K}{m}\omega^2 + \frac{3K^2}{m^2} = 0$$



$$\omega_1^2 = \frac{K}{m} \quad \omega_2^2 = \frac{3K}{m}$$



Postać 1 $\Rightarrow$

$$\psi_b = \psi_a$$

Postać 2 $\Rightarrow$

$$\psi_b = -\psi_a$$

Pamiętamy, że:

$$a_{11} = \frac{2K}{m}, \quad a_{12} = -\frac{K}{m}$$

$$a_{21} = -\frac{K}{m}, \quad a_{22} = \frac{2K}{m}$$



$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać1}} = \frac{B_1}{A_1} = \frac{\omega_1^2 - a_{11}}{a_{12}} = 1$$

$$\left(\frac{\psi_b}{\psi_a} \right)_{\text{postać2}} = \frac{B_2}{A_2} = \frac{\omega_2^2 - a_{11}}{a_{12}} = -1$$

Popatrzmy jeszcze raz na równania...

Dodajmy je i odejmijmy stronami...

$$\left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 \psi_a}{dt^2} = -K \psi_a + K(\psi_b - \psi_a) \\ m \frac{d^2 \psi_b}{dt^2} = -K \psi_b + K(\psi_a - \psi_b) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m \frac{d^2 (\psi_a + \psi_b)}{dt^2} = -K(\psi_a + \psi_b) \\ m \frac{d^2 (\psi_a - \psi_b)}{dt^2} = -3K(\psi_a - \psi_b) \end{array} \right.$$

$$\psi_a + \psi_b \equiv \psi_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\psi_a - \psi_b \equiv \psi_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1)$$

**Łatwo wyznaczyć
częstości drgań normalnych
układu, a potem znaleźć drgania
poszczególnych elementów...**

Stąd:

$$\psi_a = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$

$$\psi_b = \frac{1}{2}(A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_1))$$

**Czyli znowu widzimy, że
dla drgań normalnych z
częstością ω_1**

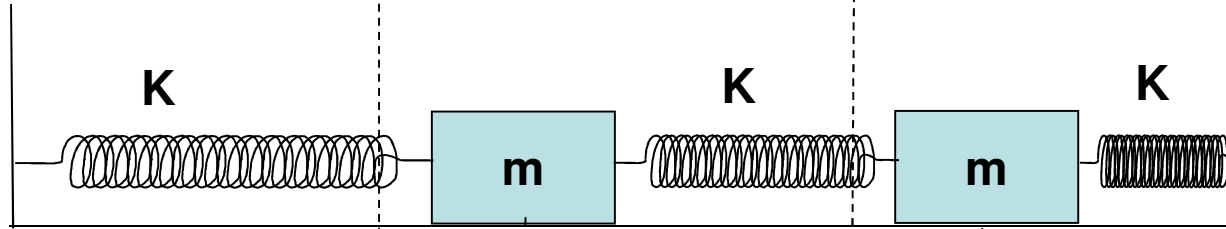
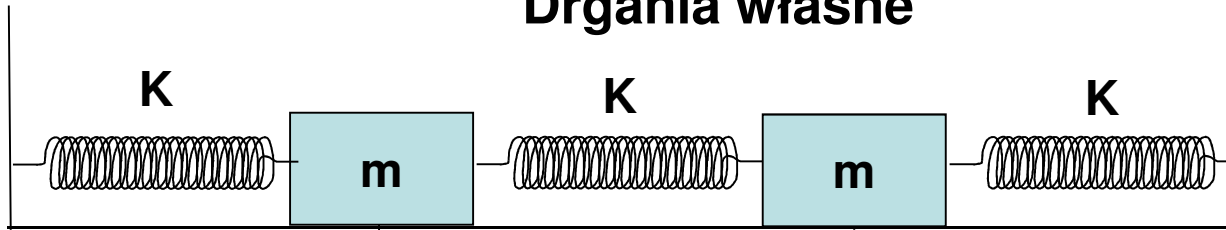
$$\psi_b = \psi_a$$

**dla drgań normalnych z
częstością ω_2**

$$\psi_b = -\psi_a$$

To można zgadnąć!

Drgania własne



ψ_a

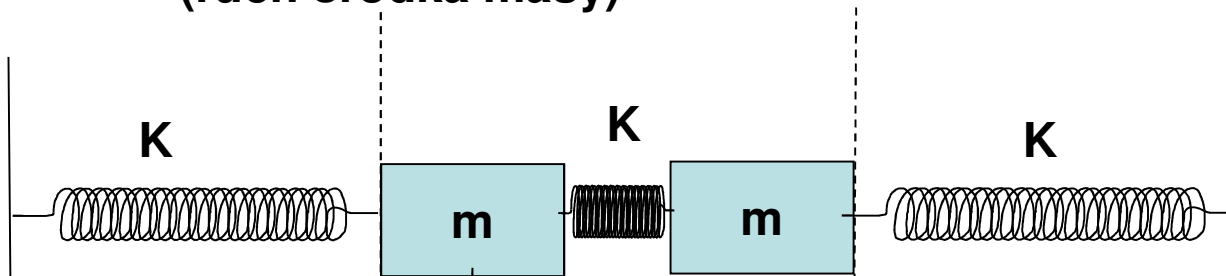
$\psi_b = \psi_a$

**Postać 1: Sprężynka środkowa nie napięta
(ruch środka masy)**

**Siła
zwrotna**

$$F_z = -K\psi_a$$

$$\omega_1^2 = \frac{K}{m}$$



ψ_a

$\psi_b = -\psi_a$

**Postać 1: Sprężynka środkowa ściśnięta podwójnie
(ruch wewnętrzny układu)**

**Siła
zwrotna**

$$F_z = -K\psi_a - 2K\psi_a$$

$$\omega_2^2 = \frac{3K}{m}$$

Dudnienia

- dwa kamertony o bliskiej częstotliwości,
- brzeszczoty w imadle,
- struny gitary (np.. gdy ją stroimy)
- dźwięk dzwonu...

Ruch błony bębenkowej jest superpozycją dwu drgań harmoniczných....

Przyjmijmy, że $A_1=A_2=A$, $\varphi_1=\varphi_2=0$

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_1 t), \quad \psi_b(t) = A \cos(\omega_2 t)$$

Ich suma: $\psi(t) = \psi_a(t) + \psi_b(t) = A(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t))$

Korzystając z tego, że $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$

dostajemy: $\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$

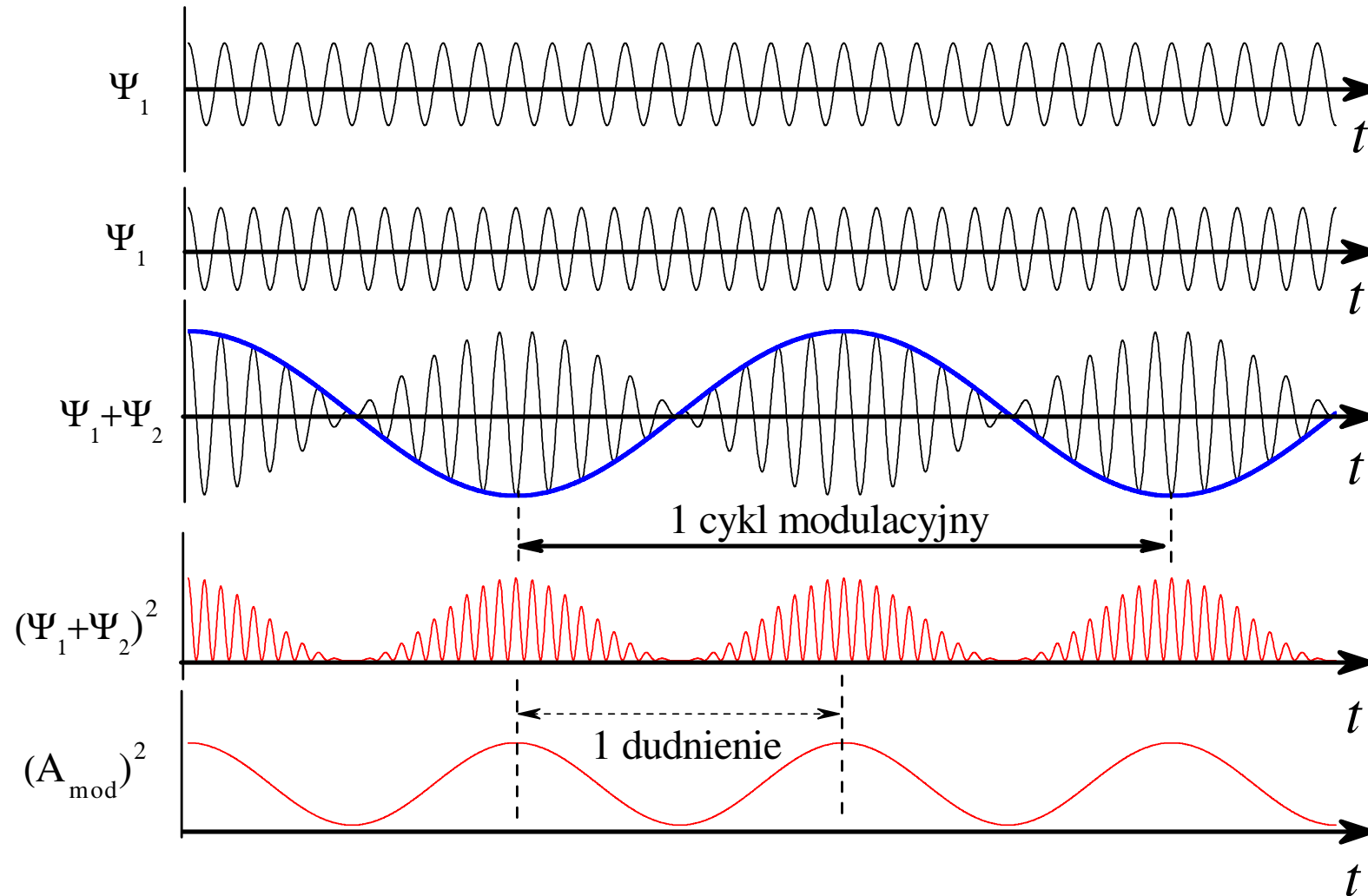
gdzie: $\omega_{\text{mod}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ $\omega_{\text{sr}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$

$\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{sr}} \Rightarrow \psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$

amplituda wolno
zmienna

część
szybkoszmienna

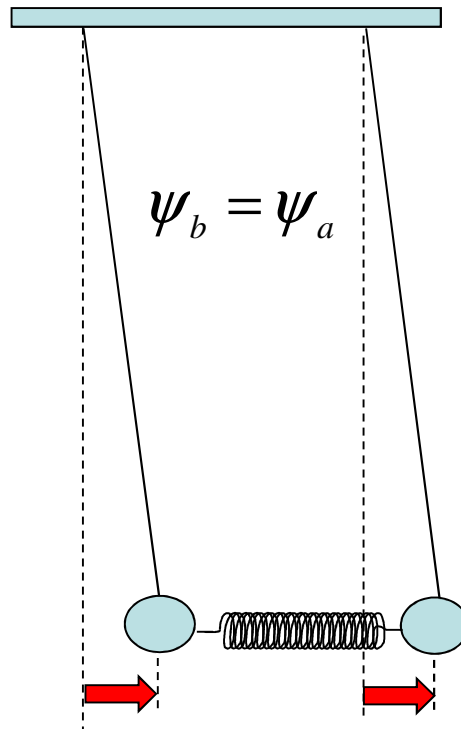
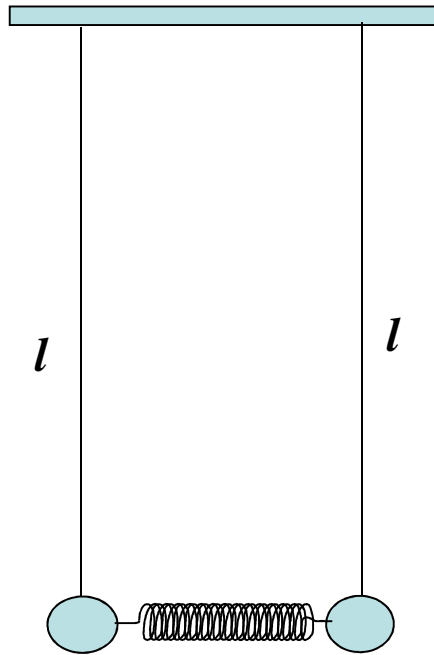
Dudnienia łatwo zasymulować...



$$\psi(t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

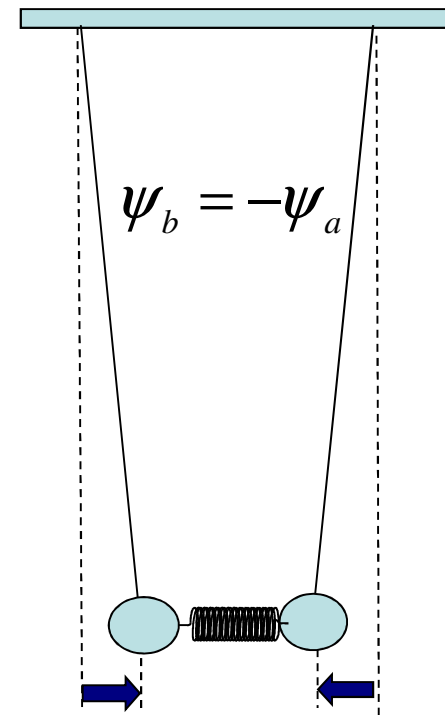
Wahadła słabo sprzężone

MODY WŁASNE



Sprężynka luźna

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}$$



Sprężynka napięta „podwójnie”

$$\omega_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{2K}{m}$$

Różnicę częstości możemy regulować zmieniając K lub m !

Rozwiązanie ogólne

$$\psi_a = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\psi_b = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Przyjmijmy, że $A_1=A_2=A$, $\varphi_1=\varphi_2=0$, wtedy wychylenia ciężarków:

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

$$\psi_b(t) = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t)$$

Jak takie drgania wzbudzić?

Trzeba odpowiednio dobrać warunki początkowe – dobieramy wychylenia i prędkości dla $t=0$

Prędkości ciężarków

$$\frac{d\psi_a(t)}{dt} = -A \omega_1 \sin(\omega_1 t) - \omega_2 A \sin(\omega_2 t)$$

$$\frac{d\psi_b(t)}{dt} = -\omega_1 A \sin(\omega_1 t) + \omega_2 A \sin(\omega_2 t)$$



$$\psi_a(0) = 2A$$

$$\psi_b = 0$$

$$\frac{d\psi_a}{dt}(0) = 0$$

$$\frac{d\psi_b}{dt}(0) = 0$$

$$\psi_a(t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_a(t) = A_{\text{mod}}(t) \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_b(t) = A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t) = 2A \sin(\omega_{\text{mod}} t) \sin(\omega_{\text{sr}} t)$$

$$\psi_b(t) = B_{\text{mod}}(t) \sin(\omega_{\text{sr}} t)$$

Wciagu jednego szybkiego cyklu „szybkich drgań” traktujemy wahadła jak oscylatory harmoniczne o stałej amplitudzie (A_{mod} oraz B_{mod}) i częstotści ω_{sr}

$$E_a = \frac{1}{2} m \omega_{\text{sr}}^2 A_{\text{mod}}^2 = 2mA^2 \omega_{\text{sr}}^2 \cos^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

$$E_b = \frac{1}{2} m \omega_{\text{sr}}^2 B_{\text{mod}}^2 = 2mA^2 \omega_{\text{sr}}^2 \sin^2(\omega_{\text{mod}} t)$$

$$E_a + E_b = 2mA^2 \omega_{\text{sr}}^2 = E$$

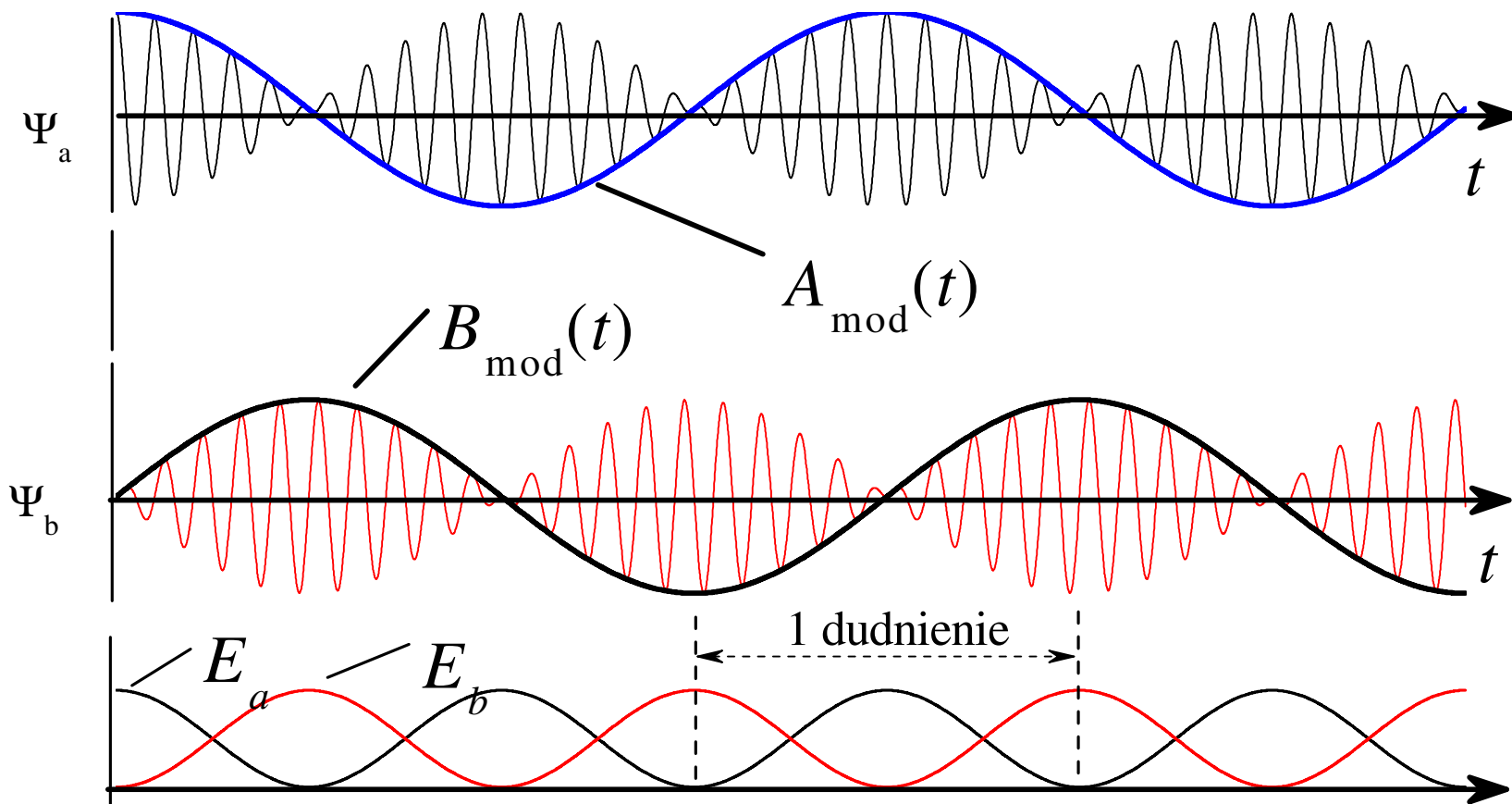
$$E_a - E_b = E(\cos^2(\omega_{\text{mod}} t) - \sin^2(\omega_{\text{mod}} t)) = E \cos(2\omega_{\text{mod}} t) = E \cos[(\omega_1 - \omega_2)t]$$

Energia przepływa z jednego do drugiego wahadła z częstotścią dudnień

$$E_a = \frac{1}{2} E[1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

$$E_b = \frac{1}{2} E[1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

Zagadnienie energii w układzie drgań sprzężonych



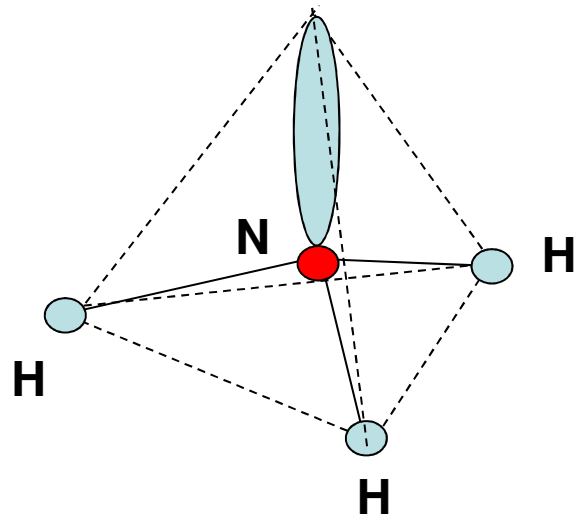
Przepływ energii pomiędzy wahadłami

W mechanice kwantowej energia jest „skwantowana” - pomiędzy różnymi stopniami swobody przepływa prawdopodobieństwo posiadania energii wzbudzenia...(F.C. Crawford)

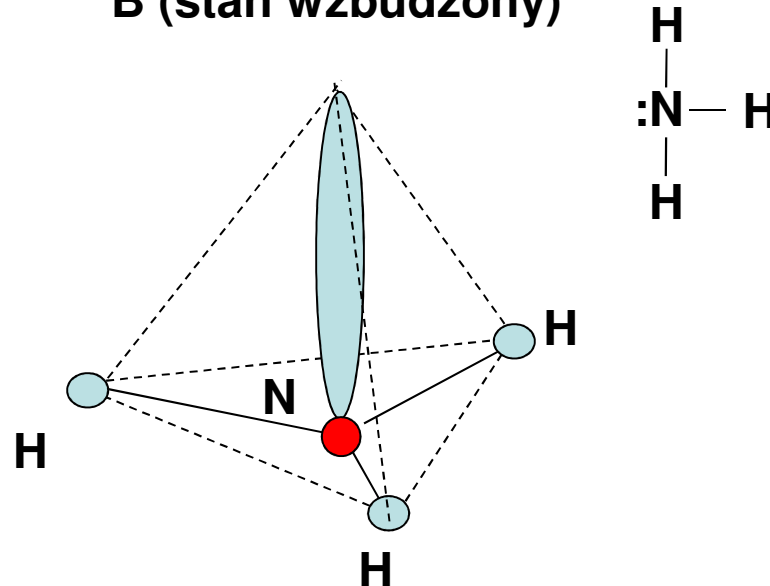
$$E_a = \frac{1}{2} E[1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$
$$E_b = \frac{1}{2} E[1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

Cząsteczka amoniaku jako przykład słabo sprzężonych oscylatorów

A (stan podstawowy)



B (stan wzbudzony)



Dwa położenia azotu względem płaszczyzny wyznaczonej wodory.

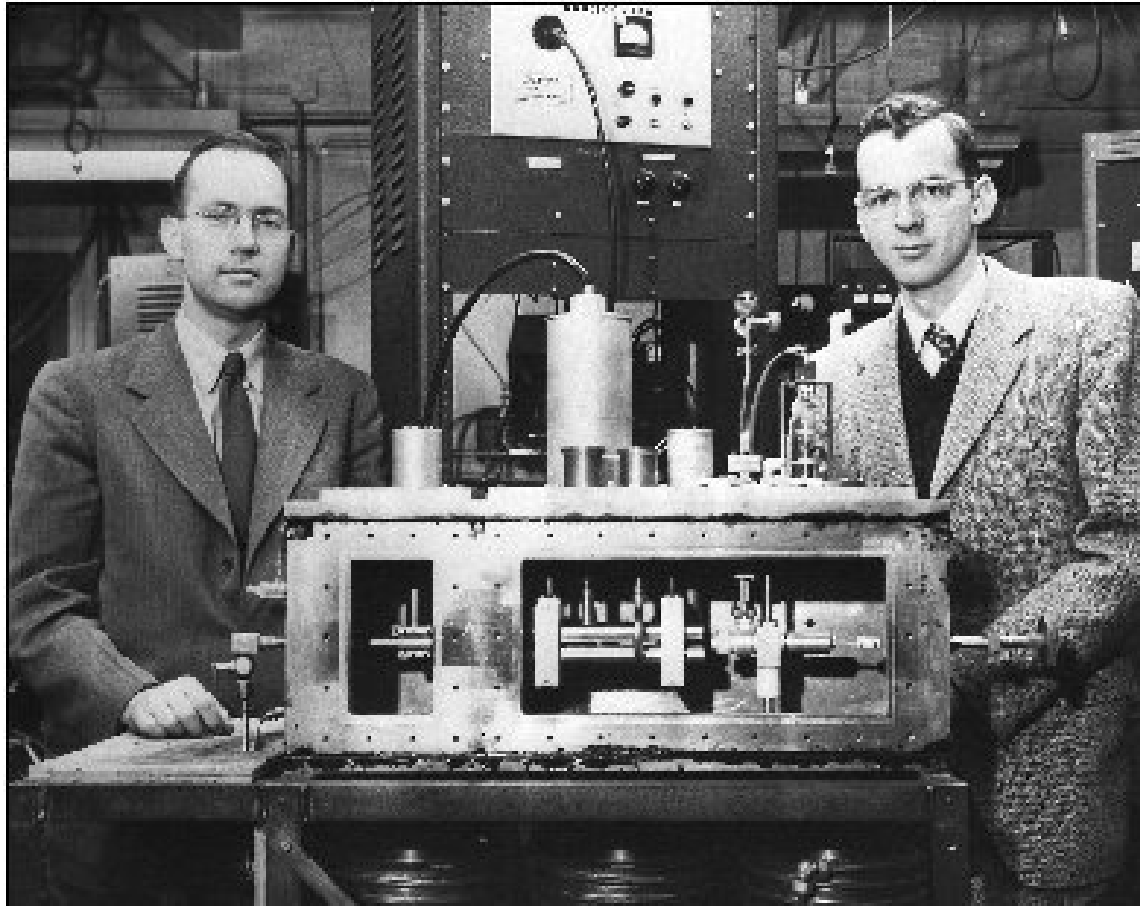
$$\nu_{dud} = \omega_{dud} / 2\pi = (\omega_2 - \omega_1) / 2\pi \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Hz}$$

$$\psi_a = \frac{1}{2} [1 + \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

$$\psi_b = \frac{1}{2} [1 - \cos((\omega_1 - \omega_2)t)]$$

Maser amoniakalny (emitujący mikrofałe) – prekursor lasera...

Inny przykład oscylacji – układ mezonów K⁰...



The first maser Charles H. Townes (left), winner of the 1964 Nobel Prize for Physics, and associate James P. Gordon in 1955 with the first maser.
Bettmann/Corbis

<http://www.britannica.com/EBchecked/topic-art/601072/92025/The-first-maser-Charles-H-Townes-winner-of-the-1964>