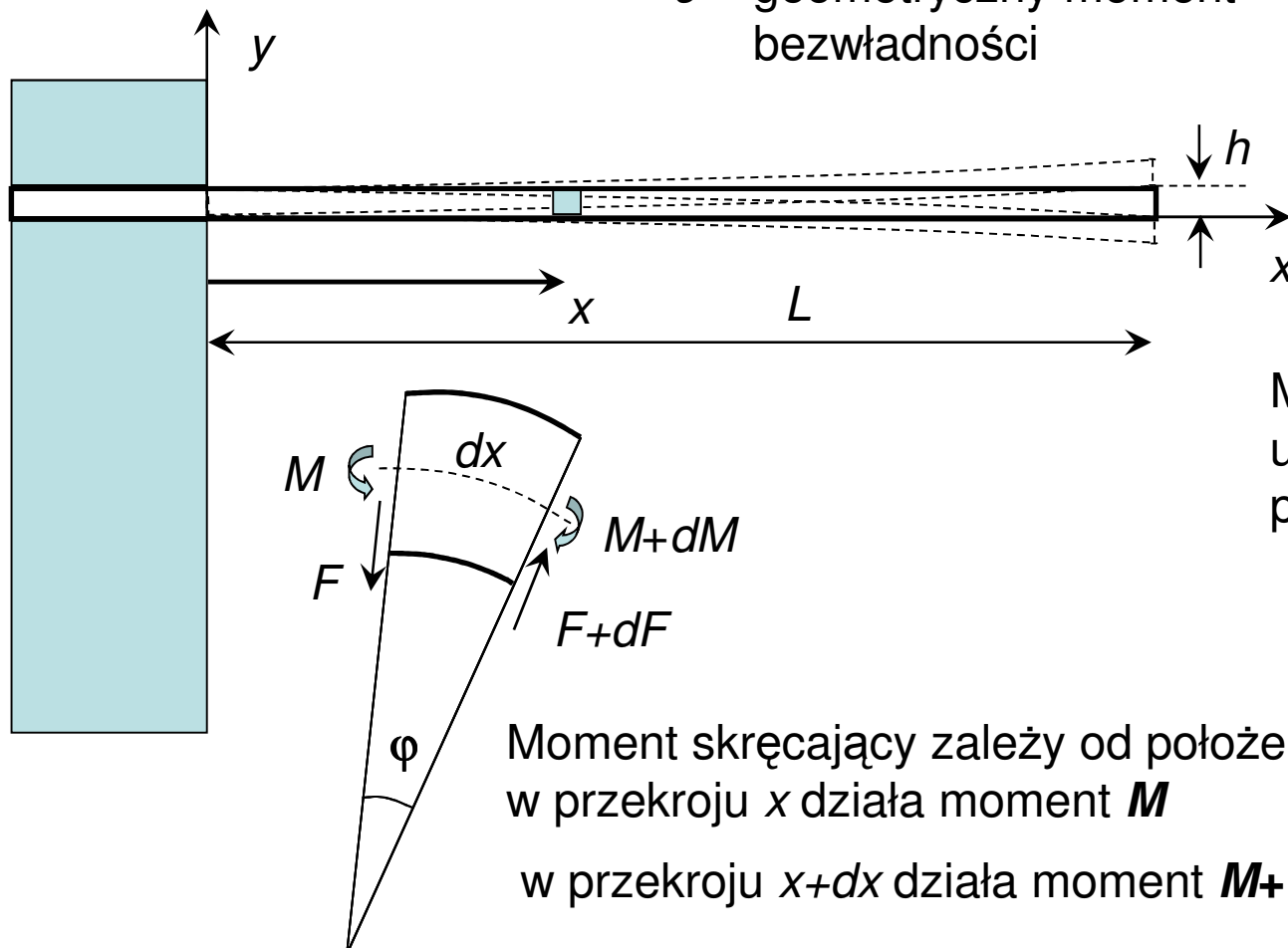


Drgania prętów
(kamerton, cymbałki...)

Rozważaliśmy zginanie belek...

E - moduł Younga

J - geometryczny moment
bezładności



$$M = E \frac{\varphi}{\Delta x} J$$

Wzór z krzywizną...

$$M = E \frac{1}{R} J$$

Możemy to zapisać
używając drugiej
pochodnej...

$$M(x) = E \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} J$$

Moment skręcający zależy od położenia x ,
w przekroju x działa moment $\mathbf{M}$

w przekroju $x+dx$ działa moment $\mathbf{M+dM}$

Naddatek momentu, jest
równoważony przez siły styczne
do przekroju...

$$dM = F(x)dx \Rightarrow F(x,t) = \frac{\partial M(x)}{\partial x}$$

$$F(x, t) = \frac{\partial M(x)}{\partial x} = EJ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$

Naddatek siły działającej na element dx

stanowi siłę zwrotną
działającą wzdłuż y
na element pręta o
masie Δm

$$dF = -\frac{\partial F(x)}{\partial x} dx = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

Pod wpływem siły dF
element Δm uzyskuje przyspieszenie $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$

Stąd równanie ruchu:

$$\rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} dx$$

$$\Delta m = \rho S dx$$

ρ - gęstość pręta
 S - powierzchnia
przekroju pręta

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0} \text{ gdzie } \boxed{a^2 = \frac{EJ}{\rho S}}$$

Otrzymaliśmy równanie drgań poprzecznych pręta...

Równanie drgań poprzecznych pręta (kamertonu)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad ***$$

Warunki brzegowe:

- dla zamocowanego końca, czyli dla $x=0$,

$$y(0,t) = 0 \quad \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$

- na końcu pręta ($x=L$) powinien zniknąć moment zginający i siła styczna

$$\left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_{x=L} = 0 \quad \left. \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right|_{x=L} = 0$$

Warunki początkowe, wychylenie i prędkość

$$y(x,0) = f(x) \quad \left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

Postulujemy rozwiązanie:

(metoda separacji zmiennych)

i podstawiamy do równania ***

$$y(x,t) = Y(x)T(t)$$

$$\frac{1}{Ta^2} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = - \frac{1}{Y(x)} \frac{d^4 Y(x)}{dx^4} = -\lambda$$

Skoro funkcje dwóch niezależnych zmiennych są sobie równe, to muszą być stałe: λ - stała.

Dla funkcji $Y(x)$ dostajemy więc równanie:

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \lambda Y(x) = 0$$

Rozwiązanie ogólne ma postać:

$$Y(x) = A \cosh(\sqrt[4]{\lambda} x) + B \sinh(\sqrt[4]{\lambda} x) + C \cos(\sqrt[4]{\lambda} x) + D \sin(\sqrt[4]{\lambda} x)$$

Z warunków brzegowych: $Y(0) = 0, \left. \frac{dY}{dx} \right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C = -A, D = -B$

$$\left. \frac{d^2 Y}{dx^2} \right|_{x=L} = 0, \left. \frac{d^3 Y}{dx^3} \right|_{x=L} = 0$$


$$A(\cosh(\sqrt[4]{\lambda} L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda} L)) + B(\sinh(\sqrt[4]{\lambda} L) + \sin(\sqrt[4]{\lambda} L)) = 0$$

$$A(\sinh(\sqrt[4]{\lambda} L) - \sin(\sqrt[4]{\lambda} L)) + B(\cosh(\sqrt[4]{\lambda} L) + \cos(\sqrt[4]{\lambda} L)) = 0$$

Układ równań ma nietrywialnie rozwiązania A i B , gdy wyznacznik układu jest równy zeru...

$$\cosh^2(\sqrt[4]{\lambda}L) + 2\cosh(\sqrt[4]{\lambda}L)\cos(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos^2(\sqrt[4]{\lambda}L) - \sinh^2(\sqrt[4]{\lambda}L) + \sin^2(\sqrt[4]{\lambda}L) = 0$$

Ponieważ $\cosh^2(\sqrt[4]{\lambda}L) - \sinh^2(\sqrt[4]{\lambda}L) = 1$

$$\sin^2(\sqrt[4]{\lambda}L) + \cos^2(\sqrt[4]{\lambda}L) = 1$$

To otrzymujemy równanie przestępne:

$$\cosh(\mu)\cos(\mu) = -1 \quad \text{gdzie } \mu = \sqrt[4]{\lambda}L$$

Jego rozwiązania można znaleźć numerycznie:

$$\mu_1=1,875, \mu_2=4,494, \mu_3=7,854\dots \mu_n \approx \pi/2(2n-1) \text{ dla } n>3$$

Znając wartości μ możemy znaleźć amplitudy A i B oraz

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^4}{L^4}$$

Pozostaje nam rozwiązać teraz równanie na funkcję $T(t)$, ale to jest znacznie prostsze...

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + a^2 \lambda T = 0$$

Równanie oscylatora
harmonicznego!



$$T_n(t) = a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)$$

$$\lambda_n = \frac{\mu_n^4}{L^4}$$

Częstość $\omega_n = a \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}} \sqrt{\lambda_n} = \frac{\mu_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$

Częstotliwość

$$\nu_n = \frac{\mu_n^2}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho S}}$$

Stosunki częstości dla drgań poprzecznych pręta (kamertonu) są inne niż dla struny! Kolejne częstotliwości nie są wielokrotnościami częstości podstawowej! (Można to zbadać doświadczalnie używając analizy fourierowskiej...)

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{\mu_2^2}{\mu_1^2} = 6.267, \quad \frac{\nu_3}{\nu_1} = \frac{\mu_3^2}{\mu_1^2} = 17.548$$

Równania wyprowadzone dla pręta stosują się też do drgań płyt (cymbałki)!
Będziecie mogli to sprawdzić wykonując ćwiczenia na Pracowni fizycznej!

Drgania membrany

Powierzchniowe źródła dźwięku – płyty, membrany...

Skorzystajmy z analogii do struny:

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

T_0 - siła naciągu

ρ_0 - gęstość liniowa

ρ - gęstość objętościowa

σ - naprężenie

W przypadku fal stojących na membranie powinny powstać linie węzłowe.

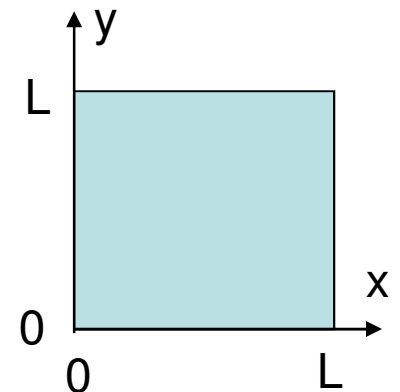
Równanie falowe drgającej membrany jest bardzo podobne do drgań struny:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{v_0^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad *$$

Założmy, że mamy do czynienia z membraną rozciągniętą na kwadracie o boku L . Na brzegach kwadratu wychylenie membrany znika, przez analogię ze struną szukamy rozwiązań w postaci:

$$\psi(x, y, t) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(\omega t)$$

Po podstawieniu do równania * i zróżniczkowaniu dostajemy:



$$k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{v_0^2}$$

Warunek na składowe wektora falowego: $\vec{k} = [k_x, k_y]$

przyjmując $k_x = k \cos(\alpha)$, $k_y = k \sin(\alpha)$

dostajemy $k^2 = \frac{\omega^2}{v_0^2} \Rightarrow \omega = k v_0 \leftarrow$ związek dyspersyjny
identyczny jak dla struny

$$\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} v_0$$

Rozważmy warunki brzegowe:

$$\begin{aligned} \sin(k_x L) = 0 &\Rightarrow k_x L = m\pi \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{L} \\ \sin(k_y L) = 0 &\Rightarrow k_y L = n\pi \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{L} \end{aligned} \quad m, n - \text{całkowite}$$

$$\omega_{m,n} = \frac{\pi \sqrt{m^2 + n^2}}{L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

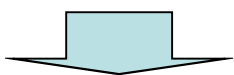
$$\omega_{m,n} = 2\pi \nu_{m,n}$$

Częstotliwość drgań własnych
membrany:



$$\nu_{m,n} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$$

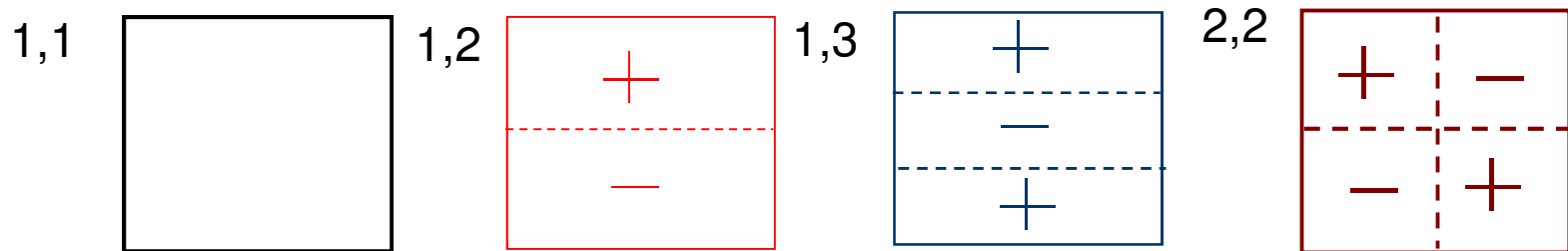
Postać drgań własnych membrany:

$$v_{m,n} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2L} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2}}{2L} v_0 \quad k_x = \frac{m\pi}{L}, \quad k_y = \frac{n\pi}{L}$$


Drgania własne membrany zamocowanej na kwadracie mają więc postać:

$$\psi(x, y, t) = A \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \sin(2\pi v_{m,n} t)$$

$$v_{1,1} = \frac{\sqrt{2}}{2L} v_0 \quad v_{1,2} = \frac{\sqrt{5}}{2L} v_0 \quad v_{1,3} = \frac{\sqrt{10}}{2L} v_0 \quad v_{2,2} = \frac{2\sqrt{2}}{2L} v_0$$

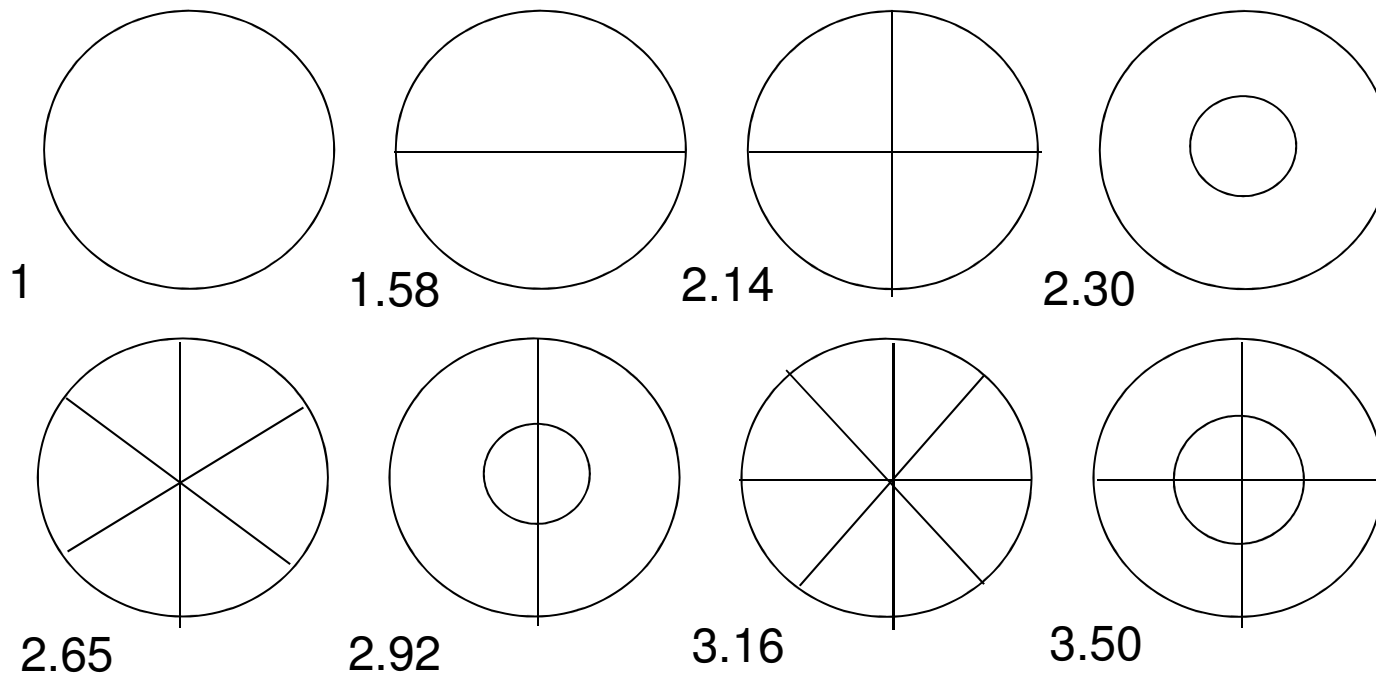


$$v_{1,1} \quad v_{1,2} = v_{2,1} = 1.58v_{1,1} \quad v_{1,3} = 2.24v_{1,1} \quad v_{2,2} = 2v_{1,1}$$

Rozwiązanie ogólne:

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) [A_{m,n} \sin(2\pi v_{m,n} t) + B_{m,n} \cos(2\pi v_{m,n} t)]$$

Membrana kołowa



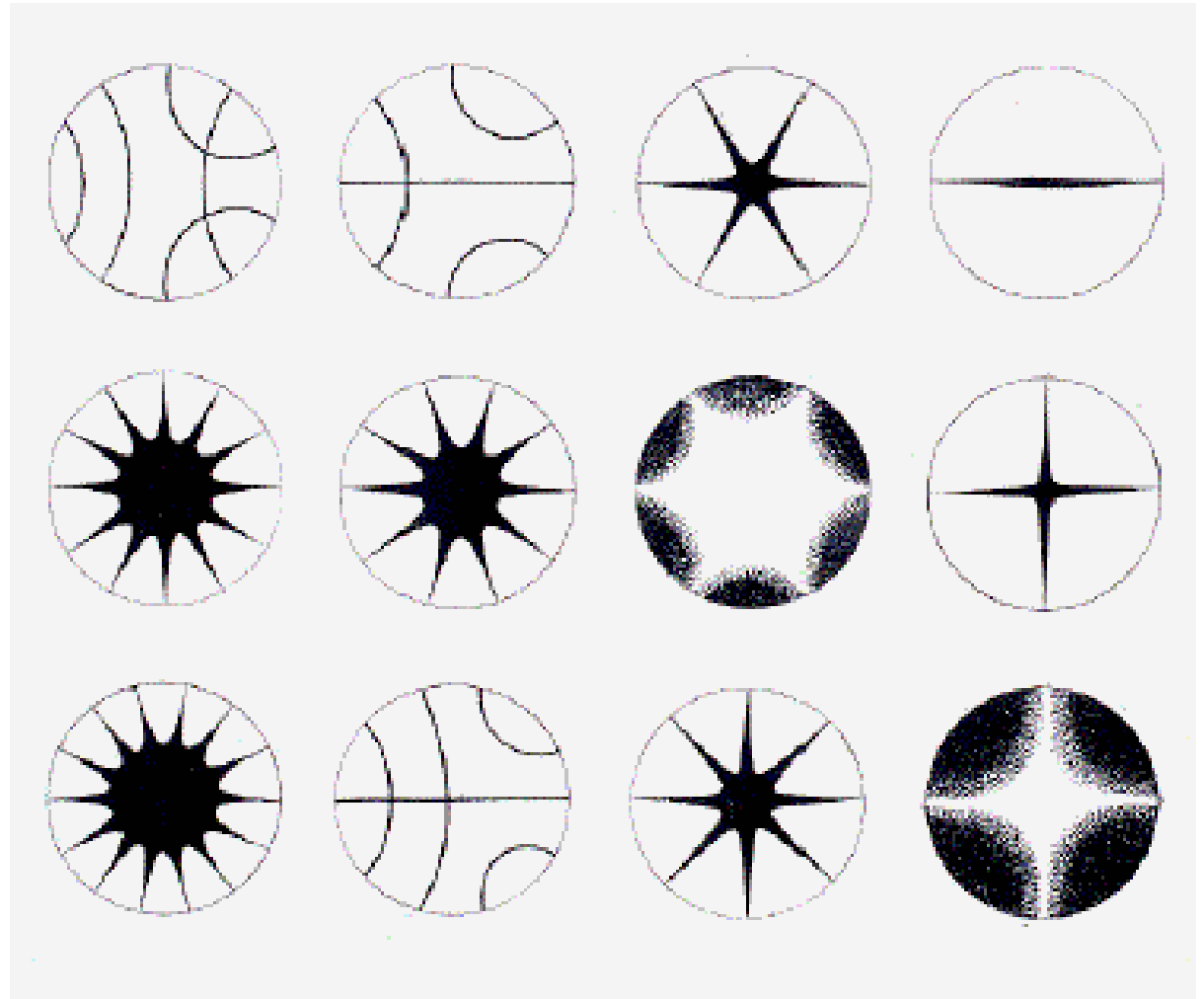
Stosunki częstości podstawowych dla kolejnych drgań własnych membrany kołowej, zamocowanej na brzegu...

Zbadajmy wiotką membranę w świetle stroboskopowym...

Figury Chladniego

Drgania płyt...
W zależności od tego
jaki mod wzbudzamy
na płycie otrzymujemy
różne wzory...

Płytę umiejętnie
pobudzamy smyczkiem...



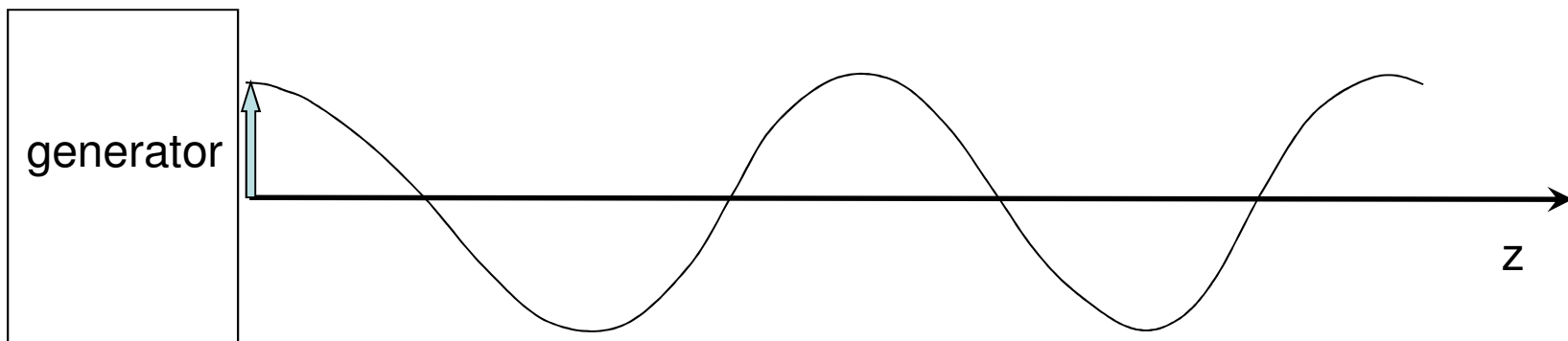
Fale biegnące

Układy zamknięte – energia zamknięta w pewnym określonych granicach drgania układu (swobodne i stacjonarne) można przedstawić w superpozycji fal stojących (drgań normalnych).

Układy otwarte - fale biegnące, czyli fale wędrujące od źródła, które je wytworzyło działając na ośrodek otwarty siłą wymuszającą.

Towarzyszy temu transport energii i pędu.

Założmy, że w punkcie $z=0$, struna wykonuje drgania $D(t)=A\cos(\omega t)$



Szukamy $\psi(z, t)$

Dla $z=0$ $\psi(0, t) = D(t) = A\cos(\omega t)$

Jeśli zaburzenie rozchodzi się ze stałą prędkością, to ruch elementu w punkcie w chwili t , jest taki sam jak ruch elementu w punkcie $z=0$, ale w czasie t' wcześniejszym o odstęp czasowy jaki fala zużywa, aby dobiec do punktu $z...$

Ponieważ: $t' = t - \frac{z}{v_\phi}$

$$\psi(z, t) = \psi(0, t') = A \cos(\omega t') = A \cos\left(\omega \left(t - \frac{z}{v_\phi}\right)\right) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega z}{v_\phi}\right)$$

Dla ustalonego z , funkcja $\psi(z, t)$ przedstawia oscylacje harmoniczne w czasie...
W ustalonej chwili t , funkcja $\psi(z, t)$ przedstawia oscylacje harmoniczne przestrzenne..

$$\omega = kv_\phi \quad \longrightarrow \quad \psi(z, t) = A \cos(\omega t - kz)$$

Warto zapamiętać:

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} \quad v_\phi = \frac{2\pi v}{2\pi / \lambda} = v\lambda \quad v_\phi = \frac{\lambda}{T}$$

Funkcja fazowa (faza) $\varphi(z, t) = \omega t - kz$

Śledzenie stałej fazy: $\varphi(z, t) = \text{const} \quad \longrightarrow \quad \begin{matrix} d\varphi = 0 \\ \omega dt - kdz = 0 \end{matrix}$

Prędkość fazowa:

Wróćmy do fal na strunie....

$$v_\phi = \left(\frac{dz}{dt} \right)_{[d\varphi=0]} = \frac{\omega}{k}$$

Fale biegnące

Klasyczne równanie falowe:

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad v = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}} \quad - \text{prędkość fazowa fali}$$

Ogólne rozwiązanie daje się zapisać w postaci sumy fal biegnących w lewo i w prawo.

$$\psi(z, t) = \psi_1(z + vt) + \psi_2(z - vt)$$

Wprowadźmy zmienne: $\xi = z + vt$ $\eta = z - vt$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = v \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = v^2 \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} - 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} \right)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta}$$

Podstawiamy do równania falowego

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Czyli równanie falowe przyjmuje postać:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Całkujemy niezależnie po każdej ze zmiennych i otrzymujemy równanie w postaci sumy rozwiązań zależnych jedynie od pojedynczej zmiennej ξ lub η :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = f^*(\eta)$$



$$\psi(\eta, \xi) = \int f^*(\eta) d\eta + \psi_1(\xi)$$



$$\psi(\eta, \xi) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta)$$



$$\psi(z, t) = \psi_1(z + vt) + \psi_2(z - vt)$$

lub

$$\psi(z, t) = \psi_1^*(kz + \omega t) + \psi_2^*(kz - \omega t)$$

w lewo

w prawo

Rozwiązanie ogólne równania falowego

Jeśli w chwili
początkowej $t=0$

$$\begin{cases} \psi(z,0) = f(z) \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = g(z) \end{cases}$$

$f(z)$, $g(z)$ – funkcje (rozsądne)
odpowiednio dwukrotnie i
jednokrotnie różniczkowalne

Rozwiązanie klasycznego równania falowego wyraża się
za pomocą wzoru d'Alemberta :

$$\psi(z,t) = \frac{1}{2} [f(z+vt) + f(z-vt)] + \frac{1}{2v} \int_{z-vt}^{z+vt} g(s) ds$$

Dowód:

Zapiszmy warunki początkowe:

$$\psi(z,t) = \psi_1(z+vt) + \psi_2(z-vt)$$

$$\begin{cases} \psi(z,0) = \psi_1(z) + \psi_2(z) = f(z) \\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(z,0) = \frac{\partial \psi_1}{\partial z} v + \frac{\partial \psi_2}{\partial z} (-v) = g(z) \end{cases}$$

Stąd

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{1}{v} g(z)$$

Całkujemy obustronnie:
$$\frac{\partial \psi_1}{\partial z} - \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = \frac{1}{v} g(z)$$



$$\psi_1(z) - \psi_2(z) = \frac{1}{v} \int_{z_0}^z g(s) ds + C$$

Z pierwszego warunku początkowego mamy

$$\psi_1(z) + \psi_2(z) = f(z)$$

Dodając i odejmując stronami dostajemy:

$$\psi_1(z) = \frac{1}{2} f(z) + \frac{1}{2v} \int_{z_0}^z g(s) ds + \frac{C}{2}$$

Te równości są spełnione przy dowolnej wartości argumentu

$$\psi_2(z) = \frac{1}{2} f(z) - \frac{1}{2v} \int_{z_0}^z g(s) ds - \frac{C}{2}$$



$$\psi_1(z + vt) = \frac{1}{2} f(z + vt) + \frac{1}{2v} \int_{z_0}^{z+vt} g(s) ds + \frac{C}{2}$$

$$\psi_2(z - vt) = \frac{1}{2} f(z - vt) - \frac{1}{2v} \int_{z_0}^{z-vt} g(s) ds - \frac{C}{2}$$

Zsumujemy obustronnie te wyrażenia....

$$\psi(z, t) = \frac{f(z + vt) + f(z - vt)}{2} + \frac{1}{2v} \left(\int_{z_0}^{z+vt} g(s) ds - \int_{z_0}^{z-vt} g(s) ds \right)$$


$$\psi(z, t) = \frac{f(z + vt) + f(z - vt)}{2} + \frac{1}{2v} \int_{z-vt}^{z+vt} g(s) ds$$

Czego mieliśmy dowieść!

Wygodnie jest czasem używać wzoru d'Alemberta w postaci

$$\psi(z, t) = \frac{f(z + vt) + f(z - vt)}{2} + \frac{1}{2v} [G(z + vt) - G(z - vt)]$$

Gdzie funkcja $G(x) = \int_{x_0}^x g(s) ds$

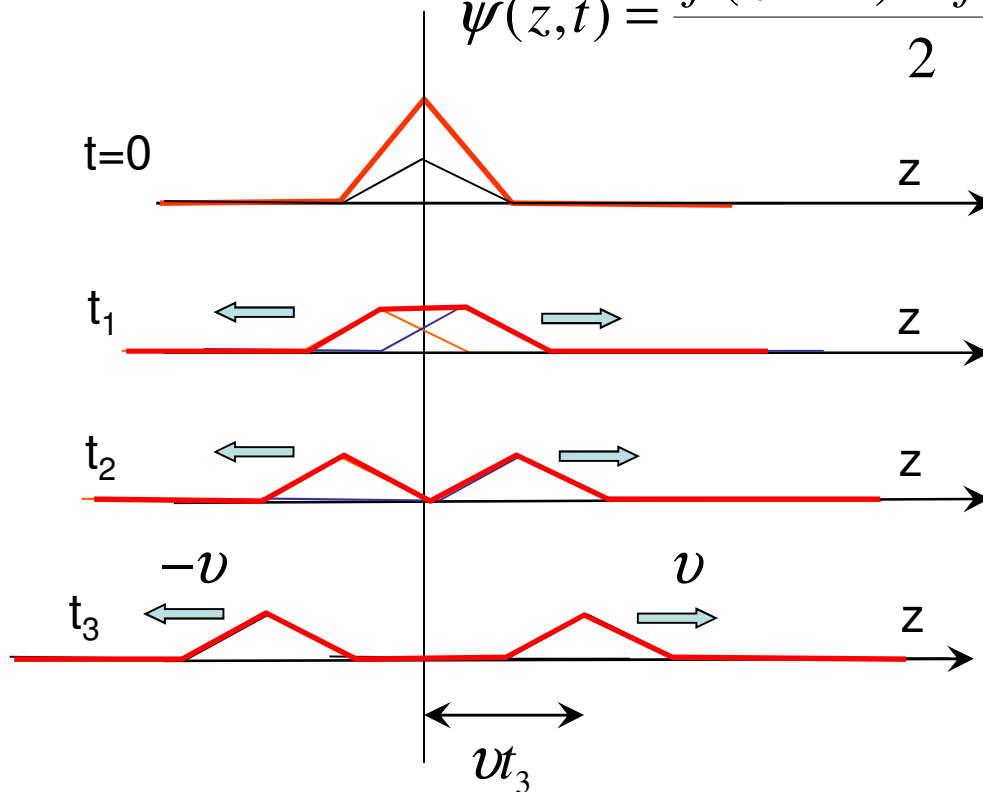
Interpretacja fizyczna

Rozważmy sytuację
(na nieskończonej
strunie...)

$$\begin{cases} \psi(z,0) = f(z) \\ \left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Prędkość początkowa
struny równa zero

$$\psi(z,t) = \frac{f(z+vt) + f(z-vt)}{2} = \frac{1}{2} f(z+vt) + \frac{1}{2} f(z-vt)$$



Brak zmiany kształtu
wynika z braku dyspersji
tzn. $\omega(k) = vk$
inaczej impuls będzie się
rozpływał...

Sprawdzamy rozwiązanie
doświadczalnie
na wężu oraz na falownicy...

Odbicie fali – metoda przedłużeń

I. Jeśli warunki początkowe dla nieskończonej struny są funkcjami nieparzystymi względem pewnego punktu z_0 , to rozwiązanie $\psi(z_0, t)$ równania falowego w punkcie z_0 jest zawsze równe zero.

II. Jeśli warunki początkowe dla nieskończonej struny są funkcjami parzystymi względem pewnego punktu z_0 to $\left. \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|_{z=z_0}$ jest zawsze równe zero.

Ad. I. Niech $z_0=0 \Rightarrow f(z) = -f(-z), \quad g(z) = -g(-z)$

$$\psi(0, t) = \frac{1}{2} [f(vt) + f(-vt)] + \frac{1}{2v} \int_{-vt}^{vt} g(s) ds = 0$$

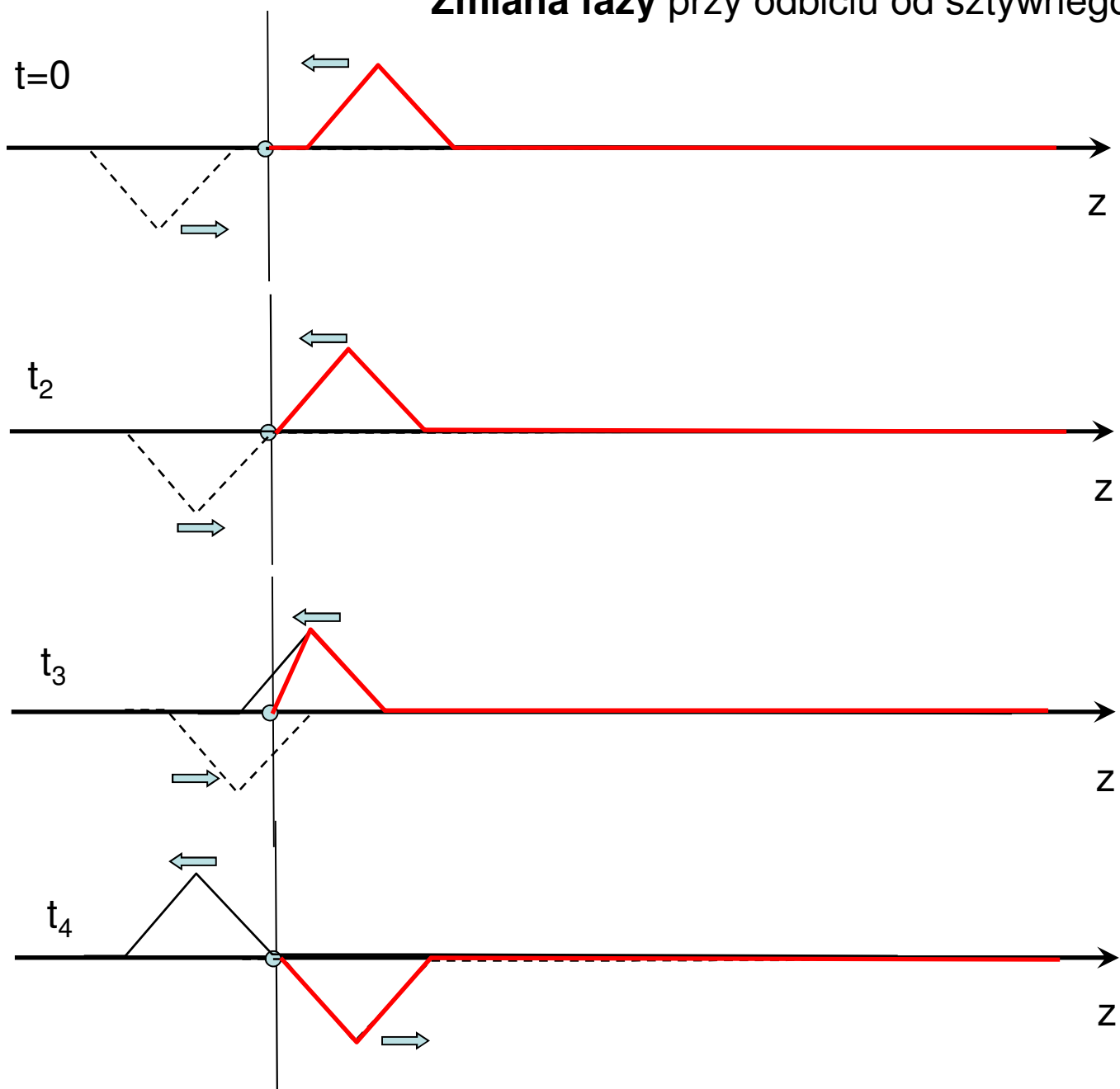
Całkowanie funkcji nieparzystej po przedziale symetrycznym...

Ad. II. Dowód analogiczny jak dla I. Korzystamy z tego, że

$$\frac{df(z)}{dz} = - \frac{df(-z)}{dz}$$

Teraz możemy konstruować odbicie fali od zamocowanego i swobodnego końca struny...

Zmiana fazy przy odbiciu od sztywnego końca...



Brak zmiany fazy przy odbiciu od końca swobodnego...

