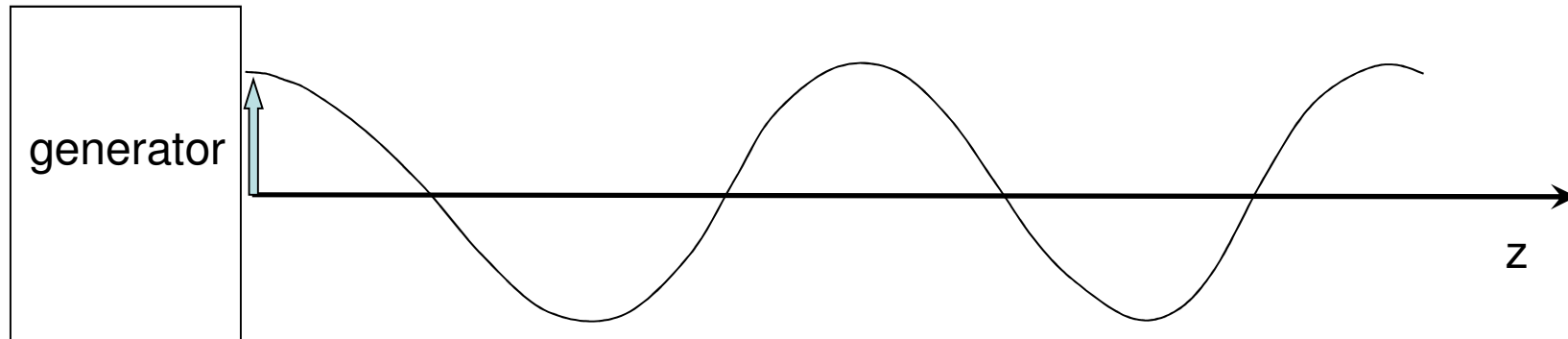


Prędkość grupowa

Superpozycja dwu fal biegnących



Założmy, że w punkcie $z=0$
struna wykonuje drgania

$$\psi(0,t) = A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$$

W strunie wytworzone
zostaną dwie fale
biegnące...

$$\omega_1 t \Rightarrow \omega_1 t - k_1 z$$

$$\omega_2 t \Rightarrow \omega_2 t - k_2 z$$

$$\psi(z,t) = A \cos(\omega_1 t - k_1 z) + A \cos(\omega_2 t - k_2 z)$$



$$\psi(z,t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z) \cos(\omega_{\text{sr}} t - k_{\text{sr}} z)$$

$$\omega_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad \omega_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$$

$$k_{\text{mod}} = \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \quad k_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\psi(z,t) = A_{\text{mod}} \cos(\omega_{\text{sr}} t - k_{\text{sr}} z)$$

$$A_{\text{mod}}(z,t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z)$$

Prędkość rozchodzenia się modulacji

Założmy, że $\omega_{\text{mod}} \ll \omega_{\text{śr}}$



Z jaką prędkością porusza się grzbiet modulowanej fali?

$$A_{\text{mod}}(z, t) = 2A \cos(\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z)$$

$$\omega_{\text{mod}} t - k_{\text{mod}} z = \text{const}$$



$$\omega_{\text{mod}} dt - k_{\text{mod}} dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = v_{\text{mod}} = \frac{\omega_{\text{mod}}}{k_{\text{mod}}} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{k_1 - k_2}$$

Obowiązuje związek
dyspersyjny

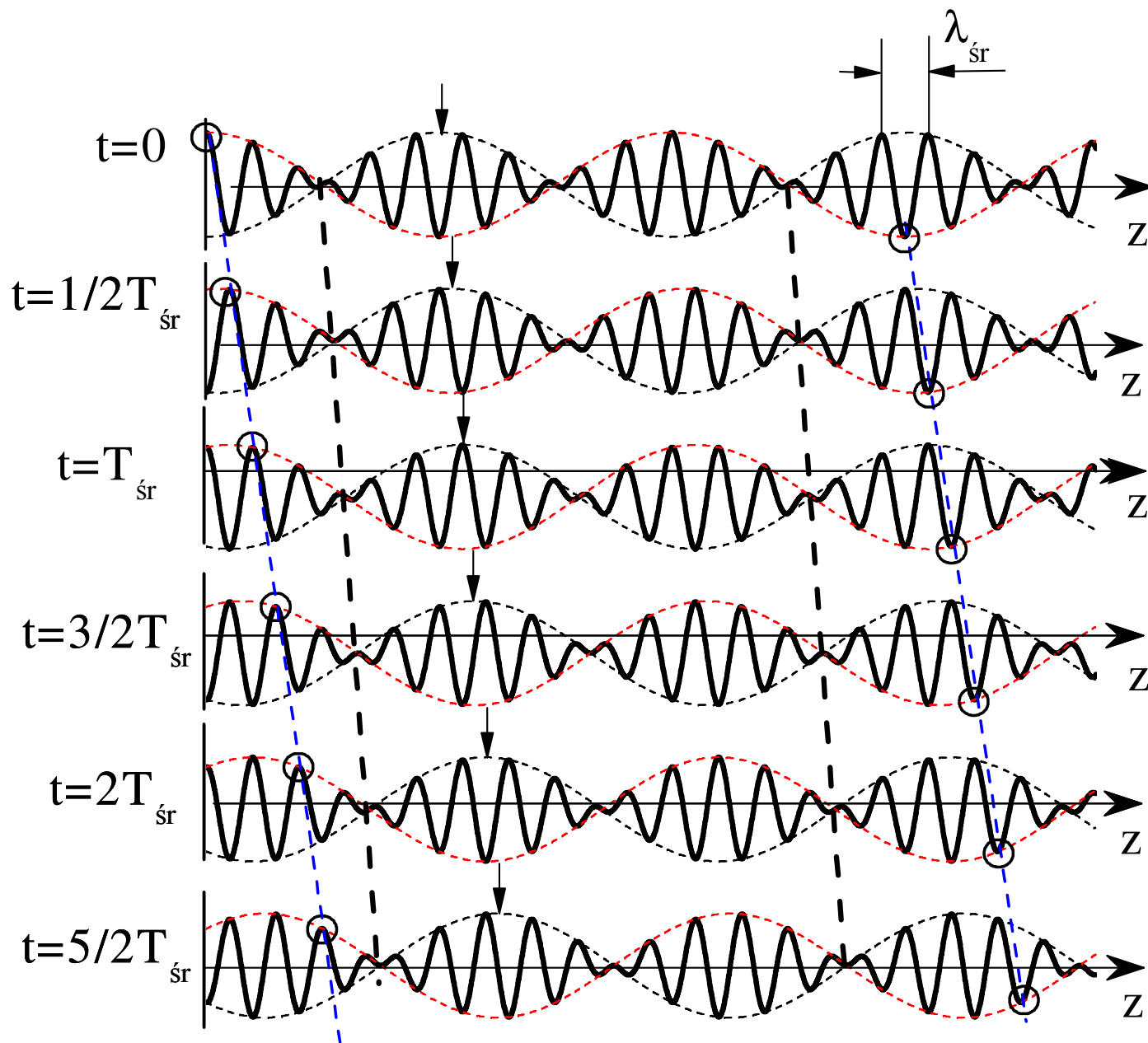
$$\omega_1 = \omega(k_1), \quad \omega_2 = \omega(k_2)$$

$$v_{\text{mod}} = \frac{\omega_1(k_1) - \omega_2(k_2)}{k_1 - k_2}$$

$$\xrightarrow{k_1 \rightarrow k_2}$$

$$v_{\text{mod}} = \frac{d\omega}{dk} \equiv v_g$$

v_g - prędkość grupowa



Symulacja:

$$\omega_{sr} = 10\omega_{mod}$$

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2} \frac{\omega_{sr}}{k_{sr}}$$

Takie zachowanie można obserwować np. wodzie - wystarczy wrzucić kamień...

Związek dyspersyjny dla fal na wodzie

Fale na wodzie

- siła ciężenia (decydujące dla fal o długości powyżej kilku cm)
- napięcie powierzchniowe

Dyspersja fal na głębokiej wodzie (długość fali mała w porównaniu z głębokością)

$$\omega^2 = gk + \frac{T}{\rho} k^3$$

ρ - gęstość (wody)
 T - napięcie powierzchniowe
 g - przyspieszenie ziemskie

Dla fal krótszych niż ok. 1.7cm $v_g > v_\phi$,
dla długich fal $v_g < v_\phi$.
Warto to sprawdzić samodzielnie...

$$k \rightarrow \infty \quad v_g \rightarrow \frac{3}{2}v_\phi$$

$$k \rightarrow 0 \quad v_g \rightarrow \frac{1}{2}v_\phi$$

Fale radiowe o modulowanej amplitudzie

Napięcie wymuszające przyłożone do anteny moduluje amplitudę fali nośnej. Wpływ tego napięcia możemy wyrazić za pomocą szeregu Fouriera:

$$A_{\text{mod}}(t) = A_0 + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos(\omega_{\text{mod}} t + \varphi(\omega_{\text{mod}}))$$

Różnica $A_{\text{mod}}(t) - A_0$ tak dobrana, aby była proporcjonalna do sygnału elektrycznego np. z mikrofonu w studio radiowym

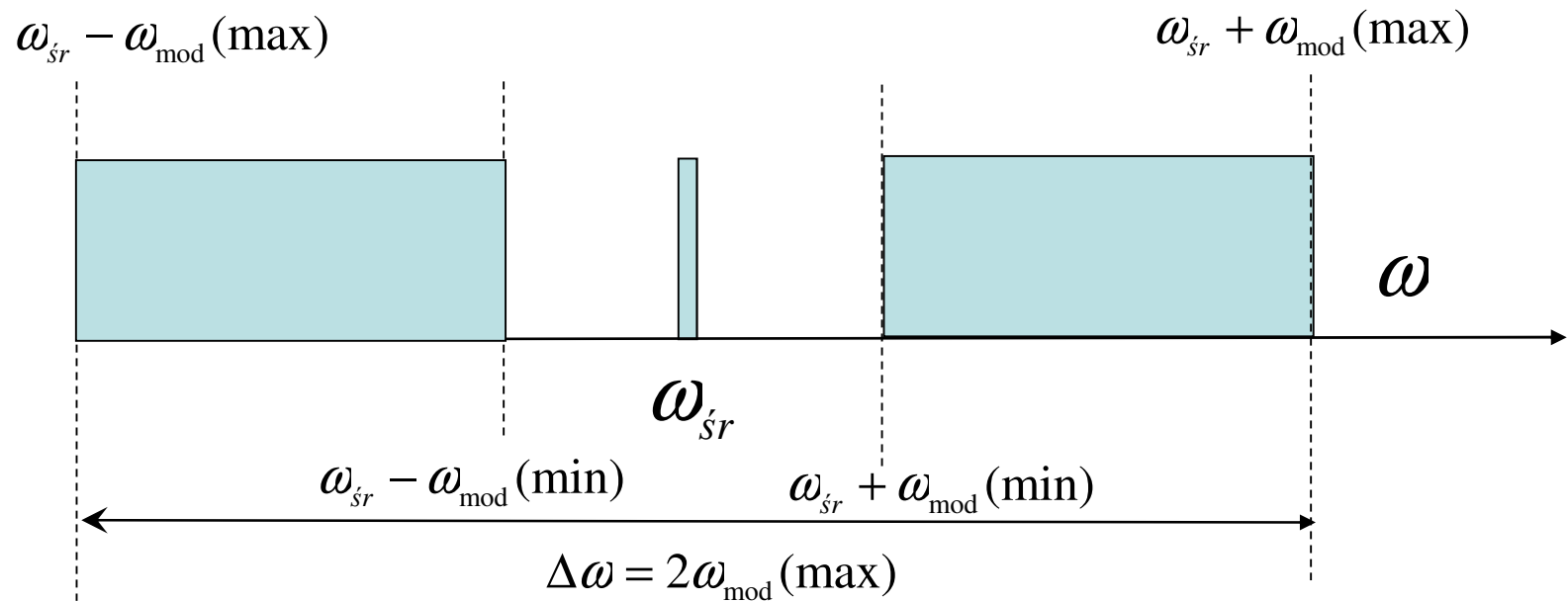
Stała A_0 jest obecna bez względu na to, czy do mikrofonu docierają dźwięki, czy też nie...

Reszta wyrazów pochodzi od fal akustycznych docierających do mikrofonu. Ich częstotliwości (20Hz-20KHz), są znacznie mniejsze od częstotliwości fali nośnej (np. Warszawa I – 225kHz)

$$U(t) = A_0 \cos(\omega_{\text{sr}} t) + \sum_{\omega_{\text{mod}}} A(\omega_{\text{mod}}) \cos[\omega_{\text{mod}} t + \varphi(\omega_{\text{mod}})] \cos(\omega_{\text{sr}} t)$$

Pamiętamy: $\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} \cos(x + y) + \frac{1}{2} \cos(x - y)$

$$\begin{aligned}
 U(t) = & A_0 \cos(\omega_{sr} t) + \leftarrow \text{drganie nośne} \\
 & + \sum_{\omega_{mod}} 1/2 A(\omega_{mod}) \cos[(\omega_{sr} + \omega_{mod})t + \varphi(\omega_{mod})] + \text{górne pasmo nośne} \\
 & + \sum_{\omega_{mod}} 1/2 A(\omega_{mod}) \cos[(\omega_{sr} - \omega_{mod})t - \varphi(\omega_{mod})] \quad \text{dolne pasmo nośne}
 \end{aligned}$$



szerokość pasma $\Delta\nu = 2\nu_{mod}(\max)$

Modulacje (a zatem i muzyka) rozchodzą się w ośrodku z prędkością grupową fal elektromagnetycznych! (Dla próżni prędkość fazowa i grupowa są równe c .)

Układ mas połączonych sprężynkami (drgania podłużne)

Poznaliśmy już
związek dyspersyjny

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \sin\left(\frac{ka}{2}\right)$$

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = 2\sqrt{\frac{K}{m}} \frac{\sin\left(\frac{ka}{2}\right)}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = a\sqrt{\frac{K}{m}} \cos\left(\frac{ka}{2}\right)$$

Widać, że $k \rightarrow 0$

$$v_{\phi}(k \rightarrow 0) = v_g(k \rightarrow 0) = \sqrt{\frac{K}{m}} a = \sqrt{\frac{Ka}{m/a}} = \sqrt{\frac{\alpha_0}{\rho}}$$

Czyli tak jak dla struny!

Natomiast, gdy $k \rightarrow \pi/a$

$$v_g\left(\frac{\pi}{a}\right) = 2a\sqrt{\frac{K}{m}} \cos\left(\frac{\pi a}{2a}\right) = 0$$

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k} = \frac{2a}{\pi} \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Fala biegnąca staje się falą stojącą!

Związek dyspersyjny dla fal de Broglie'a

$$\psi(z, t) = A f(z) e^{-i\omega t}$$

Prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w przedziale dz wokół położenia z

$$|\psi(z, t)|^2 dz \quad \text{nie zależy od czasu...}$$

Jeśli energia potencjalna cząstki jest stała i cząstka porusza się w jednorodnym ośrodku to $f(z)$ jest sinusoidalną funkcją kz

$$\psi(z, t) = [A \sin(kz) + B \cos(kz)] e^{-i\omega t}$$

$$\text{lub} \quad \psi(z, t) = [A e^{ikz} + B e^{-ikz}] e^{-i\omega t}$$

Dla cząstki nierelatywistycznej w obszarze o stałej energii potencjalnej V możemy napisać:

Związek energii z częstością

$$E = \hbar \omega$$

Związek pędu z liczbą falową

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} k = \hbar k$$

Dla cząstek nierelatywistycznych

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad \Rightarrow \quad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar}$$

Prędkość fazowa

$$v_{\phi}(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar k}{2m} + \frac{V}{\hbar k}$$

Pęd cząstki

$$p = m v_{cz} \quad \Downarrow \quad v_{\phi}(k) = \frac{1}{2} v_{cz} + \frac{V}{p_{cz}}$$

W mechanice kwantowej prędkość cząstki jest prędkością „paczki” fal złożonej z szeregu sąsiadujących wartości k . Prędkość rozchodzenia się paczki fal równa jest prędkości grupowej v_g :

$$v_g(k) = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \frac{d}{dk} \left(\frac{\hbar k^2}{2m} + \frac{V}{\hbar} \right)_0 = \left(\frac{\hbar k}{m} \right)_0 = \frac{p}{m} = v_{cz}$$

Dla swobodnej cząstki relatywistycznej:

$$E^2 = (mc^2)^2 + (cp)^2$$

$$E = \hbar\omega$$

$$p = \hbar k$$

$$\hbar^2\omega^2 = (mc^2)^2 + (\hbar ck)^2$$

$$\vec{p} = \gamma m \vec{v}$$

$$E = \gamma mc^2$$

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} \quad \text{ale} \quad p = v_{cz} \frac{E}{c^2} \quad \begin{array}{l} \text{(patrz początkowe} \\ \text{wykłady)} \\ v_{cz} \text{ - prędkość cząstki} \end{array}$$

Czyli ostatecznie
prędkość fazowa

$$v_\phi = \frac{c^2}{v_{cz}}$$

dla swobodnej cząstki
relatywistycznej

$$v_\phi > c$$

Prędkość grupowa

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2 p}{E} = v_{cz}$$

Zależność pomiędzy prędkością
fazową i grupową dla cząstki relat.

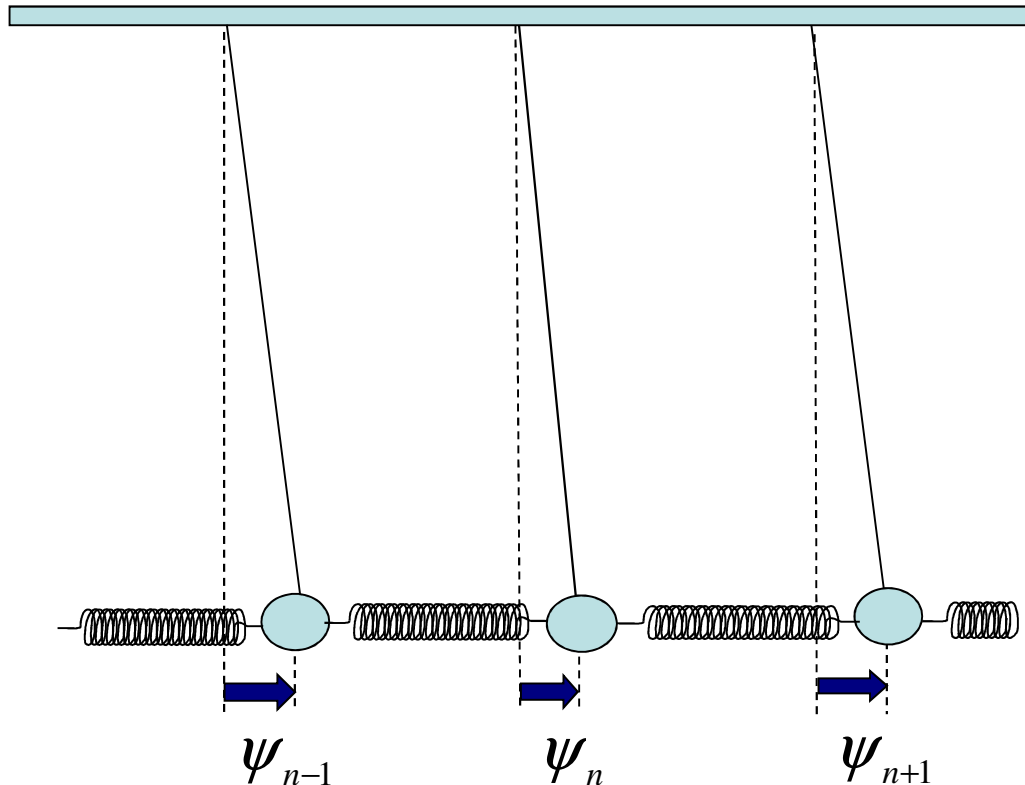
$$v_\phi v_g = c^2$$

**Dla fotonu
w próżni:**

$$v_\phi = v_g = c$$

Wnikanie w obszar „zabroniony”

Zanim przejdziemy do fal de Broglie’a uwięzionych w pewnym obszarze przestrzeni wróćmy na chwilę do wahadeł sprzężonych...



Równanie ruchu:
$$M\psi_n = -M\omega_0^2\psi_n + K(\psi_{n+1} - \psi_n) - K(\psi_n - \psi_{n-1})$$

Najniższa częstość własna:
$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Przybliżenie ciągłości

$\psi_n(t) = \psi(z, t) \Rightarrow$ Korzystamy z rozwinięcia w szereg Taylora

$$\psi_{n+1}(t) = \psi(z + a, t) = \psi(z, t) + a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$

$$\psi_{n-1}(t) = \psi(z - a, t) = \psi(z, t) - a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$



$$\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t) = a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$

$$\psi_n(t) - \psi_{n-1}(t) = a \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} - \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial^2 z} + \dots$$



$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(z, t) + \frac{K a^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}$$

**Równanie Kleina-Gordona-
spełniają je fale de Broglie'a
relatywistycznych cząstek
swobodnych**

Skąd takie przypuszczenie?

Rozważmy monochromatyczne :
fale $E = \hbar \omega$, potencjał $V = \text{const}$

$$\psi(z,t) = [Ae^{ikz} + Be^{-ikz}]e^{-i\omega t}$$



a) $\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = -i\omega \psi(z,t)$

b) $\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \psi(z,t)$

c) $\frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} = e^{-i\omega t} (ikAe^{ikz} - ikBe^{-ikz})$

d) $\frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} = -k^2 \psi(z,t)$

Mnożymy związek a) obustronnie przez $i\hbar$

$$\frac{i\hbar \partial \psi(z,t)}{\partial t} = \hbar \omega \psi(z,t)$$

Korzystając z tego, że dla cząstek nierelatywistycznych mamy:

$$\hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V \quad \text{oraz ze związku d) dostajemy}$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(z,t)}{\partial z^2} + V \psi(z,t)$$

**Uogólnienie dla $V=V(z)$
– równanie Schrödingera!**

Dla cząstek relatywistycznych mamy:

$$\hbar^2 \omega^2 = (mc^2)^2 + (\hbar ck)^2$$

Mnożąc powyższe równanie przez $-\frac{1}{\hbar^2} \psi(z, t)$

dostajemy

$$-\omega^2 \psi(z, t) = -c^2 k^2 \psi(z, t) - \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \psi(z, t)$$

Korzystając z ze związków **b)** oraz **d)**

otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} - \frac{(mc^2)^2}{\hbar^2} \psi(z, t)$$

**Równanie
Kleina-Gordona**

Dla cząstek o masie $m=0$, równanie Kleina-Gordona przechodzi w klasyczne równanie falowe dla fal nie ulegających dyspersji o prędkości c !

Foton ma zerową masę...

Wahadła sprzężone (granica ciągłości)

$$\frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} = -\omega_0^2 \psi(z, t) + \frac{Ka^2}{M} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2}$$

$$\psi(z, t) = A(z) \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial t^2} &= -\omega^2 A(z) \cos(\omega t + \varphi) \\ \frac{\partial^2 \psi(z, t)}{\partial z^2} &= \frac{d^2 A(z)}{dz^2} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 A(z)}{dz^2} = \frac{M}{Ka^2} (\omega_0^2 - \omega^2) A(z) \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

Fale sinusoidalne, gdy

$$\omega^2 > \omega_0^2$$

$$k^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{M}{Ka^2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{Ka^2}{M} k^2$$

$$A(z) = A \sin(kz) + B \cos(kz)$$

Fale wykładnicze

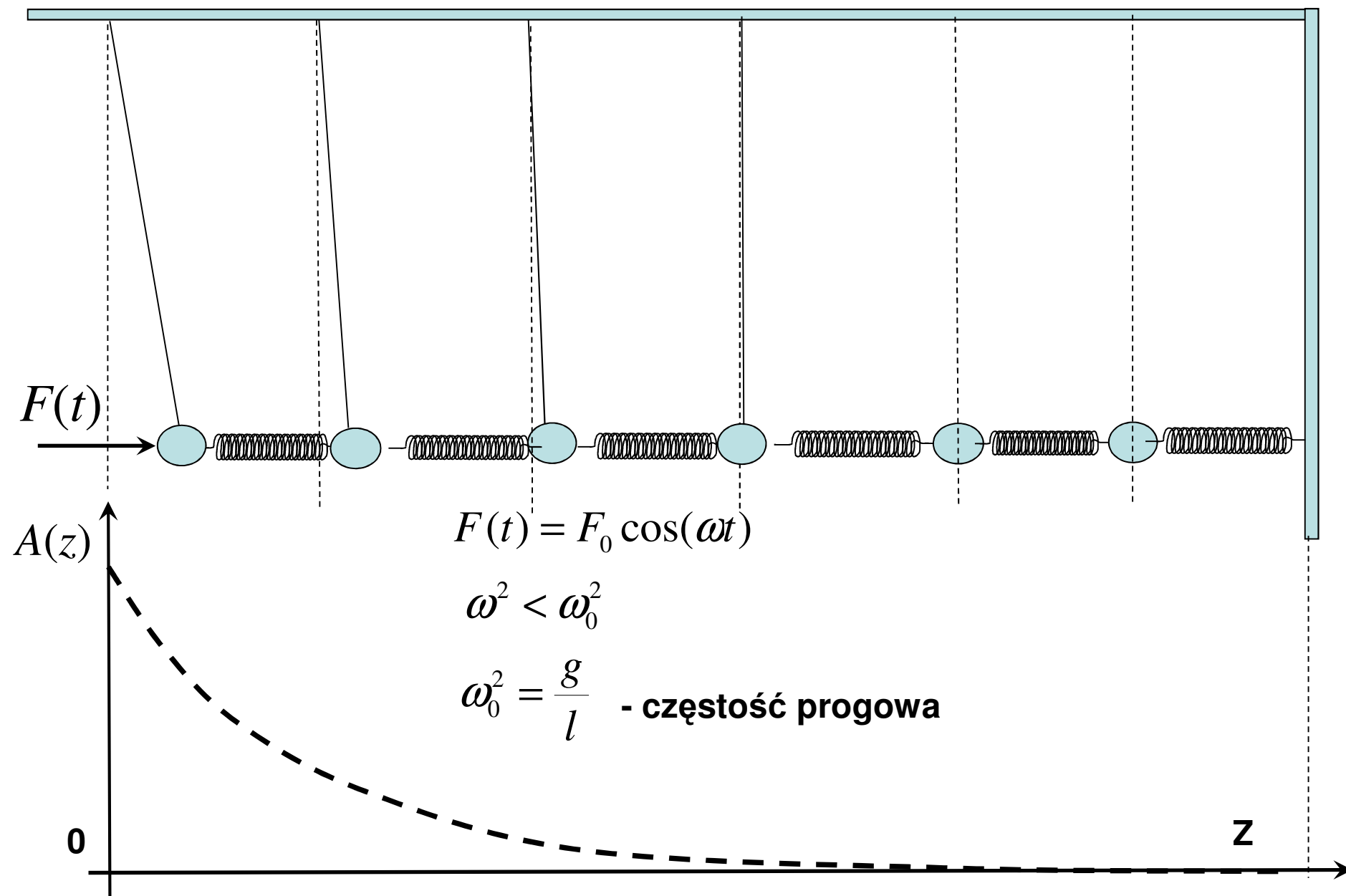
$$\omega^2 < \omega_0^2$$

$$\kappa^2 = (\omega_0^2 - \omega^2) \frac{M}{Ka^2}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{Ka^2}{M} \kappa^2$$

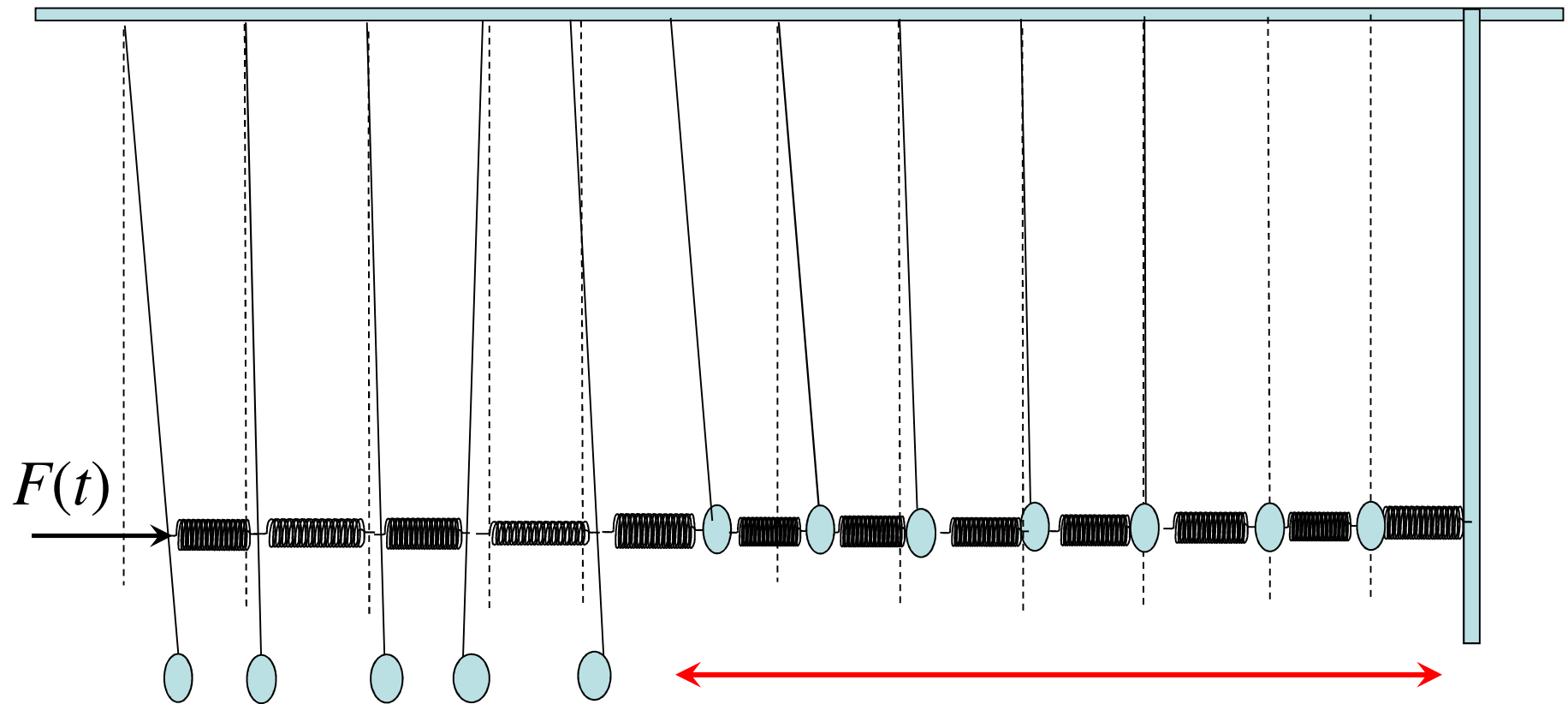
$$A(z) = A e^{-\kappa z} + B e^{\kappa z}$$

Fale zanikające wykładniczo – ośrodek reaktywny



$$F(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Granica obszarów



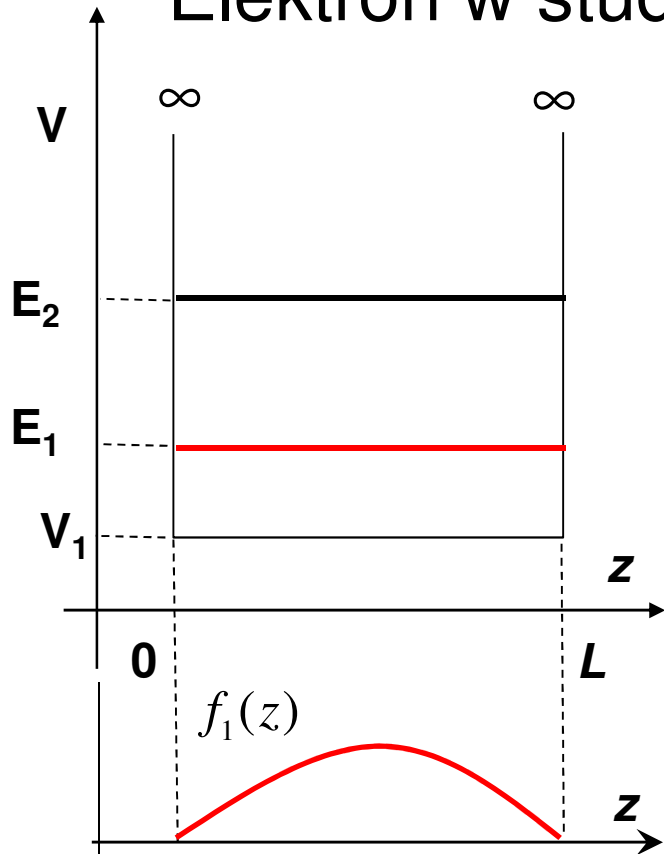
$$\omega_{01}(z) = \sqrt{\frac{g}{l_1}} < \omega$$

Obszar dyspersyjny:
fale sinusoidalne

$$\omega_{02}(z) = \sqrt{\frac{g}{l_2}} > \omega$$

Obszar reaktywny
- fale wykładnicze wnikają
na pewną głębokość...

Elektron w studni (o nieskończonych barierach)



$$\psi(z, t) = [A \sin(kz) + B \cos(kz)] e^{-i\omega t}$$

$|\psi(z, t)|^2$ prawdopodobieństwo znalezienia elektronu równe zero poza przedziałem $0 \leq z \leq L$

warunki brzegowe jak dla struny zamocowanej z dwóch końców



$$\psi(z, t) = A \sin(kz) e^{-i\omega t} \quad \sin(kL) = 0$$

$$k_1 L = \pi \dots k_n L = n\pi$$

Prawdopodobieństwo znalezienia elektronu na jednostkę długości

Powinno być ono unormowane $|\psi(z, t)|^2 = |e^{-i\omega t} A \sin(kz)|^2 = |A|^2 \sin^2(kz)$

$$1 = \int_{z=0}^L |\psi(z, t)|^2 dz = |A|^2 \int_{z=0}^L \sin^2(kz) dz = \frac{1}{2} |A|^2 L \quad \Rightarrow \quad A = |A| e^{i\alpha} = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{i\alpha}$$

α - stała faza

Stąd funkcja falowa elektronu w w studni:

$$\psi_n(z, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} e^{-i(\omega t - \alpha)} \sin(k_n z)$$

Przyjmując (jak poprzednio) dla cząstki „klasycznej” związek dyspersyjny”

$$\begin{aligned} E &= \hbar \omega \\ p &= \hbar k \end{aligned} \quad \omega_n = \omega_0 + \frac{\hbar k_n^2}{2m} \quad \omega_0 = \frac{V}{\hbar}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} + V_1 = n^2 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + V_1, \quad n = 1, 2, 3...$$

Częstości fal inne niż częstości fal stojących na strunie!

Przenikanie cząstki do zakazanego obszaru

Analogia z wahadłami sprzężonymi:

Obszar dyspersyjny:

$$0 \leq z \leq L \quad \omega^2 > \omega_0^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2(z) + \frac{Ka^2}{M} k^2$$

$$\omega_0^2(z) \equiv \frac{g}{l} \quad \text{co odpowiada} \quad \omega_0(z) \equiv \frac{V_1}{\hbar}$$

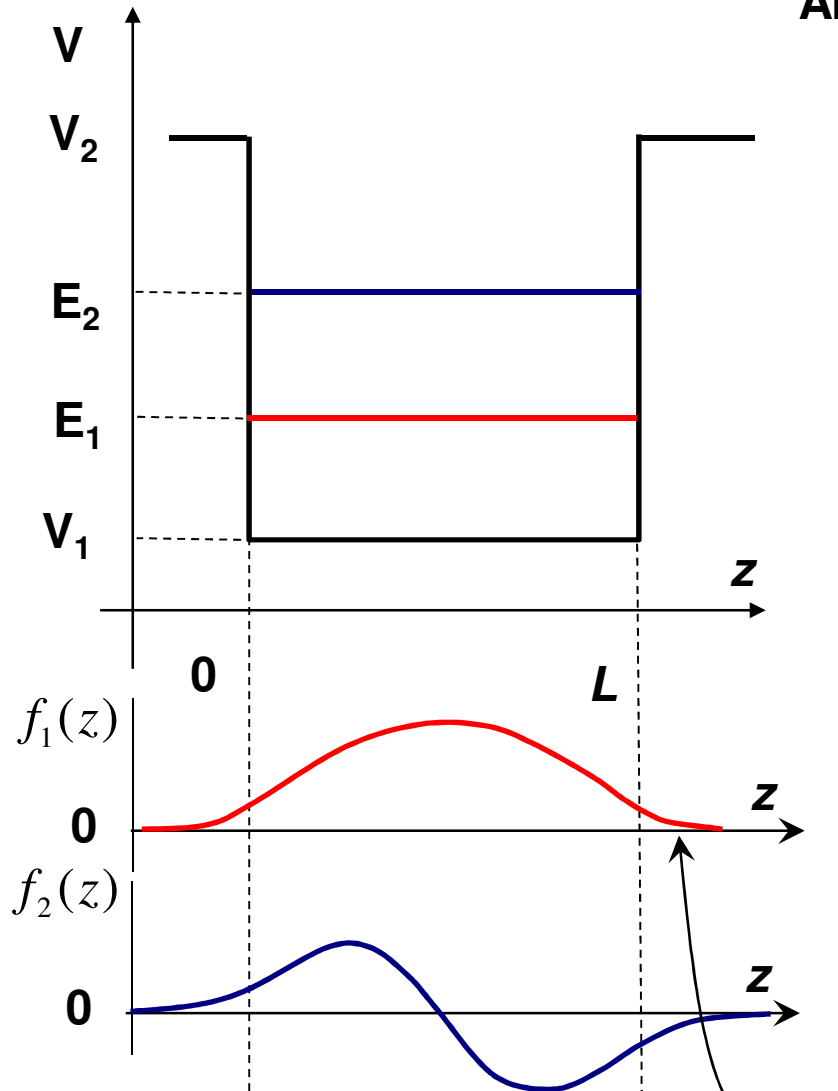
Obszar reaktywny (zanik wykładniczy):

$$\omega^2 = \omega_0^2(z) - \frac{Ka^2}{M} \kappa^2 \quad \omega^2 < \omega_0^2$$

$$E - V_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0 \quad 0 \leq z \leq L$$

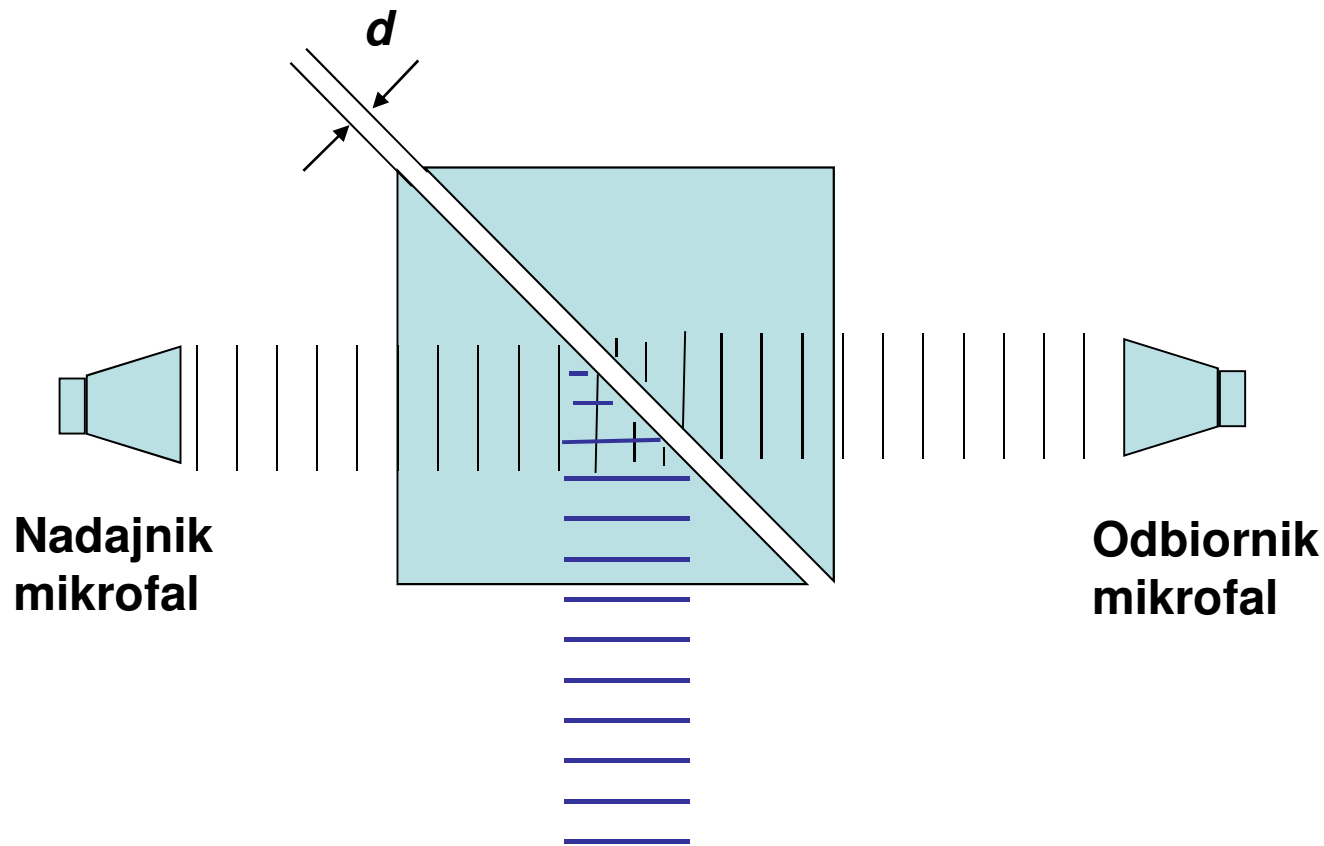
$$E - V_1 = -\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} < 0 \quad \text{w innych miejscach}$$

zanik wykładniczy $|\psi(z,t)|^2 \sim |e^{-\kappa(z-L)}|^2$



Fale de Broglie'a wnikają
w obszar zakazany...

Tunelowanie przez barierę



Dla $d \sim \lambda$ mikrofałe przenikają przez szczelinę – analogia do efektu tunelowego – przenikania cząstek przez barierę potencjału...