Wykład 18

Zegary w polu grawitacyjnym

Paweł i Gaweł to cenne laboratorium, które pozwoli nam odkryć wiele zjawisk, jakie mają miejsce w obecności grawitacji, zwłaszcza w bardzo silnych polach.

Które zdarzenia na liniach świata Pawła i Gawła mają cechy zdarzeń równoczesnych? Nikt nie ma wątpliwości, że sam start Pawła i Gawła, równoczesny w układzie Ziemi, jest tez **dla nich** równoczesny. Później sytuacja pozornie się komplikuje, ale przecież ustaliliśmy, że w kolejnych układach kowędrujących sytuacja ciągle jest taka sama. Równoczesne są zdarzenia odcinane przez promień wyprowadzony ze środka hiperbol. W każdym kolejnym układzie kowędrującym, linia t'=0 przecina wszystkie hiperbole w takich punktach, w których ciała wzdłuż nich wędrujące, są wzajemnie nieruchome i właśnie zaczynają (jakby) dopiero przyspieszać.

Wyobraźmy sobie, że Paweł wyrzuca regularnie cukierki Gawłowi (np. co sekundę na jego zegarze), a Gaweł każdy taki dolatujący cukierek odbija kierując go w przeciwną stronę. Niech tak będzie, że Paweł wyrzuca cukierek nr 10 (pierwszy miał numer zero), gdy właśnie dotarł do niego odbity przez Gawła cukierek nr 0. Jasne jest, że w drodze jest 10 cukierków, a Gaweł **właśnie** odbija cukierek nr 5. Potem, do znudzenia, wyrzucając cukierek nr N będzie Paweł łapał odbity cukierek nr N-10. Prędkości względne Pawła, gdy wyrzuca cukierek N i Gawła, gdy odbija cukierek N-5 są zero (a względem układu Ziemi, duże, ale jednakowe).

Między kolejnymi cukierkami prędkość i Pawła i Gawła wzrośnie o pewną wartość. **Jednakową!** Zarówno względem Ziemi, ale przede wszystkim względem każdego kolejnego układu kowędrującego.

Ale przecież ich przyspieszenia są **różne**. Zatem ta sama prędkość musi być uzyskana w **krótszym czasie na zegarach Gawła.** Zdarzenia N u Pawła i N-5 u Gawła są równoczesne w każdym tego słowa znaczeniu. Kolejne N+1 i N +1-5, odpowiednio, też są równoczesne. Ale przyspieszenie Gawła jest większe, więc odstęp czasu na jego zegarach wynosi – **nie ma przeproś** - $\frac{z_G}{z_P}1\text{s}$. To jest chyba najbardziej zdumiewająca cecha grawitacji.

Gaweł ma, w naturalny sposób, do czynienia z dwoma różnymi czasami!

Jeśli przydać Pawłowi przywilej (tylko jemu, a ściślej każdemu, który znajduje się na tej samej płaszczyźnie poziomej, co on) by to on nie musiał kłopotać się z dwoma czasami, tylko by to jego zwykły zegar odmierzał zwykłe sekundy (w oparciu o definicję SI), to już Gaweł musi mieć do czynienia z dwoma różnymi czasami. Jeśli ponadto, utożsamimy czas Pawła z numerem cukierka, to numer cukierka przylatującego, powiększony o stałą wartość (5 w naszym przykładzie), będzie u Gawła **jednym czasem**, który będziemy oznaczać t i zwać **czasem współrzędnościowym**, a czas $\frac{z_G}{z_P}t$ jest czasem, jaki wskazuje zegar własny, gdyby nastawić go na zero wraz z minus piątym cukierkiem, (czemu odpowiada $t = -5 + 5 = 0$). Inni „Gawłowie" będą wyznaczali płynący czas t uwzględniając stosowne opóźnienie dochodzącego „cukierka", czy innego impulsu od Pawła.

Ponieważ rozbieżność miedzy czasem własnym a współrzędnościowym systematycznie narasta, wygodniej jest nie mówić o czasie własnym, liczonym od jakiejś jednej ustalonej chwili, a jedynie o jego przyrostach. (Czasem t operować możemy zwyczajnie ustalając dla danego pola jakiś początek, choćby moment przyjścia na świat Chrystusa). Zegar **nieruchomy** w polu grawitacyjnym, zegar Gawła o współrzędnej z, wskazuje upływ odcinka czasu:

$$\mathrm{d}\tau = \frac{z}{z_P}\mathrm{d}t$$

Ta szczególna postać zależności obowiązuje dla szczególnego pola przyspieszeń, które tak tanim kosztem udało nam się stworzyć. Wyznaczenie tej zależności dla pola centralnego **dopiero przed nami**.

Gdyby koło Gawła nadał przelatywał jakiś zegar z dużą prędkością, tak, że zegar ten przebyłby odległość dl miedzy dwoma bliskimi zegarami (praktycznie o takim samym z jakie ma Gaweł), to zegar ten, zgodnie ze STW, pokazałby jeszcze inny odstęp czasu, którego kwadrat dany jest wzorem:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\tau^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2) = \left(\frac{z}{z_P}\right)^2 \mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}\mathrm{d}l^2 = g_{00}\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}\mathrm{d}l^2$$

Zamiast cukierków można wysyłać grzbiety fal. Ich liczba na jednostkę czasu własnego u Gawła będzie **mniejsza** niż to widzi Paweł.

$$\sqrt{g_{00}(G)}\nu_G = \nu_P = \sqrt{g_{00}(G')}\nu_{G'}$$

To jest słynne przesunięcie ku czerwieni! Początkowo zaobserwowane w widmie Słońca, zostało potem zaobserwowane nawet na Ziemi, przy wysyłani promieniowania gamma z piwnicy na wieżę. Zmiana jest niewielka, ale fantastyczna czułość efektu Mösbauera umożliwiła jednoznaczne potwierdzenie.

Z czasem w polu grawitacyjnym dzieją się cuda i musimy nadać temu „cudowi” pewną wygodną formę.

Pamiętajmy o Minkowskim! Operując przyrządami uwolnionymi na chwilę od uścisku grawitacji, mamy lokalnie stan nieważkości, czyli STW. Dla obserwatorów przelatujących obok wybranego miejsca z różnymi prędkościami, interwał pomiędzy dwoma zdarzeniami jest niezmiennikiem i z jego postaci wynika niemal wszystko, co da się powiedzieć o pomiarach fizycznych.

Używając nieinercjalnych obserwatorów i wygodnych zmiennych, w których są oni we wzajemnym spoczynku (i wygodnego czasu t) dostaliśmy **metrykę** czasoprzestrzeni sprowadzającą się (tutaj) do jednej, niezwykle ważnej dla grawitacji, wielkości g_{00}. Jest to funkcja położenia.

Trójwymiarowe przestrzenie stałego czasu są niewątpliwie **jeszcze euklidesowe**.

W istniejącym polu grawitacyjnym możliwe są rzuty ukośne, istnieją orbity. Jakie prawa rządzą ruchem ciał (pod wpływem grawitacji)?

Jak wyznaczać ruch w polu grawitacyjnym

Paweł i Gaweł obserwując „cukierki”, w szczególności takie wyrzucane z dowolna prędkością w dowolnym kierunku, opisują ich nietrywialny ruch jako efekt grawitacji. **Ale my wiemy**, że ruch tych cukierków, jeśli patrzeć na niego inaczej, jest banalnie prosty! Jest to w układzie wyjściowym (ale też w każdym z licznych układów kowędrujących) ruch jednostajny. Linia świata jest linią prostą. Jaką zasadą wariacyjną opisać ruch swobodnej cząstki w przestrzeni Minkowskiego?

Co byście powiedzieli na wymóg, by cząstka przybywając do **zdarzenia** B od zdarzenia A, jak najbardziej się zestarzała? Czyli, żeby $\int_A^B \sqrt{\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2)}$ =maksimum.

Przypomnijmy sobie „paradoks” bliźniąt. Brat, który poleciał w drogę, potem zawrócił będzie przy spotkaniu młodszy od brata, który spokojnie „nic nie robił”. Tak jak linia prosta minimalizuje odległość w przestrzeni Euklidesa, tak linia prosta też, ekstremalizuje „odległość”, w czasoprzestrzeni.

Można to natychmiast potwierdzić rachunkiem. Wyciągając którąkolwiek z różniczek, np. czas dostajemy dla „interwału” $\int_A^B \sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}\mathrm{d}t$. **Znamy sztuczkę**. Jeśli taka całka jest (ma być) ekstremalna (względem każdej zależności $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ z osobna), to pochodna po każdej prędkości wyrażenia pod całką musi być stałą ruchu!

Są aż trzy!!!

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\dot{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}},-\frac{1}{c^2}\frac{\dot{y}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}},-\frac{1}{c^2}\frac{\dot{z}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}$$

Oznacza to, oczywiście, że wszystkie 3 prędkości są stałe. Linia świata rzeczywiście musi być linią prostą. Ale znamienne, że „całki ruchu” piekielnie przypominają pędy!. Gdybyśmy zasadę wariacyjną sformułowali do wielkości ściśle proporcjonalnej do czasu własnego, wychodziłby od razu pęd. Fantastyczne!

$$-mc^2\int_A^B \sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}\mathrm{d}t = \text{minimum}$$

Tego rodzaju[1] wielkość o wymiarze energia*czas, albo pęd*odległość, została wprowadzona jeszcze do mechaniki klasycznej, a jej minimalizacja przez ruch rzeczywisty zaczynający się w chwili t_A w punkcie x_A , i kończący w chwili t_b w punkcie x_B znana jest jako zasada najmniejszego działania. Zabawne, że w mechanice Newtona ma ona tajemniczy, abstrakcyjny charakter, podczas gdy w teorii względności jest proporcjonalna do czasu zestarzenia się! Na razie nie ma niczego tajemniczego. Zasada wymusza prostoliniowe linie świata. Zauważmy, że zasada działa już w czasoprzestrzeni. Dotychczas poznane działały w przestrzeni, wyznaczały sam tor, a to cząstki (albo światła) w zakrzywionej przestrzeni, a to toru światła w ośrodku o zmiennym współczynniku załamania, czyli długości fali, a to torów cząstki w polu potencjalnym (ta ostatnia zasada w świetle falowego dualizmu jest kompletnie oczywista i tożsama z zasadą Fermata, tyle że dla fal de Broglie’a)

Zmiana znaku oznacza zamianę maksimum na minimum.

Jeśli w powyższej zasadzie jako zmiennej niezależnej użyjemy którejś ze współrzędnych, np. x, dostaniemy

[1] Mówię wyraźnie „tego rodzaju” a nie **ta** wielkość. W mechanice Newtona nie występuje c. W rzeczywistości teoria względności jest prostsza i ładniejsza, jeśli chodzi o zasadę najmniejszego działania. A działanie klasyczne jest koślawym przybliżeniem pięknego niezmienniczego działania teorii względności. Istnienie klasycznej zasady wygląda na jakiś przypadek, tu jest to najprostsze pod Słońcem stwierdzenie, że odcinki linii prostych są pod względem długości wyróżnione.

$$-mc^2\int_A^B\sqrt{t'^2-\frac{1}{c^2}(1+y'^2+z'^2)}\,\mathrm{d}x=\text{minimum}$$

Znak „prim" oznacza różniczkowanie po x.

Jes*t* jeszcze jedno prawo zachowania! Występuje pochodna czasu po x, ale sam czas nie.

$$\frac{-mc^2t'}{\sqrt{t'^2-\frac{1}{c^2}(1+y'^2+z'^2)}}=\text{const}=\frac{-mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(1/t'^2+y'^2/t'^2+z'^2/t'^2)}}=$$

$$=\frac{-mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}$$

Pozornie to nic szczególnego. Już wiedząc, że wszystkie 3 prędkości są stałe, możemy powiedzieć, że każda funkcja prędkości jest stała. Ale pomyślmy o przyszłości! W bardziej wyrafinowanych sytuacjach, gdy nie wszystkie prędkości będą stałe, o ile tylko zmiennej t nie będzie w wyrażeniu na interwał, szybciutko odnajdziemy wielkość stałą w czasie ruchu!

I nikt nam nie wmówi, że nazwa energia dla takiej wielkości będzie niewłaściwa.

Wróćmy do losu Pawłowego cukierka. Raz uwolniony, wiedzie żywot w świecie Minkowskiego i obowiązuje go „przymus" maksymalnego starzenia. Jest to zarazem efekt falowej natury, ale nawet nic o niej nie wiedząc, powiemy, że jest to wyraz zasady bezwładności. Ruch ma być jednostajny, prostoliniowy. Tyle, że nie w zmiennych Pawłów i Gawłów! Co robić? Czy trzeba przeliczać ruch w zmiennych „minkowskich" na ruch w zmiennych „Pawłowo – Gawłowych"?.

Nie trzeba! Minimum, to minimum! „Minkowski" interwał **mamy przecież** policzony w zmiennych „Pawłowo – Gawłowych". On ma być maksymalny (a z mnożnikiem $-mc^2$ – minimalny):

$$-mc^2\int\mathrm{d}s=-mc^2\int\sqrt{g_{00}(z)(\mathrm{d}t)^2-\frac{1}{c^2}(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)}=\text{minimum}$$

Używając jako zmiennej niezależnej x, dostaniemy natychmiast prawo zachowania:

$$\frac{-mc^2g_{00}(z)\mathrm{d}t/\mathrm{d}x}{\sqrt{g_{00}(z)(\mathrm{d}t/\mathrm{d}x)^2-\frac{1}{c^2}(1+(\mathrm{d}y/\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}z/\mathrm{d}x)^2)}}=\frac{-mc^2g_{00}(z)}{\sqrt{g_{00}(z)-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)}}=\text{const}$$

Kropka oznacza pochodną po czasie „współrzędnościowym". Prawdziwa prędkość cukierka, dla Gawła, który go łapie, to prędkość względem jego zegara. Jego czas

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t \cdot \sqrt{g_{00}}$$

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \sqrt{g_{00}}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$$

Dokonując tej zamiany, dzieląc licznik i mianownik przez $\sqrt{g_{00}}$, nadam prawu zachowania postać

$$\frac{mc^2\sqrt{g_{00}(z)}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left((\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau})^2\right)}} = \mathrm{const}$$

To jest kolejny bardzo ważny moment.

Oto odkryliśmy (dzięki ożenieniu zasady równoważności ze szczególną teoria względności) **nowy** sposób wprowadzenia **konsekwentnej** dynamiki. Różnica biegu zegarów (miedzy zdarzeniami równoczesnymi) w różnych miejscach, nawet płaskiej przestrzeni, prowadzi do znów **nietrywialnej** dynamiki. Coś się dzieje! Mimo iż nie wskazuję wyraźnej przyczyny w postaci innego ciała, cukierki rozpędzają się! Wchodząc w obszar zmniejszonego g_{00} prędkość **musi** wzrastać. Trochę jak w poczciwej mechanice z potencjałem. **Tylko, że tam jest suma, a tu iloczyn!**

Rozwijając względem potęg odwrotności prędkości światła:

$$\frac{mc^2\sqrt{g_{00}(z)}}{\sqrt{1-v(z)^2/c^2}} \approx mc^2\left(1+\sqrt{g_{00}(z)}-1\right)\left(1+\frac{v(z)^2}{2c^2}\right) \approx$$

$$\approx mc^2 + \left(m\frac{v(z)^2}{2} + mc^2\left(\sqrt{g_{00}(z)}-1\right)\right) = \mathrm{const}$$

dostajemy **coś znajomego.** Ale tylko w najniższym przybliżeniu. Dodając kolejny wyraz rozwinięcia uzyskamy jakieś równanie, ale już się go nie da zinterpretować jako sumy **poprawionej** energii kinetycznej i poprawionej energii potencjalnej.

Przypomnijmy znalezione wcześniej dla częstości:

$$\nu\sqrt{g_{00}} = \mathrm{const}$$

Ocieramy się o rzeczy wielkiej doniosłości.

Z jednej strony znów widzimy, że częstotliwość i energia to jakieś syjamskie siostry! Z drugiej, równanie powyższe wiąże prędkość cząstki (a dokładniej nawet to, co w szczególnej teorii względności jest energią) z położeniem w polu grawitacyjnym. Odpowiednik **prawa zachowania energii, w polu grawitacyjnym ma postać multiplikatywną.**

Nie może być mowy o żadnej energii potencjalnej, która by się dodawała do energii kinetycznej!! Tegoście się nie spodziewali!

Kształt toru w ogólniejszym przypadku, łatwo wyznaczymy. Niech Paweł wyrzuci cukierek w płaszczyźnie *x,z*. Ponieważ interwał nie zależy od *x*, istnieje jeszcze jedno prawo zachowania! Różniczkujemy po $\dot{x}$ dostając:

$$\frac{m\dot{x}}{\sqrt{g_{00}(z)-\frac{1}{c^2}(\dot{x}^2+\dot{z}^2)}}=\frac{m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left((\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau})^2\right)}}=p_x=\mathrm{const}$$

To jest „poczciwe" prawo zachowania składowej pędu prostopadłej do kierunku pola. Wynika tu ono z ogólnej zasady „maksymalnego starzenia". Dzieląc stronami oba powyższe prawa zachowania dostajemy

$$\frac{m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}}{mc^2\sqrt{g_{00}}}=\frac{p_x}{E}\Rightarrow\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}}=\frac{E}{c^2\sqrt{g_{00}}\,p_x}$$

Biorąc odwrotność drugiego podniesionego do kwadratu mamy:

$$\frac{1}{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau})^2}-\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})^2=\frac{m^2}{p_x^{\ 2}}=\frac{E^2}{c^4 g_{00}p_x^{\ 2}}-\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})^2$$

Dla $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$, dostajemy:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\pm\sqrt{\frac{z_0^{\ 2}E^2}{c^2z^2p_x^{\ 2}}-\frac{m^2c^2}{p_x^{\ 2}}-1}$$

Jeśli rzucamy ciało poziomo z punktu $x = 0$, $z = L$, stała E spełnia warunek:

$$\frac{z_0^{\ 2}E^2}{c^2L^2p_x^{\ 2}}=\frac{m^2c^2}{p_x^{\ 2}}+1\equiv 1+\varepsilon$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=\pm\frac{\mathrm{z}}{\sqrt{(1+\varepsilon)(L^2-z^2)}}$$

$$x=\mp\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\sqrt{L^2-z^2}+C$$

ale dla $z = L$ ma być $x = 0$, więc $C = 0$

i ostatecznie:

$$x^2(1+\frac{m^2c^2}{p_x^{\ 2}})+z^2=L^2$$

Jest to elipsa spadająca pionowo na horyzont. Gdy masa jest zero (foton), elipsa staje się okręgiem.

Zauważmy, że w teorii grawitacji, nie jest zbyt owocne, zastanawianie się nad równaniami ruchu. One są zawarte w zasadzie maksimum interwału, który jest czymś prostym, jest skalarem, jest niezmiennikiem, jest wygodny i skuteczny. Każde współrzędne jakie nam przyjdą do głowy mogą automatycznie być użyte, byle tylko ułatwiły nam rachunki.

Poznaliśmy dwa mechanizmy „zakrzywiające" tory, odmienne od tradycyjnego bilansowania pędu. Z jednej strony to krzywizna, z drugiej niejednostajny upływ czasu między zdarzeniami równoczesnymi. W pierwszym wypadku minimalizować trzeba odległość zapominając, jakby o czasie, w drugim minimalizujemy interwał w czasoprzestrzeni.

W rzeczywistości, ten drugi mechanizm, obejmuje i ten pierwszy!

Zbadajmy, bowiem, czemu jest równoważna zasada minimum interwału policzonego na naszej zakrzywionej powierzchni (umieszczonej w zwykłej przestrzeni Minkowskiego)

$$-mc^2\int\sqrt{\mathrm{d}t^2-\frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2)}=\text{minimum}$$

Powyższa zasada nakłada na ruch dwa prawa zachowania, dokładnie energii i momentu pędu, z których korzystaliśmy! To po prostu widać.

Gdy jako zmiennej niezależnej użyjemy czasu, stała musi być pochodna funkcji podcałkowej po prędkości kątowej:

$$\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\mathrm{d}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}=J$$

Gdy weźmiemy kąt dostaniemy:

$$-mc^2\int\sqrt{(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\varphi)^2-\frac{1}{c^2}\left(g_{rr}(r)(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi)^2+r^2\right)}\mathrm{d}\varphi=\text{minimum}$$

i dalej:

$$-mc^2\frac{\mathrm{d}t/\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\varphi)^2-\frac{1}{c^2}\left(g_{rr}(r)(\mathrm{d}r/\mathrm{d}\varphi)^2+r^2\right)}}=-E=-\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(g_{rr}(r)\mathrm{d}\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2\right)}}$$

A to wychodząc z tych zasad, dowiedliśmy geodezyjności samego toru.

Grawitacja wykorzystuje harmonijnie oba poznane mechanizmy. Czas biegnie różnie w różnych obszarach, a ponadto przestrzeń jest zakrzywiona.

Pole centralnosymetryczne

Zajmijmy się sytuacją fizyczną wokół ciała o symetrii sferycznej. W oczywisty sposób oczekujemy wystąpienia **jakiegoś** $g_{00}(r)$, gdyż sytuacja Pawła i Gawła, **już nie w rakietach** a na piętrze i parterze, jest bardzo podobna. Dopuścimy także wystąpienie $g_{rr}(r)$, chociaż u Pawła i Gawła w rakietach, czegoś takiego nie było. Jeśli i teraz jest niepotrzebne, wyjdzie $g_{rr}(r)=1$, ale **nie lękajcie się. Wyjdzie różne od 1.**

Jako czas świata wybieramy czas zegarów w nieskończoności. To jest region z pewnością wyróżniony, gdyż tam grawitacja znika (w poprzednim przypadku nie mieliśmy takiego wyróżnionego Pawła. Teraz jest ich legion). Przez współrzędną radialną r rozumieć będziemy wielkość równą obwodowi okręgu nieruchomego w polu grawitacyjnym dzielonemu przez 2π .

$$(\mathrm{d}s)^2 = g_{00}(r)(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2)$$

Obserwator w (niewielkiej) spadającej windzie, ma mikroświat Minkowskiego. Mierząc **zwyczajnie czas i odległość**, według przepisów SI (w metrach i sekundach) znajdzie on dla **bliskich** zdarzeń wartość **minkowskiego** interwału daną powyższym wzorem z jakimiś konkretnymi funkcjami $g_{00}(r)$ i $g_{rr}(r)$ Dowolne ciało spadające swobodnie, przelatujące przez spadającą windę, leci **po prostej tak**, by zminimalizować wkład do całki na tym terenie. Między kolejnymi zdarzeniami, oceny będzie dokonywał już inny lokalny obserwator, ale i on znajdzie zwyczajny swój minkowski interwał, równy temu, co daje powyższy wzór, już w sąsiednim punkcie. Skoro każdy wkład jest minimalny, to i suma też!

Innymi słowy, sam sens metryki jest taki, że jej minimalizacja, wyznacza ruch.

Analogia ze zwykłą przestrzenią jest zupełna. Na płaszczyźnie, prosta minimalizuje odległość, czyli $\int\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}$. Gdy użyję współrzędnych biegunowych, minimalizować muszę $\int\sqrt{\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2}$. Dostanę tę samą prostą, ale inaczej opisaną. Cząstka posłusznie będzie w swym ruchu naśladować rozwiązanie. Gdy **prawdziwe** odległości wiążą się z różniczkami inaczej, dla cząstki nadal imperatywem fizycznym jest minimalizować sumę prawdziwych odległości $\int\sqrt{g_{rr}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2}$. A w czasoprzestrzeni maksymalizuje swoje starzenie!

Szukajmy, więc, czym jest ta metryka teraz.

Mamy dwie szukane funkcje i jedno równanie zawierające $g_{rr}(r)$:

$$\frac{\mathrm{d}(r^2 g(r))}{r^2\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r} = \frac{g^2}{c^2}.$$

Trochę mało!

Ale, od czego pomysłowość.

Przecież metryka powinna pozwolić wyznaczyć przyspieszenie.

Wypuśćmy z pewnego poziomu ciało bez prędkości początkowej (jak Galileusz w Pizie). Trochę poniżej będzie:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\sqrt{g_{00}(r-\mathrm{d}r)} = mc^2\sqrt{g_{00}(r)},$$

czyli

$$1-v^2/c^2 = \frac{g_{00}(r-\mathrm{d}r)}{g_{00}(r)}$$

$$v^2/c^2 = 1-\frac{g_{00}(r-\mathrm{d}r)}{g_{00}(r)} = \frac{g_{00}(r)-g_{00}(r-\mathrm{d}r)}{g_{00}(r)} = \frac{g'_{00}(r)}{g_{00}(r)}\mathrm{d}r$$

$$v^2 = c^2\frac{g'_{00}(r)}{g_{00}(r)}\frac{1}{\sqrt{g_{rr}(r)}}\mathrm{d}l$$

Ruch trwa krótko, prędkość jest nierelatywistyczna, znany z gimnazjum wzór $v^2 = 2ax$, pozwala wypisać wartość przyspieszenia natychmiast

:

$$g = -c^2\frac{g'_{00}(r)}{2g_{00}(r)}\frac{1}{\sqrt{g_{rr}(r)}} = \frac{-c^2}{\sqrt{g_{00}(r)g_{rr}(r)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sqrt{g_{00}(r)}$$

Znak „minus” uwzględnia faktyczny zwrot przyspieszenia ku centrum. Rozdzielenie g_{00} na iloczyn dwóch pierwiastków kwadratowych i połączenie jednego z nich w iloczyn z g_{rr} ma na uwadze przyszłe przekształcenia.

.

Mamy już dwa równania. Potrzebne jest jeszcze jedno. Najpierw rzućmy ciało bez prędkości początkowej z nieskończoności. Przylatując niżej, ma automatycznie tzw. prędkość II kosmiczną:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v_{\mathrm{II}}{}^2/c^2}}\sqrt{g_{00}} = mc^2 \cdot \sqrt{g_{00}(\infty)} = mc^2$$

$$1 - v_{\mathrm{II}}{}^2/c^2 = g_{00}$$

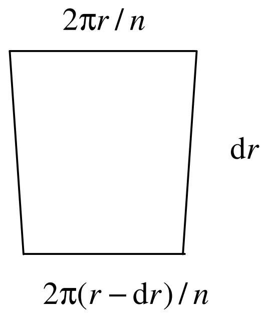
Coś zaczyna się rozjaśniać!!

Owo tajemnicze g_{00} różni się od jedynki o człon odwrotnie proporcjonalny do c^2 z kwadratem prędkości ucieczki! Nie wiemy jeszcze, ile wyjdzie ta prędkość, ale dla słabych pól musi być bliskie wartości niutonowskiej!

Związek g_{00} z czynnikiem Lorentza dla prędkości nabywanej przez „cukierek" spadający z nieskończoności nie powinien nas dziwić. To stamtąd wysłane w odstępie dt dwa bliskie zsynchronizowane zegary („cukierki"), mijają Gawła (gdzieś w głębi pola) w odstępie dt czasu współrzędnościowego, czyli $\mathrm{d}t\sqrt{g_{00}}$ czasu własnego, o którym też wiemy, że przy porównywaniu z dwoma zegarami układu inercjalnego, względem, którego Gaweł pędzi z prędkością v_{II}, będzie skrócony o czynnik: $\sqrt{1-v_{\mathrm{II}}{}^2/c^2}$. Stąd równość.

Ten czynnik Lorentza, jaki się pojawia, sugeruje, że nie tylko pomiary czasu, ale i odległości wykonywane w polu grawitacyjnym i przez spadających obserwatorów powinny się z nim wiązać.

Istotnie spuśćmy równocześnie n trapezowatych kabin z nieskończoności, równomiernie (daleko) od siebie na początku rozmieszczonych.



Gdy kabiny, rozpędzone, zetkną się[2], ich sufit i podłoga mają współrzędne r i $r - \mathrm{d}r$, a odległość (**własną**) stale dr . Spadające **małe** kabiny są w stanie nieważkości. Są doskonałym

[2] Ściany kabiny tworzą, przez konstrukcję kąt $2\pi/n$ ze sobą. Gdy sufity się zetkną, każdy z nich zajmie segment obwodu wyrażony kątem, właśnie $2\pi/n$. Ściany boczne usytuują się radialnie, a to właśnie znaczy, że zetkną się i podłogi, których łączy obwód wyniesie $2\pi(r-\mathrm{d}r)$ a to znaczy, że są one „na poziomie", czyli mają współrzędną r – d r. Położenia sufitu w r,i podłogi w r – d r mają miejsce **tej samej chwili** w inercjalnym

przykładem układu inercjalnego, w którym **nic egzotycznego się nie dzieje.** Zaczęliśmy z kabiną o wysokości dr i ciągle mamy wysokość dr. Jak to możliwe, że sufit i podłoga **koincydują** (równocześnie według zegarów kabiny) z Pawłem i Gawłem przebywającymi w miejscach r i r-d r, odległymi przecież o $\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r$?

To dzięki skróceniu Lorentza!!

$$\sqrt{g_{rr}}\mathrm{d}r\sqrt{1-v_{\mathrm{II}}{}^2/c^2} = \mathrm{d}r$$

Czyli $g_{rr}\cdot g_{00} = 1$

To piękny wynik! Przypomina jeszcze raz o związku funkcji metryki z czynnikiem Lorentza **i dla czasu i dla odległości** związanym z prędkością obserwatorów spadających z nieskończoności, gdzie wycechowali swoje zegary i swoje sztaby miernicze.

Krzywizna jest nieunikniona, jeśli w ogóle coś się ma dziać!

Teraz mamy dwa równania na dwie szukane funkcje:

$$g = -c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sqrt{g_{00}(r)}$$

$$\frac{g^2}{c^2} = \sqrt{g_{00}}\,\frac{\mathrm{d}(r^2 g(r))}{r^2\mathrm{d}r}$$

Mamy już wszystko!

Dzieląc pierwsze równanie przez $-c^2$, a drugie przez g i dodając stronami, dostajemy:

$$0 = \frac{\mathrm{d}(\sqrt{g_{00}})}{\mathrm{d}r} + \sqrt{g_{00}}\,\frac{1}{r^2 g(r)}\frac{\mathrm{d}(r^2 g(r))}{\mathrm{d}r}$$

Mnożąc teraz przez $r^2 g(r)$dr dostajemy:

$0 = r^2 g(r)\mathrm{d}(\sqrt{g_{00}}) + \sqrt{g_{00}}\,\mathrm{d}(r^2 g(r))$ (Moje ukochane adb + bda),

czyli: $r^2 g(r)\sqrt{g_{00}} = C_1$,

a po wyliczeniu g z otrzymanego związku i wstawieniu do drugiego równania, dostajemy równanie już na jedną niewiadomą funkcję g_{00}:

$$\frac{C_1}{r^2\sqrt{g_{00}(r)}} = -c^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\sqrt{g_{00}(r)} = -\frac{c^2}{2\sqrt{g_{00}(r)}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}g_{00}(r), \text{ czyli}$$

$$-\frac{2C_1}{c^2 r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}g_{00}(r)$$

układzie **obserwatora w kabinie.** Inna sprawa, że nie chciałbym siedzieć w którejś z tych kabin. Po zetknięciu będzie **wielkie bum!**

Mające oczywiste rozwiązanie[3]:

$$g_{00}(r) = C_2 + \frac{2C_1}{c^2 r}$$

W nieskończoności $g_{00}(\infty) = 1$, co pociąga za sobą $C_2 = 1$

Ostatecznie:

$$g_{00}(r) = 1 + \frac{2C_1}{c^2 r} \qquad\qquad g(r) = \frac{C_1}{r^2 \sqrt{1 + 2\frac{C_1}{c^2 r}}}$$

Dostaliśmy jednoparametrową rodzinę rozwiązań. Znak stałej C_1 jest ujemny, wygodnie jest oznaczyć $r_0 = -2C_1 / c^2$

Wtedy:

$$g(r) = -\frac{r_0 c^2 / 2}{r^2 \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}}$$

$$(\mathrm{d}s)^2 = (1 - \frac{r_0}{r})(\mathrm{d}t)^2 - \frac{1}{c^2}(\frac{\mathrm{d}r^2}{1 - \frac{r_0}{r}} + r^2 \mathrm{d}\varphi^2)$$

Mamy naszą paraboloidę z czarną dziurą! Mamy też różny bieg czasu. Funkcje, które ujmują liczbowo te efekty są wzajemnymi odwrotnościami.

Górny wzór wyraża poprawki do **statycznej** siły grawitacji, w stosunku do prawa Newtona. Nie ma ona **żadnego**[4] związku z równaniami ruchu! Ruch będziemy opisywać korzystając z zaskakującej, bo multiplikatywnej, ale uroczej postaci prawa zachowania energii, oraz prawa zachowania momentu pędu.

W dużych odległościach, przyspieszenie, z coraz lepszym przybliżeniem jest niutonowskie, powinniśmy, więc **utożsamić:**

$$r_0 c^2 / 2 = GM$$

$$r_0 = \frac{2GM}{c^2}$$

To jest słynny promień Schwartzschilda. Dla Słońca, prawie dokładnie 3km.

[3] Zdumiewające jak blisko jesteśmy Newtona! Przecież potencjał niutonowski określony jest niemal identycznym równaniem: $-Gm/r^2 = -\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}r$

[4] Poza, rzecz jasna, nierelatywistycznym przybliżeniem.

Mając rozwiązanie, sprawdźmy ile wynosi II prędkość kosmiczna:

$$1 - v_{\mathrm{II}}(r)^2 / c^2 = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}$$

$$v_{\mathrm{II}}(r)^2 = \frac{2GM}{r}$$

Istny szok! Wygląda dokładnie jak u Newtona. Co prawda, r nie jest zwyczajną odległością, ale zawsze to formuła zaskakująca.

Na horyzoncie Schwartzschilda, przyspieszenie silnika rakiety, potrzebne do utrzymania stałej wartości r osiąga nieskończoność.

Poniżej r_0 sytuacja nie jest do końca jasna. W metryce, współczynnik przy dr^2 staje się dodatni (a przy dt^2 ujemny). Zatem **czasem** staje się zmienna r. Upływu czasu już nie da się powstrzymać. Cząstka musi dotrzeć do osobliwości.

Z prawa zachowania energii widać też wyraźnie, że cząstka o dowolnej energii, osiąga prędkość c dokładnie na horyzoncie (g_{00} w liczniku się zeruje, więc i mianownik musi).

Ruch peryhelionowy i ugięcie światła.

Znaleźliśmy metrykę, ruch zawarty jest w zasadzie wariacyjnej:

$$-mc^2 \int \sqrt{g_{00}\mathrm{d}t^2 - \frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\varphi^2)} = \text{minimum}$$

Są dwie symetrie, więc i dwa prawa zachowania.

Momentu pędu:

$$\frac{mr^2\dot{\varphi}}{\sqrt{g_{00} - \frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}} = J$$

i energii:

$$\frac{mc^2 g_{00}}{\sqrt{g_{00} - \frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)}} = E$$

Dzieląc stronami dostaję:

$$\frac{r^2\dot{\varphi}}{c^2 g_{00}} = \frac{r^2\varphi'\dot{r}}{c^2 g_{00}} = \frac{J}{E}$$

Z całki energii wyliczę $\dot{r}$:

$$g_{00}-\frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)+r^2\varphi'^2)\dot{r}^2=\frac{(mc^2g_{00})^2}{E^2}\Rightarrow \dot{r}=c\frac{\sqrt{g_{00}-\frac{(mc^2g_{00})^2}{E^2}}}{\sqrt{(g_{rr}(r)+r^2\varphi'^2)}}$$

Wstawiając do poprzedniego mam:

$$\frac{r^2\varphi'}{c^2g_{00}}c\frac{\sqrt{g_{00}-\frac{(mc^2g_{00})^2}{E^2}}}{\sqrt{(g_{rr}(r)+r^2\varphi'^2)}}=\frac{J}{E}$$

A po uporządkowaniu:

$$\sqrt{\frac{1}{g_{00}(r)}-\frac{(mc^2)^2}{E^2}}\frac{r^2\varphi'}{\sqrt{(g_{rr}(r)+r^2\varphi'^2)}}=\frac{Jc}{E}$$

Mamy już tyle doświadczenia by dostrzec, iż wymagana stałość wyrażenia jest równoważna zasadzie wariacyjnej:

$$\int\sqrt{\frac{1}{g_{00}(r)}-\frac{(mc^2)^2}{E^2}}\sqrt{(g_{rr}(r)+r^2\varphi'^2)}\mathrm{d}r=$$

$$\int\sqrt{\frac{1}{g_{00}(r)}-\frac{(mc^2)^2}{E^2}}\sqrt{g_{rr}(r)\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2}=\text{minimum}$$

Jest to jakby cofanie się, bo przecież równanie orbity właśnie przed chwilą uzyskaliśmy. Ale co za piękny wynik! Ważniejszy może, niż rozwiązania!

Widzimy znów zasadę Fermata!!

Jest znana nam droga w zakrzywionej przestrzeni i jest **współczynnik załamania pola grawitacyjnego**.

Współczynnik załamania jest całkowicie zrozumiały!

Zacznijmy od światła. Współczynnik załamania upraszcza się do:

$1/\sqrt{g_{00}}$

Ale zaraz! Przecież prędkość w próżni jest niezmienna! Owszem, ale długość fali to nie tylko prędkość. O ile w zwykłej optyce, w ośrodku, gdy grawitacja nie ma żadnego znaczenia, **częstotliwość** fali jest stała w różnych miejscach, długość fali zmienia się z powodu zmiany prędkości. Dlatego współczynnik załamania kojarzy nam się ze stosunkiem prędkości w ośrodku do prędkości w próżni.

Oczekujemy, że długość drogi dzielona być powinna przez długość fali. A co to jest długość fali. To jest prędkość światła dzielona przez częstotliwość. A **teraz ta nie jest**

stała. Już parokrotnie podkreślaliśmy, że różny bieg czasu przekłada się na zmiany częstotliwości i to właśnie do $1/\sqrt{g_{00}}$ ta częstotliwość jest proporcjonalna. Cudnie!

Pięknie też jest dla cząstek z masą. Pamiętajmy, że:

$$\frac{mc^2 g_{00}}{\sqrt{g_{00}-\frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)}}=E=\sqrt{g_{00}}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}(g_{rr}(r)\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)/g_{00}}}$$

$$=\sqrt{g_{00}}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(g_{rr}(r)\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\tau}\right)^2\right)}}=\sqrt{g_{00}}\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

gdzie dla obserwatora lokalnego, energią w rozumieniu STW jest $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

To ta wielkość wiąże się z lokalnie mierzonym pędem wzorem $\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}$

Zatem $\frac{E}{\sqrt{g_{00}}}=\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\sqrt{m^2c^4+c^2p^2}$

A współczynnik załamania dla materii można przepisać w postaci:

$$\sqrt{\frac{1}{g_{00}(r)}-\frac{(mc^2)^2}{E^2}}=\frac{1}{E}\sqrt{\frac{E^2}{g_{00}(r)}-(mc^2)^2}=\frac{1}{E}cp=\frac{\hbar c/E}{\lambda}$$

Kolejna rewelacja. Fala de Broglie'a, teraz relatywistyczne!

Wyników tych, gdy się raz usłyszało, nie sposób zapomnieć.

Bez żadnego liczenia można od razu powiedzieć, że światło (ani tym bardziej inne zwykłe cząstki, może poza hipotetycznymi tachionami) nie poruszają się po geodezyjnych w przestrzeni trójwymiarowej.

Po wstawieniu g_{rr} i g_{00} do równania $\sqrt{\frac{1}{g_{00}(r)}-\frac{(mc^2)^2}{E^2}}\frac{r^2\varphi'}{\sqrt{(g_{rr}(r)+r^2\varphi'^2)}}=\frac{Jc}{E}$ po podniesieniu go do kwadratu, wzięciu odwrotności i zastąpieniu $1/\varphi'=r'$ dostaje się:

$$\frac{(r'^2+r^2)}{r^4}=(E-mc^2+\frac{GMm}{r})\frac{2m}{J^2}+\frac{2GM}{c^2r^3}+\frac{(E-mc^2)^2}{c^2J^2}$$

W porównaniu do problemu keplerowskiego doszedł jeden nowy człon, który ma taki efekt, jaki w przypadku nierelatywistycznym miałby dodatkowy potencjał spadający jak trzecia potęga odległości. Od tego momentu rachunkowa strona problemu jest tej samej kategorii co w teorii Newtona. Jest dodatkowy człon. Daje on ruch peryhelionowy orbit, którego nie powinno być (w zasadzie!) w teorii Newtona. Równanie z równym powodzeniem można zastosować do światła kładąc $m = 0$.