

## Wykład 13

Na poprzednim wykładzie wyznaczyliśmy, w ogólnym przypadku (tj. dla dowolnych warunków początkowych), tor punktu materialnego pod działaniem siły grawitacji Newtona. (Zastępując w otrzymanych wzorach, wielkość  $GMm$  przez  $\frac{-Q_1Q_2}{4\pi\epsilon_0}$ , dostałoby się automatycznie tor lekkiej cząstki o ładunku  $Q_1$  w polu elektrostatycznym innej, masywnej cząstki o ładunku  $Q_2$ .)

Przyglądając się otrzymanemu rozwiązaniu udowodniliśmy II prawo Keplera i część pierwszego. Prawdę powiedziawszy, I prawo Keplera dotyczyło planet i mówiło o elipsach. W rzeczywistości wśród wszystkich możliwych torów, oprócz eliptycznych, (z których „korzystają” planety) są jeszcze tory hiperboliczne i, dla bardzo szczególnej prędkości początkowej, tor paraboliczny. O torach nieograniczonych Kepler się nie wypowiadał, on badał tylko tory 6 znanych mu planet.

Do udowodnienia całego I prawa Keplera, pozostało nam wykazać, że ogniska znalezionych elips leżą rzeczywiście w centrum siły.

Przypomnę, że główny wynik dla ruchu pod wpływem siły Newtona zawiera się w dwóch wektorowych prawach zachowania:

$$\vec{r} \times \vec{v} = \vec{J} / m,$$

$$\vec{v} \times \vec{J} - GMm \cdot \vec{n} = \vec{C}.$$

Te 6 równań algebraicznych nie jest niezależne, bo iloczyn skalarny lewych stron jest zerem, więc  $\vec{C}$  musi być prostopadłe do  $\vec{J}$ . Ustalając jedną z wielkości, np. kąt azymutalny  $\varphi$ , można owe 5 równań na pozostałe 5 wielkości rozwiązać i wyrazić je w funkcji tego kąta.

Po algebraicznym wyeliminowaniu prędkości, dostaje się:

$$J^2 = GMm^2 r + m\vec{r} \cdot \vec{C} = mr(GMm + C \cos \varphi)$$

czyli<sup>1</sup>:

$$r = \frac{J^2 / GMm^2}{1 + (C / GMm) \cos \varphi} \equiv \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi}$$

---

<sup>1</sup> Łatwo wyznaczyć też pozostałe 4 wielkości:  $z=0$ , oraz wektor prędkości:  $\vec{v} = \vec{J} \times (\vec{C} + GMm \frac{\vec{r}}{r}) / J^2$ .

Zbiór wektorów prędkości, zwany hodografem, jest okręgiem o przesuniętym środku. Stałą wartość, dla dowolnej orbity, ma wektor:  $\vec{v} - \vec{J} \times \vec{C}$ .

Jest to równanie we współrzędnych biegunowych. Kąt  $\varphi$  mierzony jest od kierunku wektora  $\vec{C}$ , a dla  $\varphi=0$  mianownik jest najmniejszy, zaś promień  $r$  najmniejszy. Wektor  $\vec{C}$  jest, więc, skierowany od centrum do perihelium. Od tegoż perihelium mierzony jest kąt w ostatnim wzorze.

$$r + \varepsilon r \cos \varphi = p$$

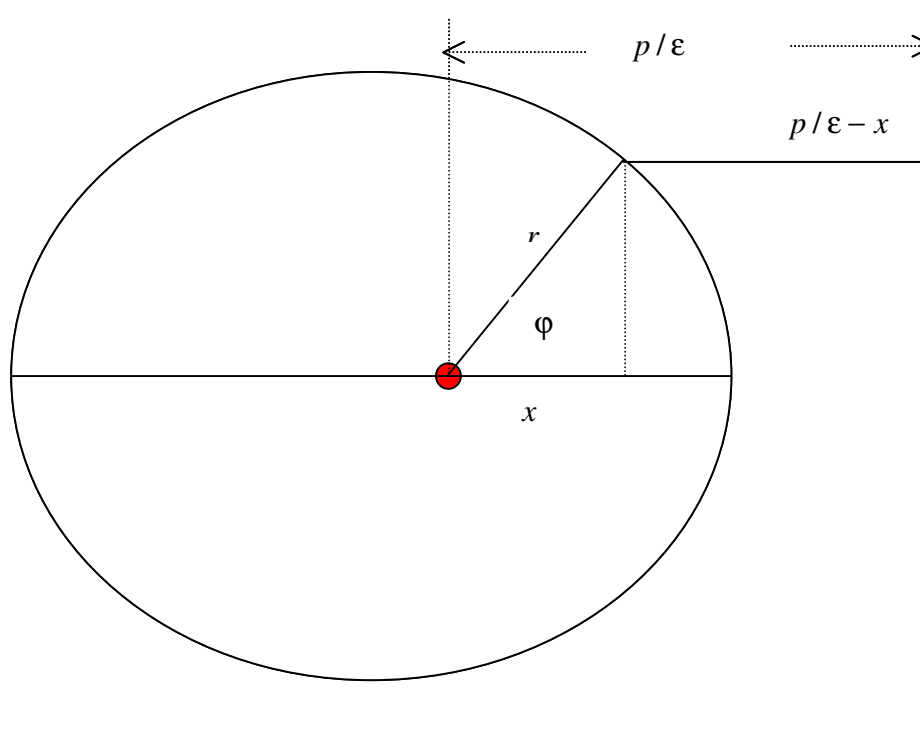
$$r = p - \varepsilon x$$

$$x^2 + y^2 = (p - \varepsilon x)^2 = p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$$

$$(1 - \varepsilon^2) \left( x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + y^2 = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}$$

$$\frac{\left( x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \right)^2}{\left( \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2} + \frac{(y)^2}{\left( \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \right)^2} = 1$$

By móc powiedzieć: „oto udowodniłem, że tor jest elipsą”, trzeba wiedzieć, co to jest elipsa! Istnieje wiele równoważnych definicji, przyjmijmy, iż dla nas elipsą jest takie właśnie „spłaszczone” koło.



Ale co z tym ogniskiem? No cóż! Jedna z definicji ogniska mówi, że to taki punkt na dużej osi elipsy, że odległość od każdego punktu na elipsie do tego punktu, jest w stałej proporcji do odległości od pewnej prostej, zwanej kierownicą („Elipsa jest miejscem geometrycznym punktów takich, że stosunek, zwany mimośrodem, odległości do stałego

punktu zwanego ogniskiem i odległości do ustalonej prostej, zwanej kierownicą, jest stały”).

$$r/(p/\varepsilon - x) = \varepsilon. \text{ A to jest właśnie nasze równanie! } r = p - \varepsilon x = p - \varepsilon r \cos \varphi$$

Półosie naszej elipsy wynoszą:

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}$$

Końce dłuższej osi leżą w punktach  $x_p = r_p = p/(1 + \varepsilon)$ ,  $x_A = -r_A = -p/(1 - \varepsilon)$ .

Środek ma współrzędną będącą średnią arytmetyczną, czyli

$$x_s = (p/(1 + \varepsilon) - p/(1 - \varepsilon))/2 = -\varepsilon \frac{p}{1 - \varepsilon^2} = -\varepsilon a$$

Słowo mimośród kojarzy się z punktem **obok** środka okręgu.

Otóż warto zwrócić uwagę, jak wygląda sytuacja dla małych wartości  $\varepsilon$ . Np. Ziemia ma mimośród równy 0,0167. Mimośród Jowisza to 0,0484.

Wartość mimośrodu wyznacza wprost zmianę odległości planety w położeniach skrajnych. Raz odległość (od Słońca) wynosi  $p/(1 + \varepsilon)$  drugi raz  $p/(1 - \varepsilon)$ . Różnica tych odległości to  $2\varepsilon a$ . Dla Ziemi to 3% średniej odległości, dla Jowisza 9%. Takie różnice dostrzegali już starożytni, posługującymi się prostymi, bezsoczewkowymi przyrządami.

A jak wygląda różnica odległości planety od środka elipsy? To różnica między  $a$ , a

$$b. \text{ Ale } b = \sqrt{1 - \varepsilon^2} a \approx a - \frac{\varepsilon^2}{2} a.$$

Zamiast  $2\varepsilon a$  mamy teraz  $\frac{\varepsilon^2}{2} a$ . To **kolosalna** różnica. 3% można było dostrzec, ale

$0,0167^2 / 2 \approx 0,00015$ , czyli 0,015% **było poza zasięgiem**. Ta niezwykle mało zdeformowana elipsa wygląda jak, niemal idealne **koło!!!!**

Dlatego **biedny i nieszczęśliwy Kopernik**, unieruchamiając Słońce, nie mógł umieścić środka orbity Ziemi (nie budzącej podejrzeń, że nie jest okręgiem) w Słońcu!!! Tym bardziej było to wyraźne dla Jowisza. Środek orbity Ziemi lokował Kopernik w odległości 2,7 promieni Słonecznych od jego środka, a środek orbity Jowisza w punkcie bliskim orbity Mercuriego. To wyglądało na zupełny nonsens. Każda planeta miała środek swej „kołowej” orbity zupełnie gdzie indziej.

Okrąg ma tylko jeden wyróżniony punkt. Gdy jedyne wyróżnione ciała Układu Słonecznego nie można tam umieścić, to głowa boli. Słońce było umieszczone **mimośrodkowo**, obok środka domniemanego okręgu.

Już odkrycie przez Keplera, że orbity są elipsami, stanowi szalony postęp, o charakterze nie tylko estetycznym, a wręcz fundamentalnym. Elipsa ma i środek i ognisko (a nawet dwa). Nagle okazało się, że ogniska **wszystkich** planet są wspólne i wypadają idealnie w środku Słońca! To był prawdziwy przełom w pojmowaniu Nieba.

I na koniec trzecie prawo. Pole elipsy wynosi  $\pi ab$ . Prędkość połowa związana jest z momentem pędu i wynosi  $J/2m$ . Zatem okres obiegu wynosi  $T = 2\pi abm/J$ . Podnosimy do kwadratu i korzystamy z tego, iż  $b^2 = a^2(1 - \epsilon^2)$

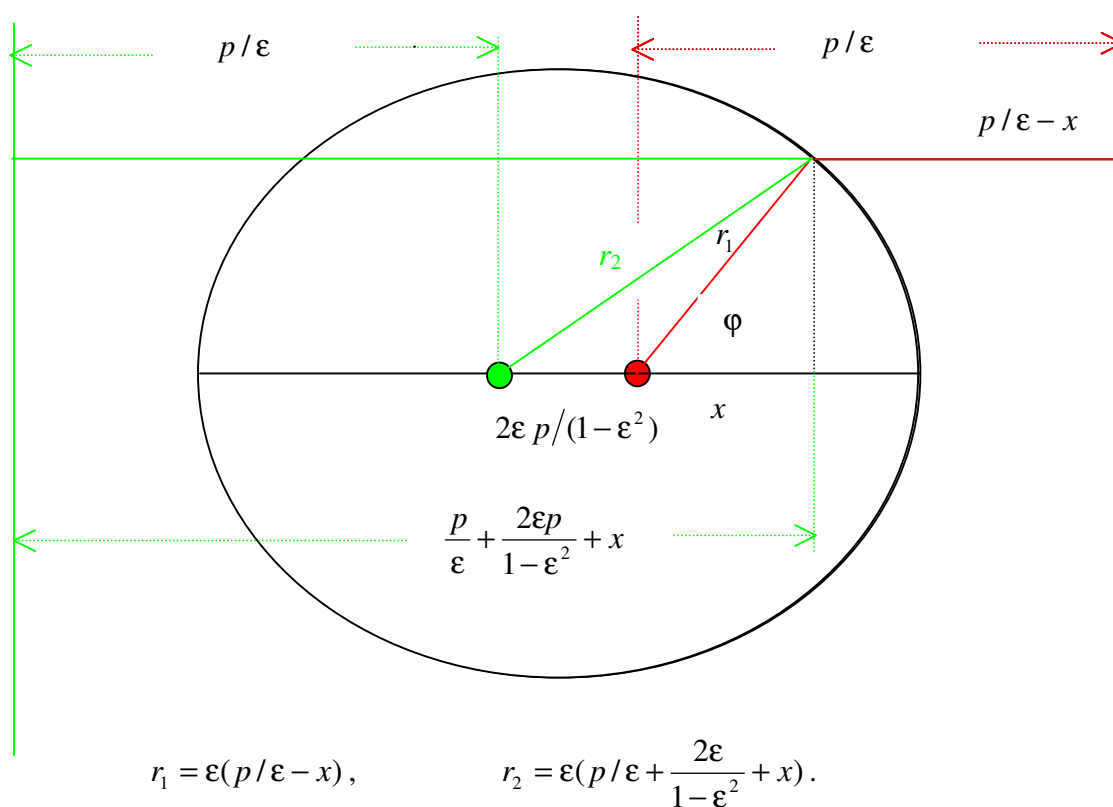
$$T^2 = 4\pi^2 a^4 (1 - \epsilon^2) m^2 / J^2 = 4\pi^2 a^3 (a(1 - \epsilon^2) m^2 / J^2)$$

Ale  $a = \frac{p}{1 - \epsilon^2}$ , czyli  $a(1 - \epsilon^2) = p = J^2 / GMm^2$ ,

czyli,  $a(1 - \epsilon^2) m^2 / J^2 = 1/GM$  więc:

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 / GM$$

Powszechnie znana jest inna właściwość elipsy: stałość sumy odległości do ognisk.



W sumie współrzędna  $x$  się skraca, więc  $r_1 + r_2 = \text{const} = 2p + 2\epsilon^2 / 1 - \epsilon^2 = 2p / 1 - \epsilon^2 = 2a$ .

W rozmowie na przerwie w czwartek, spotkałem się z pewnym zdziwieniem, dlaczego tu nie mówi się o energii. Jak widać, nie było takiej konieczności, ale energią warto się zająć z rozmaitych powodów.

Na razie obliczmy:

$$C^2 = (\vec{v} \times \vec{J} - GMm \cdot \vec{n}) \cdot (\vec{v} \times \vec{J} - GMm \cdot \vec{n}) = G^2 M^2 m^2 + v^2 J^2 - 2GMm \cdot \vec{n} \cdot (\vec{v} \times \vec{J}).$$

Ostatni człon to iloczyn mieszany, który można przekształcić w sposób następujący:

$$\vec{n} \cdot (\vec{v} \times \vec{J}) = \vec{J} \cdot (\vec{n} \times \vec{v}) = \frac{1}{mr} \vec{J} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = J^2 / mr$$

$$\text{Ostatecznie: } C^2 = G^2 M^2 m^2 + v^2 J^2 - 2GMm \cdot J^2 / mr = G^2 M^2 m^2 + \frac{2J^2}{m} \left( m \frac{v^2}{2} - \frac{GMm}{r} \right)$$

Wyrażenie w nawiasie, rozpoznawalne jest jako całkowita energia cząstki (suma kinetycznej i potencjalnej). W oczywisty sposób, jako wyrażająca się przez stałe  $C^2$  i  $J^2$ , jest też stała, choć za jej stałością przemawiają i inne, prostsze argumenty.

Dla dalszych zastosowań, szczególnie w obszarze atomowym, wygodnie jest wyrazić parametry orbity przez  $J$  oraz  $E$ . Wygodniej też będzie zastąpić współczynnik  $GMm = \kappa$ .

$$C^2 = \kappa^2 + \frac{2J^2}{m} E; \quad r = \frac{J^2 / GMm^2}{1 + (C / GMm) \cos \varphi} \equiv \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}; \quad T^2 = 4\pi^2 a^3 / GM$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2J^2}{\kappa^2 m} E},$$

$$a = \frac{J^2}{\kappa m} \frac{1}{1 - \varepsilon^2} = -\frac{J^2}{\kappa m} : \frac{2J^2}{\kappa^2 m} E = -\kappa / 2E \text{ czyli:}$$

$$E = -\frac{\kappa}{2a}$$

$$T = 2\pi \sqrt{m \kappa^3 / (8E^3)} / \kappa = \pi \kappa \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$$

Zależność energii wyłącznie od dużej półosi i zależność okresu jedynie od dużej półosi, oznacza też zależność okresu jedynie od energii, a nie od momentu pędu. Ta własność potencjału Coulomba powoduje w mechanice kwantowej degenerację poziomów o różnych wartościach momentu pędu.

Mając zależność energii od okresu obiegu, trudno nie wspomnieć o pomysłach Bohra z okresu przed odkryciem równania Schroedingera, próbującego pogodzić oczekiwanie, iż częstotliwość światła powinna być równa odwrotności okresu obiegu ładunku, z twardym faktem, że światło emitowane jest porcjami, zaś elektron w tym czasie przechodzi między orbitami o dwóch różnych energiach. Konflikt słabnie, gdy przejście następuje między dwoma sąsiednimi, mało różniącymi się orbitami.

$$E_{n+1} - E_n = h/T(E)$$

Jeśli pytamy o wartość energii jako funkcji  $n$ , to różnica po lewej stronie jest po prostu pochodną po  $n$ !

$$\frac{dE(n)}{dn} = \frac{h}{T(E)} = \frac{h}{\pi\kappa} \sqrt{\frac{2}{m}} (-E)^{3/2}$$

To jest typ równania, które dobrze znamy.

$$n = \frac{\pi\kappa}{h} \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dE}{(-E)^{3/2}} = \frac{\pi\kappa}{h} \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{2}{(-E)^{1/2}}$$

$$E = -\frac{m\kappa^2}{(h/2\pi)^2} \cdot \frac{1}{2n^2}$$

Wzór powyższy, okazał się znakomicie zgodny z empirycznym wzorem Balmera i to nie tylko w samym charakterze zależności od  $n$ , ale i współczynnikiem, tzw. stałą Rydberga.

Ruch w polu centralnym wykazującym odstępstwo od zależności kwadratowej (albo w zupełnie innym polu sił), można zbadać analitycznie, właśnie z wykorzystaniem prawa zachowania energii.

Warto w tym miejscu powiedzieć coś więcej o całce (stałej ruchu) energii w równaniach Newtona. Powoływałem się już parę razy na związek:

$$dT = \frac{d\vec{p}}{dt} d\vec{r} \equiv \vec{F} d\vec{r}$$

słuszny dla każdej prędkości (a więc i bliskiej prędkości światła). Gdy problem jest **jednowymiarowy**, wystarczy, by siła zależała **wyłącznie od położenia**, a istnienie potencjału<sup>2</sup> siły jest zagwarantowane. Potencjałem tym jest, wzięta ze znakiem minus, **funkcja pierwotna**, taka, że

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Przy takim oznaczeniu **praca** danej siły nad cząstką, na odcinku  $dx$  równa się (minus) przyrostowi  $U$  i mamy:

$$dT = Fdx = -dU$$

a w efekcie stałość **sumy**  $T + U$ .

<sup>2</sup> W fizyce szkolnej słowo „potencjał” zarezerwowane jest właściwie wyłącznie dla potencjału pola elektrycznego. Jest to taka funkcja położenia, że jej pochodna, ze znakiem minus, daje wartość natężenia pola elektrycznego. Aby otrzymać **energię potencjalną** ładunku w takim polu, należy potencjał pola pomnożyć przez ładunek cząstki. Potencjał taki mierzony jest w woltach.

W rzeczywistości wiele pól fizycznych, np. pole prędkości cieczy, pole gęstości prądu w ośrodku przewodzącym, itp., może, (ale nie musi) dać się wyrazić jako pochodna pewnej funkcji. O polu takim mówimy, że jest **potencjalne**, a ową funkcję nazywamy potencjałem, np. potencjał pola prędkości. Taki potencjał jest użytecznym pojęciem, ale z energią żadnego związku mieć nie musi.

Potencjał siły **jest** zarazem energią potencjalną cząstki podlegającej tej sile. Dlatego określenie potencjał siły jest poprawne. Omawiając takie pojęcie przez jakiś czas, uprawnione jest nazywanie tej wielkości, po prostu potencjałem, bez powtarzania za każdym razem „potencjał siły”.

Funkcje pierwotne dla danej funkcji mogą się różnić o dowolną stałą, dlatego i potencjał siły ma w sobie pewną dowolność. Nie zmienia to użyteczności prawa zachowania:

$T(1) + U(1) = T(2) + U(2)$ , które można też zapisać jako:

$$T(2) - T(1) = U(1) - U(2)$$

bo wstawienie nowej funkcji  $U' = U + C$  do powyższego równania w niczym go nie zmienia. Różnica nowego potencjału jest przecież identyczna z różnicą starego.

W trzech wymiarach problem potencjału siły nabiera pewnej subtelności. Okazuje się, że nie wystarcza, by **wektor siły** zależał wyłącznie od (wektora) położenia, by praca siły dała się zapisać jako przyrost jakiejś funkcji.

Zamiast wielkiej teorii, weźmy przykład:

$$F_x = y,$$

$$F_y = -x$$

Przy poruszaniu się **równoległym** do osi x-ów ( $y$  ma wtedy stałą wartość), wydaje się, że ze znalezieniem potencjału nie ma problemu. Siła jest stała  $= y$ . Funkcja

$$U = -Fx + C = -yx + C_y(y)$$

„produkuje” siłę  $y$ , gdy się oblicza jej pochodną po  $x$ . Stała  $C$  może być różna na różnych prostych równoległych, czyli może być funkcją  $y$ .

Identyczne rozumowanie z zamianą kierunków nakazywało by nam wybrać za potencjał funkcję

$$U = +xy + C_x(x)$$

Nie jest jednak możliwe, by

$$+xy + C_x(x) = -xy + C_y(y)$$

Gdyby pole sił było

$$F_x = -x,$$

$$F_y = -y$$

Nie mielibyśmy żadnego kłopotu! Wszak to oscylator harmoniczny.

Potencjał  $U = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  jest OK.

Również pole sił:

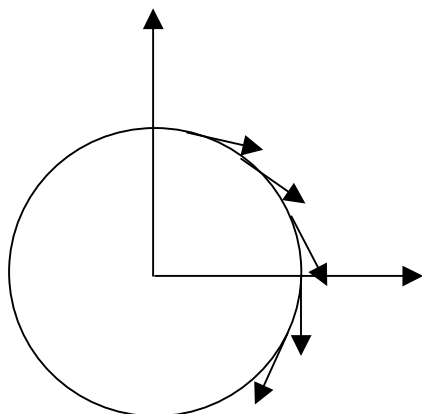
$$F_x = y,$$

$$F_y = x$$

nie nastęrcza trudności. Potencjał  $U = -xy$  pozwala poprawnie obliczyć obie składowe siły.

Jest rzeczą jasną, że sumując prace na kolejnych odcinkach w potencjalnym polu sił, czyli takim, którego praca na małym odcinku jest różnicą wartości potencjału między tymi punktami, dostaje się w wyniku różnicę potencjału między punktem wyjściowym, a końcowym. Gdy krzywa się zamyka, punkt końcowy pokrywa się z początkowym i różnica **znika**. Zatem praca po zamkniętym konturze w polu potencjalnym jest równa zeru.

Pole  $F_x = \frac{1}{2}y$ ,  $\frac{1}{2}F_y = -x$ , pokazane na rysunku jest wszędzie prostopadłe do wektora wodzącego punktu przestrzeni. O tym, że praca takiego pola wzdłuż pokazanego okręgu jest różna od zera nikogo nie trzeba przekonywać.



Pole sferycznie symetryczne, a więc takie, w którym wektor siły jest skierowany do (lub od) ustalonego centrum, i którego wartość jest **funkcją tylko odległości od centrum** jest polem potencjalnym.

Wynika to z prostych argumentów.

$$2rdr = dr^2 = d(\vec{r} \cdot \vec{r}) = d(x^2 + y^2 + z^2) = 2(xdx + ydy + zdz) = 2\vec{r} \cdot d\vec{r} \text{ czyli}$$

$$\frac{\vec{r} \cdot d\vec{r}}{r} = dr$$

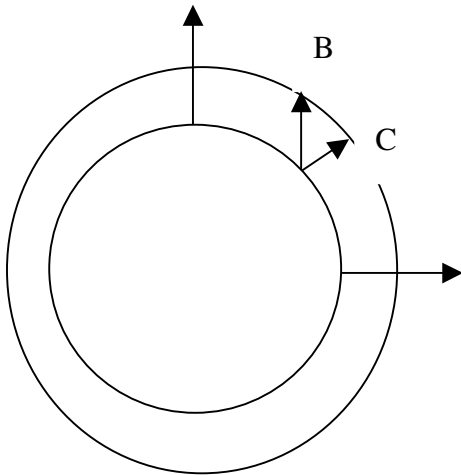
Zbadajmy pracę siły centralnosymetrycznej.

$$F(r) \frac{\vec{r}}{r} d\vec{r} = F(r) dr = -dU(r)$$

Matematycznie problem potencjału jest identyczny jak w przypadku jednowymiarowym. Funkcja pierwotna, funkcji jednej zmiennej  $r$ , taka, że  $-U'(r) = F(r)$  jest potencjałem danej siły.



Argumentując poglądowo, przy przesunięciu oddalającym punkt od środka, wykonana praca, to iloczyn siły i **przesunięcia radialnego**.



Mimo dłuższej drogi, praca od A do B jest identyczna jak od A do C. Wracając z B do A okrężną drogą przez C, oddamy całą pracę wykonaną od A do B.

Dla pola sił Newtona potencjałem jest odwrotność pierwszej potęgi:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

Różniczkowanie odwrotności daje znak minus, drugi minus jest w definicji potencjału. Siła otrzymana z powyższego potencjału jest skierowana przeciwnie niż promień, czyli jest siłą przyciągającą.

W elektrostatyce znak minus występuje w potencjale przyciągania elektronów i jądra atomowego. Dla cząstek alfa i jąder atomowych występuje znak +.

Dalszy postęp w rozwiązywaniu problemu ruchu, w takim, jak i innych polach sferycznie symetrycznych, wymaga użycia współrzędnych biegunowych w płaszczyźnie ruchu.

Ale o tym już na następnym wykładzie.