## Wykład 20

## Zagadnienie wielu ciał.

Specyficzne własności środka masy i sił wzajemnych centralnych, pozwalają na udowodnienie dwóch użytecznych twierdzeń dla układu punktów materialnych poddanych działaniu sił zewnętrznych i wewnętrznych. W problemie tzw. dwóch ciał, rozpatrzonym na poprzednim wykładzie, jedynymi siłami były siły wewnętrzne.

Jeśli punktów jest wiele, *N*, a ponadto działają siły zewnętrzne, równania Newtona zapiszemy tak:

$$m_i\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_j \vec{F}_{ij} \qquad \text{dla } i = 1,2,3....,N.$$

Siła $\vec{F}_i$, to siła zewnętrzna działająca na ciało o numerze *i*, a siła $\vec{F}_{ij}$, to siła wewnętrzna, działająca na ciało o numerze *i* ze strony ciała o numerze *n*należącego do rozpatrywanego układu. O siłach zewnętrznych nie zakładamy nic szczególnego, siły wewnętrzne spełniają, z założenia, „prawo akcji i reakcji":

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}.$$

Zakładamy ponadto centralność sił wewnetrznych:

$$\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Przy tych założeniach sumujemy wszystkie równania Newtona:

$$\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i + \sum_{j,i} \vec{F}_{ij}$$

Z definicji środka masy:

$$\sum_i m_i\vec{r}_i = \vec{R}\sum_i m_i = M\vec{R}$$

gdzie oznaczyliśmy przez *M* masę całkowitą układu, wynika, że

$$\sum_i m_i\ddot{\vec{r}}_i = M\ddot{\vec{R}}$$

W podwójnej sumie, oprócz składnika, np. $\vec{F}_{12}$, który pojawił się, w równaniu ciała pierwszego (obok $N-2$ pozostałych sił) wystąpi też, z konieczności, składnik $\vec{F}_{21}$ pojawiający się w równaniu ciała 2 (tez obok $N-2$ innych składników). W sumie prawych stron wszystkich równań, takie pary unicestwiają się wzajemnie.

Ostatecznie

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i$$

**Środek masy ciała porusza się tak, jak punkt materialny o masie *M*, pod działaniem siły, będącej sumą wszystkich sił działających na to ciało.**

Powyższe twierdzenie wyjaśnia, dlaczego ruchy odpowiednio małych ciał (albo ruchy postępowe ciał dowolnych rozmiarów) traktujemy w mechanice identycznie jak ruchy punktów materialnych. Przecież nawet „małe” ciała – rozmaite klocki, czy kulki składają się z bilionów bilionów atomów, a przykładane siły, a to działają na wszystkie składniki (grawitacja), a to na mały wybrany obszar powierzchni, gdzie przyspawany jest haczyk, a to na całą powierzchnię (jak siły elektryczne na naładowany przewodnik).

Dla ruchu środka kuleczki liczy się tylko suma sił.

**Żadne punkty przyłożenia się tu nie liczą!!!**

Tzw. „punkt przyłożenia”, jakiś wymysł niedowarzonych dydaktyków **nie jest istotą wektora.** Tak jak nie jest istotą pieniądza, kto go dostał! (Choć i to jest ważna informacja!).

W przypadku niewystępowania sił zewnętrznych, powyższe twierdzenie redukuje się do stwierdzenia, iż środek masy porusza się ruchem jednostajnym prostoliniowym. Oznacza to istnienie **dwóch wektorowych** praw zachowania! Prawa te to:

$$\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{P} = \text{constans}$$

$$\frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r} - t\frac{1}{M}\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \vec{R}_0 = \text{constans} \qquad \sum m_i \dot{\vec{r}}_i = M\dot{\vec{R}}$$

W szczególności, jeśli układ ma pęd zero, to położenia jego środka masy jest stałe, i nie można bo zmienić żadnymi działaniami wewnętrznymi. (Baron Münchausen mógł wyciągnąć się z bagna za własne włosy, jedynie w literaturze).

Drugie ważne i ogólne twierdzenie wynikające z założonych własności sił wewnętrznych, to prawo zmian **całkowitego momentu pędu**.

Tym razem, przed wysumowaniem, mnożymy stronami równania Newtona wektorowo przez wektory wodzące:

$$\vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_j \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

Lewą stronę można zastąpić przez

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i,$$

gdyż:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \cancel{\dot{\vec{r}}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i} + \vec{r}_i \times m_i \ddot{\vec{r}}$$ (wektory równoległe dają iloczyn wektorowy zero).

Otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{i\,j} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}$$

W podwójnej sumie, obok każdego członu o ustalonych wartościach $i$ i $j$, np. 1 i 2 wystąpi dokładnie jeden raz człon z indeksami zamienionymi 2 i 1. Ich suma:

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = \vec{r}_{12} \times \vec{F}_{12} = 0$$

wynosi zero, bo siła $\vec{F}_{12}$ jest **równoległa** do wektora $\vec{r}_{12}$. W ten sposób, parami, wkłady od sił wewnętrznych do zmian momentu pędu całkowitego się znoszą. Zostaje tylko wkład sił zewnętrznych.

Oznaczając całkowity moment pędu układu literą $J$, a całkowity moment sił zewnętrznych literą $N$:

$$\vec{J} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i \qquad \vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

dostajemy piękne, ważne i użyteczne prawo:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{J} = \vec{N}\,.$$

Prawo powyższe jest szczególnie cenne w przypadku układu punktów materialnych, których potencjały sił wewnętrznych mają głębokie minima wyznaczające, praktycznie niezmienne odległości miedzy wszystkimi składnikami.

O układzie takim mówimy jako o **bryle sztywnej.** Żeby mówić jak bryła się porusza, trzeba najpierw zrozumieć, jakie wielkości opisują kompletnie położenie takiej bryły.

Warto wyróżnić dwa przypadki:

- bryłę swobodną
- bryłę z unieruchomionym jednym punktem.

W tym drugim przypadku „położenie" bryły, czy może lepiej powiedzieć, jej konfigurację, można opisywać wybierając najpierw w bryle trzy prostopadłe osi (wychodzące z punktu zamocowania), a potem zastanawiając się ile i jakich liczb trzeba podać, by położenie tych osi w przestrzeni opisać.

Okazuje się, że trzeba trzy liczby. Można to łatwo uzasadnić. Oś $z$-ów związana z bryłą może przyjąć dowolny kierunek. Ten określa się tak, jak w geografii lub astronomii: dwa kąty długość i szerokość geograficzna, albo azymut i wysokość. Gdy oś $z$-ów jest opisana, bryłę można jeszcze obracać wokół tej osi o dowolny kąt. Można go określić jako kąt między osią $y$ a krawędzią przecięcia płaszczyzny $x,y$ bryły a płaszczyzną $xy$ ustalonego układu inercjalnego. Krawędź ta, w różnych kontekstach nazywa się linią węzłów. Np. płaszczyzna Równika przecina płaszczyznę Ekliptyki od punktu równonocy wiosennej do jesiennej.

Wektorowe prawo zmian momentu pędu jest **akurat** wystarczające, by pełnić rolę trzech równań drugiego rzędu dla wyznaczenia (po podaniu warunków początkowych) kompletnego opisu orientacji bryły w dowolnej chwili późniejszej. Prawo zmian pędu nie jest potrzebne do wyznaczenia ruchu. Gdy punkt zamocowania nie pokrywa się ze środkiem masy, ten w czasie obrotu wiruje tak, jak równania dla obrotów mu to wyznaczyły. Prawo zmian pędu, pozwala w tym wypadku wyznaczyć (przez odjęcie sił przyłożonych od iloczynu masy i przyspieszenia) **siłę reakcji** tej mechanicznej konstrukcji unieruchamiającej wybrany punkt.

W przypadku bryły swobodnej, osi układu związanego z bryłą lokujemy zawsze w środku masy. Znając sumę sił zewnętrznych (o ile one występują) wyznaczamy ruch środka masy, a następnie wprowadzamy układ (nieinercjalny) związany ze środkiem masy.

W układzie tym pojawią się wprawdzie siły bezwładności, ale moment sił bezwładności względem środka masy jest równy zero! ( $\vec{N} = -\sum_i \vec{r}_i \times m_i\vec{a} = \vec{a} \times \sum_i m_i\vec{r}_i = M\vec{a} \times \vec{0}$, gdyż wektor środka masy w układzie środka masy jest 0. Jest to przecież wektor wodzący początku układu!). Dlatego problem sprowadza się do poprzedniego, jakby z unieruchomionym środkiem masy.

Dużo prostszy od ruchu jest problem wyznaczenia równowagi bryły. Sprawa jest oczywista. W równowadze moment pędu jest zero. W równowadze pęd jest zero.

**Warunkiem równowagi bryły sztywnej jest znikanie sumy sił przyłożonych i sumy momentów sił przyłożonych.**

Tu się wyjaśnia, dlaczego w szeregu podręczników wprowadza się jakieś reguły przesuwania punktów zaczepienia, etc. Chodzi o zastępowanie sił przyłożonych do pewnych punktów, siłami przyłożonymi do innych punktów tej samej bryły sztywnej tak, by ta nowa siła dawała **ten sam wkład do całkowitej siły i do całkowitego momentu**. Wtedy z punktu widzenia zapewnienia równowagi takie zastępstwo jest dopuszczalne. Gdy bryła nie jest sztywna, takie „zastępstwo" może być nonsensem. Aby zachować równowagę, siadamy na krześle. Działają na nas ze strony krzesła siły rozłożone na sporej powierzchni, będące w równowadze z siłami ciężkości. Matematycznie można policzyć gdzie przyłożyć i jaka siła jest niby potrzebna, dla zastąpienia stołka sterczącą szpilą na której powinniśmy usiąść. Zgodzimy się?

Na razie w prawie zmian momentu pędu występuje **mnóstwo** położeń wszystkich punktów. Jeśli to bryła jednego mola materii, to atomów jest prawie bilion bilionów!

Droga do trzech niezbędnych wielkości jest dosyć długa. Będziecie mieli czas ją poznać na mechanice teoretycznej. Tutaj pokrótce omówimy **nieskończenie prostszy** przypadek obrotów wokół jednej ustalonej osi.

Orientację bryły określa w tym wypadku jeden kąt. Łatwo jest uzyskać związek szybkości zmian tego kąta z jedną składową momentu pędu, a to już wystarczy do wyznaczenia ruchu obrotowego.Wszystkie punkty bryły obracają się w płaszczyznach prostopadłych do osi obrotu, którą utożsamiamy z osią $z$. Sytuacje tę już rozpatrywaliśmy przy okazji siły Coriolisa. Opisuje ją wektor prędkości kątowej skierowany wzdłuż osi obrotu. Prędkość każdego punktu bryły o wektorze wodzącym $\vec{r}_i$ dana jest iloczynem wektorowym:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

Moment pędu, z definicji:

$$\vec{J} = \sum \vec{r}_i \times m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \vec{\omega} \sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \cdot - \sum m_i \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i) =$$
$$= \vec{\omega} \sum m_i \vec{r}_i \cdot \vec{r}_i \cdot - \omega \sum m_i z_i \vec{r}_i = (-\omega \sum m_i z_i x_i, -\omega \sum m_i z_i y_i, \omega \sum m_i (x_i^2 + y_i^2))$$

ma, jak widzimy, w ogólności, trzy składowe. **Moment pędu nie jest, na ogół równoległy do prędkości kątowej.** To jeden z powodów komplikacji sytuacji ogólnej.

Zauważmy, że obracając bryłę zmieniamy moment pędu, nawet, gdy obrót jest jednostajny! Jest to spowodowane tym, że sumy: $\sum m_i z_i x_i$ oraz $\sum m_i z_i y_i$ , o ile nie są stale równe zero, zmieniają się **na ogół** wraz z obrotem, bo zmieniają się w przestrzeni współrzędne punktów bryły $x_i$ i $y_i$. Zmiany składowych $x$-owych i $y$-kowych momentu pędu wymagają momentu siły. W razie potrzeby dostarczy ich sztywność zamocowania wymuszająca, zgodnie z założeniem, ruch tylko wokół zadanej osi. Łożyska ciężko pracują. Dlatego, gdy obracająca się część maszyny jest źle wyważona, mogą powstać duże siły niszczące. Oczywiście owo dobre wyważenie polega na zadbaniu, by sumy $\sum m_i z_i x_i$ oraz $\sum m_i z_i y_i$ były równe zeru. Tak zawsze będzie, gdy oś $z$ pokrywać się będzie z osią symetrii bryły, choć nie jest to warunek konieczny[1].

Jedynie $\sum m_i(x_i^2 + y_i^2)$ jest inwariantem obrotu wokół osi $z$. Wielkość tę nazywa się momentem bezwładności (w płaszczyźnie $x,y$, czyli wokół osi $z$).

$$B = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2).$$

Mamy ostatecznie:

$$J_z = B\omega$$

Jeśli określimy kąt obrotu, mierzony od wybranego położenia, to:

$$J_z = B\dot{\varphi}$$

Jeśli znamy zależność momentu siły od kąta, mamy równanie ruchu:

$$\dot{J}_z = B\ddot{\varphi} = N_z(\varphi)$$

Wirująca bryła ma energię kinetyczną zależną od prędkości kątowej. Dla rozpatrywanego przypadku ruchu wokół ustalonej osi, energie tę łatwo wyrazić przez ten sam moment bezwładności, przez który przed chwilą wyraziliśmy moment pędu:

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i\dot{\vec{r}}_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\sum m_i(x_i^2 + y_i^2) = \frac{1}{2}B\omega^2$$

Przejście od kwadratu iloczynu wektorowego: $(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2$ do $\omega^2(x_i^2 + y_i^2)$ można uzasadnić na różne oczywiste sposoby. Np.:

$$(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 = (\omega\vec{k}\times(z\vec{k} + x\vec{i} + y\vec{j}))^2 = \omega^2(x\vec{k}\times\vec{i} + y\vec{k}\times\vec{j})^2 = \omega^2(x\vec{j} - y\vec{i})^2 = \omega^2(x^2 + y^2)$$

Często mówi się o analogii prawa ruchu postępowego i obrotowego wymieniając:

Odpowiednikiem położenia jest kąt. Prędkości, prędkość kątowa. Masy, moment bezwładności. Przyspieszenia, przyspieszenie kątowe. Siły, moment siły. Odpowiednikiem prawa zachowania pędu, prawo zachowania momentu pędu. Odpowiednikiem wzoru $mv^2/2$ wzór $B\omega^2/2$. Dużo jest w tym prawdy!

Ale jest jedna subtelna różnica!!

W ruchu postępowym jest jeszcze prawo zachowania położenia początkowego środka masy. Niektórzy mylą to z prawem zachowania pędu. Myślą, że to jest tego konsekwencja.

Jeżeli będę chodził wzdłuż łódki, do przodu i do tyłu. Także po łuku od rufy do dzioba, środek łódki będzie się przemieszczał, a (abstrakcyjny środek masy będzie stał). Jeśli jednak po serii przemieszczeń wrócę na stare miejsce **na łódce**, środek łódki też wróci na swoje

[1] W warsztacie samochodowym nie próbuje się idealnie „doklepać” felg, czy podciąć gumę opon, by nadać im kształt idealnie kolisty, a raczej odpowiednio dobrać małe, ołowiane ciężarki przymocowywane do koła.

miejsce. Przecież, gdyby się przemieścił, to i ja razem z nim i środek ciężkości też. A to niemożliwe.

A teraz stańmy na mogącej obracać się płycie. Idziemy trochę po obwodzie w prawo, płyta pod nogami w lewo. My do tyłu, płyta do przodu. Wrócimy na swoje miejsce na płycie, płyta wróci na swoje miejsce. Wynika to **rzeczywiście z prawa zachowania momentu pędu**. Argument jest prosty. Gdy nadaliśmy sobie prędkość po obwodzie równą $v$ względem Ziemi, to płyta zyskała prędkość przeciwną taką, by nasze momenty pędu się zniosły:

$B\frac{v_{\text{tarczy}}}{R} = -mRv_{\text{nasza}}$. Jakkolwiek zmienia się prędkość w czasie, kąty przebyte przeze mnie i przez płytę, przy takim chodzeniu, są w stałej proporcji. Gdy wrócę, wróci i płyta do swojego położenia. Podobny argument stosowałby się i do łódki, tyle, że tam proporcja prędkości określona by była przez masy: łódki i moją.

Ale zróbmy płycie psikusa. Idziemy i nie wracamy, a zataczamy całe koło względem płyty, (ale niepełne względem Ziemi, bo płyta od drugiej strony wyszła nam na spotkanie), wracając do pierwotnego punktu płyty i się zatrzymujemy. Płyta tez się zatrzymuje. Prawo zachowania momentu pędu działa. Ale płyta (i my z nią) jesteśmy **obróceni** w przestrzeni. Trochę jak ten Münchausen.

Możemy też pójść kawałek po łuku do przodu. Płyta do tyłu. My po promieniu do środka płyty, a płyta stoi. Potem znów po promieniu do starego miejsca. A płyta stoi. I razem z płytą jesteśmy obróceni do tyłu!

Prawo zachowania położenia środka masy, choć spokrewnione z prawem zachowania pędu, jest od niego odrębne. Prawo zachowania momentu pędu **nie ma** takiego „spokrewnionego" ze sobą dalszego prawa. Gdyby miało, to razem z prawami zachowania energii i pędu mielibyśmy takich uniwersalnych praw zachowania dla układu odosobnionego 13. Brzydka liczba! Gdyby prawa zachowania środka masy nie było, mielibyśmy takich praw 7. Też liczba podejrzana! W rzeczywistości jest ich 10.

Mówiąc bardziej serio, liczba 10 to liczba niezależnych parametrów określających wybór inercjalnego układu odniesienia (4 współrzędne zdarzenia gdzie lokujemy początek, 3 parametry orientacji osi i 3 składowe wektora prędkości). Zmiana układu (dozwolona przecież, bez żadnych konsekwencji) to jest symetria. A z każda symetrią wiąże się prawo zachowania, (co w skromnym zakresie zaobserwowaliśmy).

A więc prawo zachowania położenia środka masy **musi istnieć** dodatkowo oprócz energii, pędu i momentu pędu. I nie może już być innego o tym charakterze. (Mogą być, i są, inne prawa zachowania, niezwiązane już jednak z symetrią czterowymiarowej czasoprzestrzeni).

**Kot może obrócić się w całości, by spaść na cztery łapy działając tylko siłami wewnętrznymi.**

To, że „po drodze” musi się wyginać, to inna sprawa. Baron Münchausen też mógłby próbować się wyginać, a nic mu nie pomoże. By analogia była pełniejsza, powinniśmy raczej położyć barona, czy postawić, na idealnym lodzie i kazać mu się przesunąć o parę metrów. Nie da rady! Oczywiście obrócić się może! Wystarczy, że zacznie kręcić ręką „młynka” ponad głową. Całe ciało tez zacznie się obracać, choć powoli. Przerwie, gdy uzyska orientację, jaką sobie zaplanował.