

Podstawy Fizyki I – Mechanika
Zadania domowe – Seria 1 (1 października 2019)

Zad. 1.

Znaleźć równanie prostej $y = a \cdot x + b$ przechodzącej przez punkty $(1, 2)$ i $(3, 4)$ na płaszczyźnie XY .
Pod jakim kątem α prosta nachylona jest do osi OX ?

Odpowiedź:

$$a = 1, b = 1, \alpha = \pi/4$$

Zad. 2. Policzyc pochodną funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $x = 1$:

- a) korzystając z definicji pochodnej
- b) korzystając z kalkulatora dla $\Delta x = 0.1, 0.01, 0.001$.

Odpowiedź:

- a) analitycznie: $f'(x = 1) = 2$
- b) numerycznie $\Delta x = 0.1$: $f'(x = 1) = 2.1$, $\Delta x = 0.01$: $f'(x = 1) = 2.01$,
 $\Delta x = 0.001$: $f'(x = 1) = 2.001$

Zad. 3. Korzystając z własności pochodnych policzyć:

- a) $\left(\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x \sqrt{x^3}}} \right)'$
- b) $(x^2 \sin x)'$
- c) $\left(\frac{2 - x^2}{2x^3 + x + 3} \right)'$
- d) $\left(\frac{1 + \sqrt{t}}{1 + \sqrt{2t}} \right)'$.

Odpowiedź:

- a) $\frac{23}{24}x^{-1/24}$
- b) $2x \sin(x) + x^2 \cos(x)$
- c) $\frac{2x^4 - 12x^2 - 6x - 2}{4x^6 + 4x^4 + 12x^3 + x^2 + 6x + 9}$
- d) $\frac{1 - \sqrt{2}}{2\sqrt{t}(1 + \sqrt{2t})^2}$

Zad. 4. Policzyc następujące pochodne funkcji złożonej:

- a) $\left[e^x \ln \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right]'$
- b) $\left(\sqrt{3x^2 - 7x + 12} \right)'$.

Odpowiedź:

- a) $e^x [\ln(\operatorname{tg}(x/2)) + \frac{1}{2 \operatorname{tg}(x/2) \cos^2(x/2)}]$
- b) $\frac{6x - 7}{2\sqrt{3x^2 - 7x + 12}}$

Zad. 5. Policzyc pochodną funkcji $y(x)$ korzystając z własności pochodnej funkcji odwrotnej:

- a) $y(x) = \sqrt{x}$
- b) $y(x) = \arcsin x$.

Odpowiedź:

- a) $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
- b) $y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Zad. 6. Policzyc pochodne funkcji $y = \operatorname{ar} \tanh x$ i $y = \operatorname{ar} \operatorname{ctanh} x$. Czym się różnią (narysuj je)?

Odpowiedź:

- a) $y'(x) = \frac{1}{1-x^2}$
- b) $y'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

Zad. 7. Obliczyc pochodne do szóstego rzędu włącznie funkcji $y(x) = x^5 + 2x^4 - 4x^2 + 16x - 15$.

Odpowiedź:

- a) $y'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 8x + 16$
- b) $y''(x) = 20x^3 + 24x^2 - 8$
- c) $y'''(x) = 60x^2 + 48x$
- d) $y^{(4)}(x) = 120x + 48$
- e) $y^{(5)}(x) = 120$

Zad. 8. Puszka do konserw w postaci walca o pojemności $V_o = 54\pi \text{ cm}^3$ ma być tak wykonana, aby została zużyta minimalna ilość blachy. Wyznaczyć promień r podstawy i wysokość h takiej puszki.

Odpowiedź: $r = 3 \text{ cm}$, $h = 6 \text{ cm}$.

Zad. 9. Rozwinąć funkcję $f(x) = \ln x$ w szereg potęgowy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{df^{(n)}}{dx^n} \Big|_{x_o} \frac{(x-x_o)^n}{n!}$ wokół punktu $x_o = 1$, a następnie policzyć pochodną $f'(x)$.

Odpowiedź: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} (x-1)^n$, $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n = \frac{1}{x}$

Zad. 10. Policzyc całki nieoznaczone:

a) $\int \cos^2 x \, dx$

b) $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$

c) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^4}}$

d) $\int \arctg x \, dx$

e) $\int e^x x \cos x \, dx.$

Odpowiedź:

a) $\frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{2}x + C$

b) $\frac{1}{2} \ln^2(x) + C$

c) $\frac{1}{2} \arcsin(x^2) + C$

d) $x \arctg(x) - \frac{1}{2} \ln|x^2 + 1| + C$

e) $\frac{1}{2} e^x x (\sin(x) + \cos(x)) - \frac{1}{2} e^x \sin(x)$

Zad. 11. Obliczyć pole powierzchni ograniczonej łukiem paraboli $y = x^2$ oraz prostymi $y = 0$ i $x = 2$:

a) licząc całkę oznaczoną

b) metodą przybliżoną dzieląc pole na 4 prostokąty o równej szerokości.

Odpowiedź:

a) $S = \frac{8}{3} = \frac{32}{12}$

b) $S = \frac{11}{4} = \frac{33}{12}$