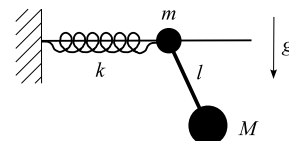


Podstawy mechaniki

Zadania domowe – Seria 10 (22 stycznia 2020)

Zadanie 1

Kulka o masie m , przymocowana nieważką sprężyną do ściany, może poruszać się bez tarcia po poziomym pręcie. Kulkę tę połączono z ciężarkiem o masie M za pomocą nieważkiej nici (rysunek obok). Długość nici i stała sprężystości sprężyny spełniają relację: $g/l = k/m = \omega_0^2$ (gdzie oznacza g przyspieszenie ziemskie). Obie kulki poruszają się w jednej pionowej płaszczyźnie. Znaleźć postacie drgań normalnych dla przypadków: $M \gg m$ i $M \ll m$.



Wskazówka: Uwzględnić tylko człony najniższego rzędu w zmiennej $\frac{m}{M}$ lub $\frac{M}{m}$.

Odpowiedź:

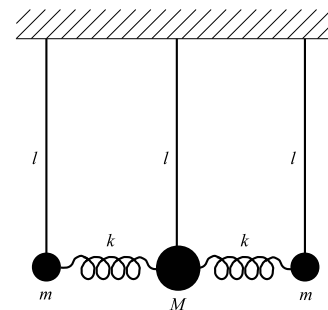
$$\omega_{1,2}^2 = \omega_0^2 \left[\left(1 + \frac{M}{2m} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{M}{m} \left(\frac{M}{m} + 4\right)} \right) \right]$$

$$\text{a) } M \gg m: \omega_1^2 \simeq \omega_0^2 \frac{M}{m}, \omega_2^2 \rightarrow 0, \begin{pmatrix} x \\ l\theta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

$$\text{b) } M \ll m: \omega_{1,2}^2 \simeq \omega_0^2 \left[1 \pm \sqrt{\frac{M}{m}} \right], \begin{pmatrix} x \\ l\theta \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{m}{M}} \end{pmatrix} A_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + \begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{\frac{m}{M}} \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

Zadanie 2

Znaleźć w przybliżeniu harmonicznym częstości i postacie drgań normalnych układu trzech wahadeł matematycznych o masach m , M i m oraz jednakowej długości l , połączonych nieważkimi sprężynami o stałej sprężystości k . Wahadła drgają w płaszczyźnie rysunku. W stanie spoczynku układu sprężyny miały swoją długość swobodną, a w chwili początkowej lewemu wahadłu nadano prędkość $\left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{t=0} = v_0$. Porównać wynik z zadaniem rozwiązany na ćwiczeniach dla układu trzech mas m , M i m połączonych dwiema jednakowymi sprężynami.



Odpowiedź:

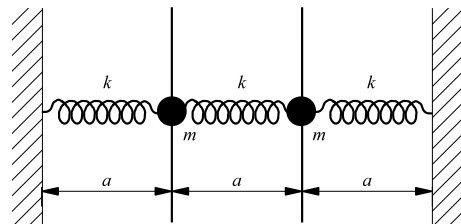
$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \omega_2^2 = \frac{k}{m} + \frac{g}{l}, \omega_3^2 = \frac{k}{m} + \frac{g}{l} + \frac{2k}{M}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \sin(\omega_2 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m}{M} \\ 1 \end{pmatrix} A_3 \sin(\omega_3 t)$$

$$A_1 = v \frac{m/M}{2m/M+1}, A_2 = v/2, A_3 = \frac{v}{2} \frac{1}{2m/M+1},$$

Zadanie 3

Znaleźć w przybliżeniu harmonicznym częstotści i postacie drgań normalnych układu trzech nieważkich sprężyn i dwóch koralików o masach m . Koraliki poruszają się bez tarcia wzdłuż pionowych prętów. Sprężyny mają długość swobodną l_0 i stałą sprężystości k . Odległość między prętami oraz między prętem a ścianą wynosi a ($a > l_0$). Grawitację pominąć.

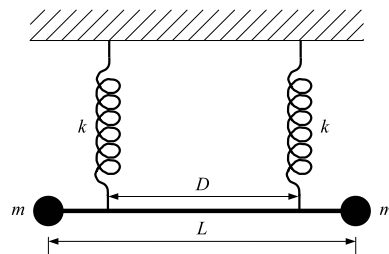


Odpowiedź:

$$\omega_1^2 = \alpha, \omega_2^2 = 3\alpha, \alpha = \frac{k(a-l_0)}{ma}$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} A_1 \sin(\omega_1 t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \sin(\omega_2 t)$$

Zadanie 4

Na dwóch jednakowych, nieważkich sprężynach o współczynnikach sprężystości k zawieszony jest nieważki pręt o długości L . Na obu końcach pręta umieszczono kulki o masie m . Odległość między sprężynami wynosi D ($D < L$). Znaleźć ogólną postać drgań kulek zakładając, że układ drga jedynie w płaszczyźnie rysunku a amplituda drgań jest mała. Grawitację pominąć.



Odpowiedź:

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \omega_2^2 = \frac{D}{L} \sqrt{\frac{k}{m}}$$
$$x(t) = A \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \alpha(t) = B \cos(\omega_2 t + \varphi_2),$$

Wahania (zmienna x) i wychylenia pręta (zmienna α) są niezależne.