

Podstawy mechaniki
Zadania domowe – Seria 2 (18 października 2019)

Zadanie 1

Dane są 3 wektory:

$$\vec{F}_1 = 3\hat{e}_x + 2\hat{e}_y - \hat{e}_z, \vec{F}_2 = 2\hat{e}_x + \hat{e}_y + \hat{e}_z, \vec{F}_3 = -\hat{e}_x + 3\hat{e}_y.$$

Wyrazić wektor $\vec{F} = 3\vec{F}_2 - 5\vec{F}_1 + \vec{F}_3$ przez wersory bazy: $\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$.

Odpowiedź: $\vec{F} = (-10, -4, 8)$

Zadanie 2

Wyrazić iloczyn skalarny dwóch wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ przez składowe tych wektorów w układzie kartezjańskim.

Odpowiedź: $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Zadanie 3

Wyrazić pole trójkąta, S , rozpiętego przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ przez iloczyn wektorowy wektorów $\vec{A} \times \vec{B}$. Policzyc pole trójkąta równobocznego.

Odpowiedź: $S = \frac{1}{2} |\vec{A} \times \vec{B}|$.

Zadanie 4

Punkt materialny porusza się po linii śrubowej zadanej we współrzędnych kartezjańskich:

$$\vec{r}(t) = (A \cos \omega t, A \sin \omega t, Bt),$$

gdzie A, B i ω oznaczają pewne stałe dodatnie. Znajdź we współrzędnych walcowych:

wektor wodzący $\vec{r}$, prędkość $\vec{v}$, przyspieszenie $\vec{a}$ oraz wersory: $\hat{t}$, $\hat{n}$ i $\hat{b}$. Korzystając z otrzymanych wyników oblicz: element długości łuku ds , przebytą drogę $s(t_1, t_2)$, lokalny promień krzywizny ρ oraz torsję T .

Odpowiedź: $\vec{r} = (A, 0, Bt)$, $\vec{v} = (0, A\omega, B)$, $\vec{a} = (-A\omega^2, 0, 0)$, $\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{A^2\omega^2+B^2}}(0, A\omega, B)$,

$$\hat{n} = (-1, 0, 0), \hat{b} = \frac{1}{\sqrt{A^2\omega^2+B^2}}(0, -B, A\omega), ds = \sqrt{A^2\omega^2+B^2}, s(t_1, t_2) = \sqrt{A^2\omega^2+B^2}(t_2 - t_1),$$

$$\rho = \frac{A^2\omega^2+B^2}{A\omega^2}, T = \frac{B\omega}{A^2\omega^2+B^2}$$

Zadanie 5

W kartezjańskim układzie współrzędnych w punkcie $P(x, y, z) = (-1, \sqrt{3}, 2)$ określone są dwa wektory $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = (1, 2, 3)$ oraz $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = (1, -1, 2)$. Znaleźć współrzędne punktu $P(\varrho, \varphi, z)$ oraz rozkład $\vec{A}$ i $\vec{B}$ na wersory bazy walcowego układu współrzędnych. Policzyc iloczyn skalarny i wektorowy wektorów $\vec{A}$ i $\vec{B}$ w obu układach.

Odpowiedź: $P = (2, \frac{2}{3}\pi, 2)$, $\vec{A} = (-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, 3)$, $\vec{B} = (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, 2)$, $\vec{A} \cdot \vec{B} = 5$, $\vec{A} \times \vec{B} = (\frac{\sqrt{3}-7}{2}, \frac{-7\sqrt{3}-1}{2}, -3)_{walcowy} = (7, 1, -3)_{kartezjanski}$,

Zadanie 6

Korzystając z faktu, że wersory bazy współrzędnych krzywoliniowych to $\hat{e}_{q_i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} / |\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}|$, wyraż wersory układu współrzędnych sferycznych $(q_1, q_2, q_3) = (r, \theta, \phi)$ przez wersory układu kartezjańskiego. Następnie znajdź współrzędne w układzie sferycznym wektorów: $\dot{\hat{e}}_r = \frac{d\hat{e}_r}{dt}$, $\dot{\hat{e}}_\theta = \frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$, $\dot{\hat{e}}_\phi = \frac{d\hat{e}_\phi}{dt}$, prędkości $\vec{v}$, przyspieszenia $\vec{a}$.