

Podstawy Mechaniki

Zadania domowe – Seria 3 (30 października 2019)

Zadanie 1

W układzie laboratorium znajduje się kula o promieniu R , wirująca z prędkością kątową ω wokół własnej osi. Mrówka znajdująca się na biegunie północnym kuli chce dojść po południku do równika kuli. Aby uatrakcyjnić swój ruch mrówka postanowiła, że wartość jej prędkości mierzona w układzie laboratorium będzie przez cały czas równa $\omega \cdot R$. Znajdź $\theta(t)$ oraz $\rho(\theta)$, gdzie θ – kąt polarny w układzie współrzędnych sferycznych, t – czas od początku podróży, zaś ρ – promień krzywizny. Po jakim czasie T mrówka dotrze do równika? Ile wynosi ρ na biegunie i równiku? Wskazówka: Ile wynosi $\dot{\theta}$?

Odpowiedź: $\theta(t) = \arcsin(\tanh(\omega t)) = \arctg(\sinh(\omega t)) = 2 \arctg(e^{\omega t}) - \pi/2$,
 $T = \infty$, $\rho(\theta = 0) = \frac{R}{\sqrt{5}}$, $\rho(\theta = \frac{\pi}{2}) = R$,

Zadanie 2

Ruch punktu we współrzędnych walcowych opisują równania: $\varrho(\varphi) = A \cdot (\sin \varphi + \cos \varphi)$, $\varphi(t) = \omega t$, $z(t) = 0$, gdzie A i ω oznaczają pewne stałe dodatnie, zaś ruch odbywa się od chwili czasu $t_1 = 0$ do $t_2 = \frac{3\pi}{4\omega}$. Znajdź w układzie walcowym: prędkość $\vec{v}$, przyspieszenie $\vec{a}$, wersory: styczny $\hat{t}$ i normalny $\hat{n}$ do toru, wartości przyspieszeń a_t i a_n oraz lokalny promień krzywizny R . Naszkicuj tor punktu i oblicz całkowitą długość toru $s(t_1, t_2)$.

Odpowiedź: $\vec{v} = A\omega[\cos(\omega t) - \sin(\omega t), \cos(\omega t) + \sin(\omega t), 0]$, $\vec{a} = 2A\omega^2[-\cos(\omega t) - \sin(\omega t), \cos(\omega t) - \sin(\omega t), 0]$,
 $\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}[\cos(\omega t) - \sin(\omega t), \cos(\omega t) + \sin(\omega t), 0]$, $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}[-\cos(\omega t) - \sin(\omega t), \cos(\omega t) - \sin(\omega t), 0]$,
 $a_t = 0$, $a_n = 2\sqrt{2}A\omega^2$, $R = A\frac{\sqrt{2}}{2}$, $s(t_1, t_2) = \frac{3\pi\sqrt{2}A}{4}$

Zadanie 3

Pewien student fizyki wytresował swojego karalucha w ten sposób, że porusza się on zawsze ze stałą co do wartości prędkością v_0 względem podłoża po którym chodzi. Następnie student postawił karalucha na krawędzi podstawy stożka o promieniu R i wysokości H , i kazał mu dotrzeć do wierzchołka stożka ze stałą prędkością v_0 , gdzie T jest pewną stałą dodatnią, zaś ϱ jest odległością od osi stożka. Oblicz z jaką prędkością kątową ω względem osi stożka musi się poruszać karaluch. Znajdź lokalny promień krzywizny ρ toru na początku ruchu karalucha.

Odpowiedź: $\omega(t) = \frac{\sqrt{v_0^2 - (R^2 + H^2)/T^2}}{R(1 - t/T)}$, $\rho = \frac{v_0^2 R}{\sqrt{v_0^2 - (R^2 + H^2)/T^2} \sqrt{v_0^2 - H^2/T^2}}$

Zadanie 4

Punkt porusza się po okręgu o promieniu r z dużą prędkością V . Jednocześnie okrąg ten powoli obraca się ze stałą prędkością kątową ω wokół osi OZ leżącej w płaszczyźnie okręgu i odległej od jego środka o R . Przyjmij, że: okrąg leży początkowo w płaszczyźnie XZ. Licząc przybliżony wektor prędkości załóż, że $r \ll R$, a dla przybliżonego wektora przyspieszenia dodatkowo, że $\omega R \ll V$.

- Znajdź tor we współrzędnych walcowych.
- Znajdź wektor prędkości $\vec{v}$ oraz jego długość i rozwiń je w szereg względem $\omega R/V$ zachowując pierwsze nieznikające poprawki do ruchu po okręgu.
- Wykorzystując przybliżone wielkości z poprzedniego punktu oblicz promień krzywizny oraz składowe a_t i a_n przyspieszenia.
- Znajdź wektor przyspieszenia $\vec{a}$ i rozwiń go w szereg względem $\omega R/V$, oraz pokaż zgodność w wynikami uzyskanymi w punkcie c)

Odpowiedź ($\Omega = V/r$, $k = \frac{R\omega}{r\Omega}$):

- $\vec{r} = [R + r \cos(\Omega t), 0, r \sin(\Omega t)]$
- $\vec{v} = r\Omega[-\sin(\Omega t), \frac{R\omega}{r\Omega}(1 + \frac{r}{R} \cos(\Omega t)), \cos(\Omega t)] \simeq r\Omega[-\sin(\Omega t), k, \cos(\Omega t)]$, $v \simeq r\Omega\sqrt{1 + k^2}$
- $\rho \simeq r(1 + k^2)$, $a_t \simeq 0$, $a_n \simeq r\Omega^2$
- $\vec{a} = [-r\Omega^2 \cos(\Omega t) - (R + r \cos(\Omega t)\omega^2), -2r\Omega\omega \sin(\Omega t), -r\Omega^2 \sin(\Omega t)] \simeq r\Omega^2[-\cos(\Omega t), -2\frac{\omega}{\Omega} \sin(\Omega t), -\sin(\Omega t)] \simeq r\Omega^2[-\cos(\Omega t), 0, -\sin(\Omega t)]$