

Podstawy mechaniki

Zadania domowe – Seria 6 (29 listopada 2019)

Zadanie 1

Dwustopniowa rakietą startuje pionowo w stałym polu grawitacyjnym o natężeniu g . Prędkość wyrzucanych gazów względem silnika wynosi $w = \text{const}$, a zużycie paliwa wynosi $\frac{dm}{dt} = \beta$, gdzie stała $\beta < 0$. Dla i -tego członu ($i = 1, 2$) dane są: masa pustego członu m_i oraz masa zabieranego paliwa M_i .

- Jaką maksymalną prędkość v_k uzyska drugi stopień rakiety?
- Porównaj wynik z jednostopniową rakieta o tej samej masie startowej i zabierającej tyle samo paliwa.

Odpowiedź:

- $v_k = w \ln \left[\frac{(m_2 + M_2)(m_1 + m_2 + M_1 + M_2)}{m_2(m_1 + m_2 + M_2)} \right] - g \frac{M_1 + M_2}{|\beta|}$
- $v_{k, \text{jednostopniowa}} = w \ln \left[\frac{m_1 + m_2 + M_1 + M_2}{m_1 + m_2} \right] - g \frac{M_1 + M_2}{|\beta|}$, $v_k - v_{k, \text{jednostopniowa}} = w \ln \left[\frac{(m_2 + M_2)(m_1 + m_2)}{m_2(m_1 + m_2 + M_2)} \right]$

Zadanie 2

Wiotka lina o długości L i masie M leży na stole i sięga kantu. W pewnej chwili do końca liny doczepiono masę m i całość zaczęła się zsuwać. Znajdź ruch końca liny pomijając tarcie.

Odpowiedź: $y(t) = \frac{m}{M} L [\cosh(\sqrt{\frac{Mg}{(M+m)L}} t) - 1]$

Zadanie 3

Na równi pochyłej leży dywan, szorstki od spodu i śliski od góry. Tarcie wystarcza do utrzymania dywanu na pochyłości. W pewnym momencie róg dywanu zawinięto i część zawinięta zaczęła się zsuwać ze stałym przyspieszeniem a . Ile wynosi a , jeśli kąt nachylenia równi wynosi α ?

Odpowiedź: $a = \frac{g \sin(\alpha)}{3}$

Zadanie 4

Klocek uderza z prędkością v_0 pod kątem α w płaską powierzchnię przy współczynniku tarcia f w taki sposób, że jego podstawa jest równoległa do tej powierzchni. Oblicz kąt odbicia β i prędkość końcową v klocka.

Odpowiedź: $\tan(\beta) = \tan(\alpha) - 2f$, $v = v_0 \sqrt{1 + 4f \cos(\alpha)(f \cos(\alpha) - \sin(\alpha))}$

Zadanie 5

Nierelatywistyczna cząstka o masie m porusza się w stałych, jednorodnych polach: elektrycznym o natężeniu $\vec{E}$ i magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ takich, że $\vec{E} \perp \vec{B}$, oraz $\vec{B} \parallel \hat{e}_z$ i $\vec{E} \parallel \hat{e}_x$. Cząstka porusza się w ośrodku w którym występuje siła oporu $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, gdzie stała $\alpha > 0$. Znajdź postaci $\vec{r}(t)$ i $\vec{v}(t)$ dla warunków początkowych: $\vec{r}(0) = (0, 0)$, $\vec{v}(0) = (0, 0)$. Znajdź asymptotyczną postać prędkości v_∞ dla $t \rightarrow \infty$.

Wskazówka: Aby rozwiązać równania ruchu we współrzędnych x, y wygodnie jest wyrazić prędkość i położenie jako zmienne zespolone: $r = x + iy$, $v = \dot{x} + i\dot{y}$.

Odpowiedź:

$$\omega_0 = \frac{qB}{m}, \quad \beta = \frac{\alpha}{m}, \quad v_\infty = \frac{eE}{m} \frac{1}{\beta + i\omega_0}$$

$$v(t) = v_\infty (1 - e^{-\beta t - i\omega_0 t}),$$

$$r(t) = v_\infty \left(t + \frac{e^{-\beta t - i\omega_0 t} - 1}{\beta + i\omega_0} \right)$$