

Podstawy mechaniki
Zadania domowe – Seria 7 (17 grudnia 2019)

Zadanie 1

Punkt o masie m porusza się pod wpływem siły centralnej po torze w kształcie okręgu o promieniu R , który przechodzi przez centrum działania siły. Moment pędu punktu względem centrum oddziaływania siły wynosi L . Jak zależy wartość tej siły od odległości punktu od centrum?

Odpowiedź: $F(r) = -\frac{8R^2L^2}{mr^5}$

Zadanie 2

Znaleźć wartość siły centralnej, która powoduje ruch punktu o masie m po spirali hiperbolicznej $r = \frac{a}{\varphi}$. Znaleźć zależność $\varphi(t)$ jeśli $\varphi(0) = \varphi_0$.

Odpowiedź: $F(r) = -\frac{L^2}{mr^3}$, $\varphi(t) = \frac{\varphi_0 ma^2}{ma^2 - Lt\varphi_0}$

Zadanie 3

Znajdź ruch cząstki o masie m , energii E i momencie pędu L w polu o energii potencjalnej $E_p(r) = -\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^2}$, gdzie k_1 i k_2 to pewne stałe dodatnie.

Odpowiedź: $r(t) = \frac{A}{1+B\cos(\omega\varphi+\varphi_0)}$, $A = \frac{2k_2m+L^2}{k_1m}$, $B = \sqrt{1 + \frac{2E}{k_1} \frac{2k_2m+L^2}{k_1m}}$

Zadanie 4

Oblicz stosunek masy planety do masy Słońca $M_P/M_\odot$, korzystając z faktu, że planeta ma satelitę o masie $m \ll M_P \ll M_\odot$. Dane są: średnia odległość Planeta-Słońce a_P i Planeta-satelita a_{sat} oraz okresy obrotów planety T_P i satelity T_{sat} .

Odpowiedź: $\frac{M_P}{M_\odot} = \left(\frac{a_{sat}}{a_P}\right)^3 \left(\frac{T_P}{T_{sat}}\right)^2$

Zadanie 5

Wyznacz długość wielkiej półosi orbity komety Halley'a, dla której okres obiegu dookoła Słońca wynosi $T_H = 76.029$ lat. Przyjmij okres obiegu Ziemi $T_Z = 1$ rok, półos orbity Ziemi $a_Z = 1$ j.a.

Odpowiedź: $a = a_Z \left(\frac{T_H}{T_Z}\right)^{2/3} = 17.95$ j.a.

Zadanie 6

Znajdź czas lotu T do Księżyca rakiety wysłanej z Ziemi z minimalną prędkością potrzebną na dotarcie do orbity Księżyca ($M_r, M_K \ll M_Z$). Zaniedbaj wpływ Księżyca na ruch rakiety oraz rozmiary ciał. Przyjmij okres obiegu Księżyca $T_K = 27.33$ dnia.

Odpowiedź: $T = T_K \frac{1}{4\sqrt{2}} = 4.86$ dnia.

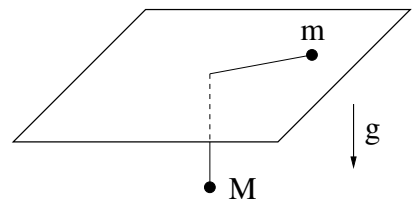
Zadanie 7

Dla dwóch kul o masie $m = 1$ kg spadających na siebie z odległości $R = 1$ m znaleźć czas spadku t rachunkiem bezpośrednim, korzystając z zasady zachowania energii.

Odpowiedź: $t = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 9.5 \cdot 10^4$ s.

Zadanie 8

Układ dwóch mas punktowych M i m umieszczono w jednorodnym polu grawitacyjnym o natężeniu $\vec{g}$. Masa m znajduje się na gładkiej płaszczyźnie i jest połączona z masą M cienką, nierozciągliwą nitką przechodzącą przez mały otwór w płaszczyźnie (patrz rysunek). Przyjmij, że: obie masy poruszają się bez tarcia, masa M może poruszać się tylko w pionie oraz moment pędu masy m względem otworu wynosi $\vec{L}$.



- Wyznacz równanie ruchu $f(\ddot{r}, \dot{r}, r) = 0$, gdzie r jest odległością masy m od otworu.
- Dla pewnych warunków początkowych układ znajduje się w stanie równowagi, tzn. $r(t) = r_0 = \text{const}$. W pewnym momencie ruch ten lekko zaburzono, nie zmieniając jednak momentu pędu masy m . Znajdź częstość ω małych drgań pionowych, $h(t) = r(t) - r_0$, masy M .

Odpowiedź: $\ddot{r} + \frac{L^2}{m(M+m)} \frac{1}{r^3} + \frac{Mg}{M+m} = 0$, $\omega^2 = \frac{3L^2}{m(M+m)r_0^4}$