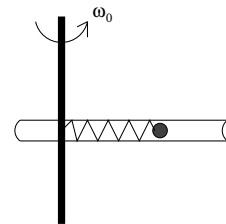


Podstawy mechaniki

Zadania domowe - Seria 8 (10 stycznia 2020)

Zadanie 1

Szklana rurka jest przymocowana do prostopadłego pręta (rysunek obok). Wewnątrz rurki spoczywa kulka o masie m przymocowana do pręta za pomocą sprężyny o długości swobodnej l i o współczynniku sprężystości k . W pewnej chwili cały układ zostaje wprowadzony w ruch obrotowy wokół osi pręta i dalej obraca się ze stałą prędkością kątową ω_0 . Znaleźć ruch kulki. Przedyskutować położenie kulki przy $t \rightarrow \infty$. Współczynnik tarcia kulki o ścianki rurki wynosi f . W rozwiązaniu ograniczyć się do przypadku kiedy $\delta^2 = \frac{k}{m} - \omega_0^2 \cdot (1 + f^2) > 0$. Zaniedbać efekty grawitacyjne i efekty występujące podczas rozpędzania rurki, tzn. przyjmując warunki początkowe: $r(t=0) = l, \dot{r}(t=0) = 0$.



Odpowiedź: $r(t) = e^{-f\omega t} [A \sin(\delta t) + B \cos(\delta t)] + \frac{k/m}{k/m - \omega^2}$, $A = -\frac{\omega^3 f \cdot l}{(k/m - \omega^2)\delta}$, $B = \frac{-l \cdot \omega^2}{k/m - \omega^2}$,
 $r(t \rightarrow \infty) = \frac{k/m}{k/m - \omega^2}$

Zadanie 2

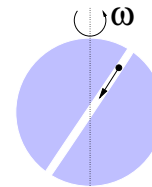
Roch Kowalski mieszkający na stałe w Warszawie (szer. geogr. $\lambda = 52^\circ$, $g_W = 9.812 \text{ m/s}^2$) przywiózł z podróży po świecie dwie dokładne wagi sprężynowe (wyskalowane w kg) – kupione na równiku ($\lambda = 0^\circ$, $g_R = 9.780 \text{ m/s}^2$) i na biegunie ($\lambda = 90^\circ$, $g_B = 9.832 \text{ m/s}^2$). Razu pewnego kupił $m = 1 \text{ kg}$ ryżu i dla sprawdzenia rzetelności sprzedawczyni zważył je w domu na obu posiadanych wagach. Zdumienie Rocha było ogromne, gdyż wagi wskazały co innego. Jaka była różnica wskazań $\Delta = m_{\text{waga z równika}} - m_{\text{waga z bieguna}}$, jeśli sprzedawczyni była uczciwa? Ile wyniosłaby ta różnica gdyby założyć, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu $R_Z = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}$, masie $M_Z = 5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, okresie obrotu $T = 23 \text{ h } 56 \text{ m}$. Przyjmij: $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg/s}^2$.

Odpowiedź: $\Delta = m \cdot \frac{g_W}{g_R g_B} (g_B - g_R) = 5.3 \text{ g}$. Dla Ziemi jako jednorodnej kuli: $\Delta = 3.5 \text{ g}$.

Zadanie 3

Wzdłuż średnicy Ziemi wybudowano prostoliniowy tunel przechodzący przez jej środek (rysunek obok), którego końce znajdują się na szerokości geograficznej północnej i południowej $\lambda = 52^\circ$. W tunelu puszczono kamień o masie $m = 1 \text{ kg}$ poruszający się bez tarcia. Obliczyć:

- ściłą zależność odległości kamienia od środka Ziemi w funkcji czasu,
- czas przelotu T_A na Antypody,
- wektor siły reakcji, z jaką ścianki tunelu działają na kamień, w momencie jego puszczenia i w środku Ziemi.



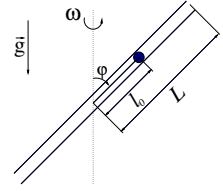
Założyć, że Ziemia jest jednorodną sztywną kulą o promieniu $R_Z = 6.37 \cdot 10^6 \text{ m}$, której okres obrotu dookoła osi wynosi $T = 24 \text{ h}$, a przyspieszenie grawitacyjne na powierzchni Ziemi $g(R_Z) = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Odpowiedź:

- $r(t) = R_Z \cos(\Omega t)$, $\Omega = \sqrt{\frac{g(R_Z)}{R} - \omega^2 \cos^2(\lambda)}$
- $T_A = \frac{\pi}{\Omega} = 42 \text{ min}$.
- $\vec{F}(t) = mR(-2\omega\Omega \cos(\lambda) \sin(\Omega t), \omega^2 \sin(\lambda) \cos(\lambda) \cos(\Omega t), 0)$, $F(0) = (0, 0.016, 0) \text{ N}$, $F(T_A) = (-0.71, 0, 0) \text{ N}$.

Zadanie 4

Rurka o połowicznej długości L obraca się w polu siły ciężkości ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ wokół osi przechodzącej przez jej środek i równoległej do $\vec{g}$ (rysunek obok). Oś rurki nachylona jest do osi obrotu pod kątem φ . Wewnątrz rurki, w odległości l_0 od jej środka, znajduje się kulka o masie m przywiązana do nitki, która jest napięta. W pewnym momencie nie pęka i kulka zaczyna się poruszać. Znaleźć: ruch kulki $r(t)$, siły reakcji działające na kulkę $\vec{F}(t)$ oraz wektor prędkości w momencie T gdy kulka opuszcza rurkę $\vec{v}$.



Odpowiedź: W układzie związanym z rurką, oś z prostopadłą do rurki, skierowana do góry:

$$x(t) = 2A \cosh[\omega \sin(\varphi)t] + \frac{g \cos(\varphi)}{\omega^2 \sin^2(\varphi)}, \quad A = \frac{1}{2} \left(l_0 - \frac{g \cos(\varphi)}{\omega^2 \sin^2(\varphi)} \right),$$

$$\vec{F}(t) = (0, 4Am\omega^2 \sin^2(\varphi) \sinh[\omega \sin(\varphi)t], mg \sin(\varphi) + \frac{1}{2}m\omega^2 x \sin(2\varphi)).$$

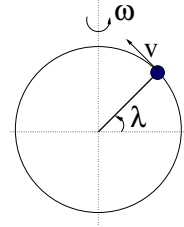
W układzie nieobracającym się, pokrywającym się w układem rurki w chwili $t = 0$:

$$\vec{v} = [v(L) \sin(\varphi) \cos(\omega t) - \omega L \sin(\varphi) \sin(\omega t), v(L) \sin(\varphi) \sin(\omega t) + \omega L \sin(\varphi) \cos(\omega t), v(L) \cos(\varphi)],$$

$$v(L) = 2A\omega \sin(\varphi) \sinh[\omega \sin(\varphi)T]$$

Zadanie 5

Punkt porusza się z prędkością v po południku kuli o promieniu R obracającej się wokół pionowej średnicy ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$ (rysunek obok). Pewien chytry student, chcąc uprościć sobie rachunki zaproponował, by zadanie rozwiązać w układzie $X'Y'Z'$ zaczepionym w środku wirującej kuli, którego wersor $\vec{e}_{X'}$ wskazuje na poruszający się punkt, wersor $\vec{e}_{Y'}$ jest równoległy do południka po którym porusza się punkt (zwrot ku malejącym kątom λ), zaś $\vec{e}_{Z'} = \vec{e}_{X'} \times \vec{e}_{Y'}$. Znaleźć przyspieszenie punktu w zależności od kąta λ w nieruchomym układzie współrzędnych sferycznych rachunkiem bezpośrednim oraz transformując wynik z opisanego układu nieinercyjnego $X'Y'Z'$.



Odpowiedź: $\vec{a} = (-\dot{\lambda}^2 - \omega^2 \cos^2(\lambda), -\omega^2 \sin(\lambda) \cos(\lambda), -2\dot{\lambda}^2 \omega \sin(\lambda)), -\dot{\lambda} = \frac{v}{R}$