**Sprężyna  (prof. Andrzej Szymacha)**

Problem ze sprężyną jest dość subtelny. Po pierwsze, żeby odkształcenie było czystym ścinaniem, trzeba zapewnić symetrię zawieszeń. Końce skrajnych zwojów powinny być zagięte i radialnie doprowadzone do osi symetrii sprężyny. Liczba zwojów powinna być całkowita, tak by zwoje skrajne kończyły się na tej samej tworzącej, krótko mówiąc by były jeden pod drugim.

Zakładam, że grubość drutu $r$ jest bardzo mała w porównaniu z promieniem zwoju $R$, a także, że skok jest mały w porównaniu z obwodem: $\alpha \cong \tan\alpha = h / 2\pi R << 1$.

Zakładam wreszcie, że przed obciążeniem zwoje są (na tyle na ile pozwala grubość drutu, rzecz jasna, ale ten jest bardzo cienki) praktycznie okręgami.

W tej sytuacji obciążenie sprężyny siłą $F$ (powodujące pojawienie się identycznej siły w górnym punkcie zawieszenia), spowoduje przekształcenie $N$ okręgów w helisę. Każdy przekrój każdego zwoju przemieści się wzdłuż linii pionowej (pomijam ścieśnianie całej sprężyny w przybliżeniu małego skoku) i jednocześnie **obróci o kąt** $\alpha$ **wokół osi poziomej** idącej od osi helisy do środka danego przekroju w jego końcowym położeniu.

Dwa takie bliskie przekroje, odległe kątowo o $\mathrm{d}\varphi$, a liniowo o $\mathrm{d}s = R\mathrm{d}\varphi$, obrócone są o ten sam kąt $\alpha$ wokół **różnych osi:** $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$, tworzących kąt $\mathrm{d}\varphi$. Można te oba obroty zrealizować tak, by najpierw obrócić **oba przekroje** wokół osi $\vec{n}_1$ ,(co nie spowoduje **żadnego** odkształcenia), a następnie obrócić **już tylko drugi** przekrój o obrót będący złożeniem obrotu o kąt $-\alpha$ wokół osi $\vec{n}_1$ z obrotem o kąt $\alpha$ wokół osi $\vec{n}_2$. Dla małych kątów, warto wprowadzić tzw. „wektory obrotu": $\alpha\vec{n}$, które przy wykonywaniu kolejnych obrotów się dodają. Zatem dodatkowy obrót przekroju 2 sprowadzający go do właściwego położenia ma wektor obrotu: $\alpha\vec{n}_2 - \alpha\vec{n}_1$ [1]. **To jest to poszukiwane skręcenie.**. Różnica dwóch wektorów obrotu, równej długości $\alpha$, tworzących **mały** kąt $d\varphi$, to wektor do nich prostopadły (do **obu**, bo są prawie równoległe) o wartości $\alpha\mathrm{d}\varphi$.

Wstawiając wartość $\alpha$ wyrażoną przez skok i promień helisy, dostaję dla **skręcenia** elementu drutu zawartego między rozważanymi przekrojami wynik proporcjonalny do jego długości:

$$\alpha\mathrm{d}\varphi = \frac{h}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}s}{R},$$

[1] W wyniku obrotu o kąt $\varepsilon$ wokół osi $\vec{n}$, dowolny wektor $\vec{r}$ zmieni się tak, że jego składowa prostopadła do osi obróci się o $\varepsilon$, co jest równoważne (dla małego kąta) dodaniu wektorka prostopadłego: $\varepsilon\vec{n}\times\vec{r}$ : $\hat{R}(\vec{n},\varepsilon)\otimes\vec{r} = \vec{r} + \varepsilon\vec{n}\times\vec{r}$. Dokonując takiego obrotu z dowolną nową osią i nowym (małym) kątem, pomijając iloczyny małych kątów dostaje się $\hat{R}(\vec{n}_1,\varepsilon_1)\otimes\left(\hat{R}(\vec{n}_2,\varepsilon_2)\otimes\vec{r}\right) \cong \vec{r} + (\varepsilon_1\vec{n}_1 + \varepsilon_2\vec{n}_2)\times\vec{r}$  c.b.d.o.

a dla wartości skręcenia na jednostkę długości: $\frac{h}{2\pi R^2}$

Wystarczy tę wielkość wstawić do wzoru na moment skręcający wyprowadzony na wykładzie dla pręta prostego o przekroju kołowym:

$$M = G\frac{\pi r^4}{2}\frac{h}{2\pi R^2} = \frac{Gr^4}{4R^2}h.$$

Moment ścinający przekazywany jest od talarka do talarka, a na końcu równoważony jest momentem siły $F$ o ramieniu $R$.

$$\frac{Gr^4}{4R^2}h = FR$$

Kładąc $\Delta x = Nh$

dostajemy: $F = -\frac{Gr^4}{4R^3 N}\Delta x$

Gdy zwojów jest niewiele, ugięcie radialnych końcówek sprężyny dawałoby jakiś znaczący wkład do całkowitego przemieszczenia zawieszonego ciężarka.

Gdyby odprowadzeń zwojów do centrum w ogóle nie było, i gdybyśmy rozciągali dwa punkty na tej samej tworzącej wyimaginowanego walca opisującego naszą spiralę, **pozwalając** by drut robił, co chce (ciągniemy trzymając koniec w łożysku), musiałby moment skręcający znikać na końcu. Oznaczałoby to brak względnego skręcenia na samym końcu. Pojawiałoby się ono w miarę oddalania od punktu zaczepienia. Moment ścinający osiągałby maksimum (równe $2RF$) w odległości pół obwodu zwoju i spadał do zera w miarę dalszego wzrostu kąta do $2\pi$. Drut nie byłby regularna spiralą ze stałą krzywizna i stałą torsją (przede wszystkim!). Jednocześnie fragmenty drutu byłyby w różnym stopniu obrócone (w stosunku do sytuacji wyjściowej) w przestrzeni. Brrr...

**Kuszące jest widząc wynik $\frac{h}{2\pi R^2}$ przekształcić go do postaci: $\frac{h}{R}/2\pi R$ i wskazać dwie wielkości *h/R* i obwód 2π*R* , ale co wielkość *h/R* (będąca kątem, pod jakim widać skok śruby z jej osi) ma z obrotem? Obrotem czego względem czego? Dwa przekroje odległe o skok *h* są akurat obrócone względem siebie o kąt 0! Składanie obrotów kolejnych talarków (obrotów jako wektorów) daje po obejściu pełnego kąta obrót 0.**

Jest **magiczne**, że, mimo iż żaden z przekrojów przy deformacji nie obraca się wokół swojej osi, to porównując swoje położenie z innym widzi się względem niego obrócony!

Jest tym bardziej magiczne, że kolejne obroty, **niby** w tę sama stronę sumują się do zera.

Utożsamienie, według mnie – prawem kaduka, wielkości *h/R* z kątem obrotu przypadającym na długość obwodu, bazujące tylko na samej geometrii spirali jest bezpodstawne, a końcowy wynik tylko przypadkiem prawidłowy. Wystarczy zauważyć, że czysto geometrycznie (mając materiał idealnie plastyczny) można przekształcić pojedynczy rozcięty okrąg w zwój helisy nie wykonując **żadnego obrotu.** Rozcinając w myśli na *N* kawałków, obniżamy kolejne talarki (idąc tak, jak wskazówki zegara) o wartość *h/N* w pionie. Następnie każdy talarek poddajemy deformacji ścinania przesuwając jego prawą ściankę też o *h/N,* tak by zespolić ją z lewą ścianką następnego talarka. To ścinanie ma kąt ścinania $h/2\pi R$. A co równoważy moment ścinania? Nie ma czym równoważyć! Musiałem przyjąć, że to plastelina!

Ale geometrycznie powstanie taka sama spirala jak poprzednio. Nadal istnieje wielkość *h/R.* A obrotu żadnego nie ma. I nie ma momentu.

Fizyczne żądanie kasowania się momentów sił wymusza, by przemieszczenia fragmentów były takie, że obroty sąsiadów, ich pochylenia się od poziomu, są o taki kąt, jaki gwarantuje brak przesunięcia ścianek sąsiadów w pionie. Brak ścinania pionowego – tylko okrężne. To nam mówi o względnych przesunięciach, czyli deformacjach. Końcowy spiralny kształt przekształconego okręgu nie determinuje, sam z siebie, tensora deformacji.