

# Kwantowy opis zjawisk optycznych

# Klasyczny oscylator

$$e \cdot \mathbf{E} = kx = m\omega_0^2 x \quad \begin{array}{l} k - \text{stała siłowa} \\ m - \text{masa} \end{array}$$

Stałe pole elektryczne  $\mathbf{E}$



$\alpha$  – polaryzacja oscylatora

$$\alpha = \frac{P}{\epsilon_0 E} = \frac{e \cdot x}{\epsilon_0 E} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m \omega_0^2}$$

Dla pola zmiennego w czasie  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$

$$\frac{m d^2 x}{dt^2} + m\omega_0^2 x + m\gamma \frac{dx}{dt} = eE_0 e^{-i\omega t} \quad \begin{array}{l} x = x_0 e^{-i\omega t} \\ P = P_0 e^{-i\omega t} \end{array}$$

$$m(-\omega^2 + \omega_0^2 - i\gamma\omega)x = eE_0$$

$$P_0 = ex_0 = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

$$\alpha = \frac{P_0}{\epsilon_0 E_0} = \frac{e^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

**Klasycznie funkcja dielektryczna dla koncentracji oscylatorów  $N$**

$$\epsilon_{klas}(\omega) = 1 + N\alpha \quad \Rightarrow$$

$$\epsilon_{klas}(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

# Opis kwantowy zjawisk optycznych

Rozważmy układ fizyczny opisany Hamiltonianem  $H_0$

$$H_0 \varphi_j = E_j \varphi_j \quad \text{Pełna funkcja falowa: } \psi(t) = \varphi_j e^{-iE_j t/\hbar}$$

Przeanalizujemy ewolucję układu znajdującego się w stanie  $\varphi_0$  pod wpływem zaburzenia

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \left( e^{i\omega t} + e^{-i\omega t} \right)$$

zmiennym polem elektrycznym postaci

**Człon zaburzający Hamiltonianu**

zapiszmy w postaci (przybliżenie dipolowe):

$$H_z = e\vec{E}(t) \cdot \vec{r}$$

Wtedy nowy Hamiltonian przyjmie postać:

$$H = H_0 + e\vec{E}(t) \cdot \vec{r}$$

Szukamy rozwiązania równania....

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

Rachunek zaburzeń  
zależny od czasu

w postaci:

$$\psi = \varphi_0 e^{-iE_0 t/\hbar} + \sum_j c_j(t) \varphi_j e^{-iE_j t/\hbar}$$

↑  
zaburzenie

$c_j(t)$  – współczynniki  
zależne od czasu

Podstawiamy  $\psi$   
do równania

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi$$

**Lewa strona:**

$$L = H\psi = E_0\varphi_0 e^{-iE_0t/\hbar} + e\vec{E}\vec{r}\varphi_0 e^{-iE_0t/\hbar} + \sum_j c_j(t)E_j\varphi_j e^{-iE_jt/\hbar} + \text{wyrazy drugiego rzędu}$$

**Prawa strona:**

$$P = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = E_0\varphi_0 e^{-iE_0t/\hbar} + \sum_j c_j(t)E_j\varphi_j e^{-iE_jt/\hbar} + i\hbar \sum_j \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \varphi_j e^{-iE_jt/\hbar}$$

Z porównania:

$$e\vec{E} \cdot \vec{r} \varphi_0 e^{-iE_0t/\hbar} = i\hbar \sum_j \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} \varphi_j e^{-iE_jt/\hbar}$$

Mnożymy obie strony przez  $\varphi_j$  i całkujemy po przestrzeni wyliczając element macierzowy z funkcją

$$i\hbar \frac{\partial c_j(t)}{\partial t} = e^{-i\omega_j t} \langle \varphi_j | e \vec{\mathbf{E}}(t) \cdot \vec{r} | \varphi_0 \rangle \quad \text{gdzie: } \omega_j = \frac{E_j - E_0}{\hbar}$$

Rozważmy najpierw pole elektryczne w postaci:  $\vec{\mathbf{E}}(t) = \vec{\mathbf{E}}_x (e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$

Oznaczmy:  $ex_{j0} = \langle \varphi_j | ex | \varphi_0 \rangle$  ← element macierzowy momentu dipolowego

$$c_j(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t \mathbf{E}_x ex_{j0} (e^{-i\omega t'} + e^{i\omega t'}) e^{-i\omega_j t'} dt' =$$

$$= \mathbf{E}_x ex_{j0} \left\{ \frac{e^{-i(\omega+\omega_j)t} - 1}{\hbar(\omega_j + \omega)} + \frac{e^{i(\omega-\omega_j)t} - 1}{\hbar(\omega_j - \omega)} \right\}$$

**Polaryzacja ośrodka**      Pamiętajmy:  $\psi = \varphi_0 e^{-iE_0 t/\hbar} + \sum_j c_j(t) \varphi_j e^{-iE_j t/\hbar}$

Rozważmy moment dipolowy, a ściślej – jego składową proporcjonalną do czynnika

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_x e^{-i\omega t}$$

$$\langle \psi | ex | \psi \rangle =$$

$$= \left\langle \varphi_0 e^{-iE_0 t/\hbar} + \sum_j e \mathbf{E}_x x_{j0} \left\{ \frac{e^{-i(\omega - \omega_j)t} - 1}{\hbar(\omega_j - \omega)} \right\} \varphi_j e^{-iE_j t/\hbar} \middle| ex \middle| \varphi_0 e^{-iE_0 t/\hbar} + \sum_j e \mathbf{E}_x x_{j0} \left\{ \frac{e^{-i(\omega - \omega_j)t} - 1}{\hbar(\omega_j - \omega)} \right\} \varphi_j e^{-iE_j t/\hbar} \right\rangle =$$

$$= \sum_j e^2 \mathbf{E}_x (x_{j0})^* (x_{j0}) \left\{ \frac{e^{-i\omega t}}{\hbar(\omega_j - \omega)} + \frac{e^{i\omega t}}{\hbar(\omega_j - \omega)} \right\} \quad + \text{człony z inną zależnością od czasu.}$$

Analogicznie dla  $\vec{E}(t) = \vec{E}_x e^{i\omega t}$  moment dipolowy

$$\langle \psi | ex | \psi \rangle = \sum_j e^2 \mathbf{E}_x (x_{j0})^* (x_{j0}) \left\{ \frac{e^{-i\omega t}}{\hbar(\omega_j + \omega)} + \frac{e^{i\omega t}}{\hbar(\omega_j + \omega)} \right\}$$

+człony z inną zależnością od czasu.

Zatem polaryzowalność układu stanów o gęstości  $N$  dla

$$\vec{E}(t) = \vec{E}_x (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$$

Obliczamy plaryzowalność

$$\alpha = \frac{P}{\varepsilon_0 E} \Rightarrow \alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0} \sum_j \frac{2\omega_j |x_{j0}|^2}{\hbar(\omega_j^2 - \omega^2)}$$

Zdefiniujemy siłę oscylatora:

$$\omega_j = \frac{E_j - E_0}{\hbar}$$

$$f_j = \frac{2m}{\hbar^2} (E_j - E_0) |x_{j0}|^2$$

Siła oscylatora może być dodatnia albo ujemna!

$$\alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

# Reguła sum Thomasa-Reicha-Khuna

$$\sum_j f_j = 1$$

Wyjdźmy od związku:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [x, H] \quad \Rightarrow \quad [x, H] = i\hbar \dot{x} = \frac{i\hbar}{m} p_x$$

Zbadajmy element macierzowy:  $\langle i | [x, H] | j \rangle = (E_j - E_i) \langle i | x | j \rangle$

$$\frac{i\hbar}{m} \langle i | p_x | j \rangle = (E_j - E_i) \langle i | x | j \rangle$$

Inny sposób przedstawienia  $f_j$

$$\langle i | x | j \rangle = \frac{i\hbar}{m} \frac{\langle i | p_x | j \rangle}{(E_j - E_i)} \quad \Rightarrow \quad f_j = \frac{2m}{\hbar^2} (E_j - E_0) |x_{j0}|^2 = \frac{2|p_{j0}|^2}{m(E_j - E_0)}$$

Pamiętamy, że  $[x, p_x] = i\hbar \Rightarrow 1 = \langle l|l \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle l|[x, p_x]|l \rangle$

Zatem:

$$\frac{1}{i\hbar} \langle l|[x, p_x]|l \rangle = \frac{1}{i\hbar} \left( \langle l|xp_x|l \rangle - \langle l|p_x x|l \rangle \right) =$$

$$= \sum_j \frac{1}{i\hbar} \left( \langle l|x|j \rangle \langle j|p_x|l \rangle - \langle l|p_x|j \rangle \langle j|x|l \rangle \right) =$$

Pamiętamy, że

$$\langle i|x|j \rangle = \frac{i\hbar \langle i|p_x|j \rangle}{m (E_j - E_i)}$$

$$= \sum_j \frac{1}{i\hbar} \left( \frac{i\hbar \langle l|p_x|j \rangle}{m (E_j - E_l)} \langle j|p_x|l \rangle - \langle l|p_x|j \rangle \frac{i\hbar \langle j|p_x|l \rangle}{m (E_l - E_j)} \right) =$$

$$= \sum_j \frac{2}{m} \frac{\langle l|p_x|j \rangle \langle j|p_x|l \rangle}{(E_j - E_l)} = \sum_j \frac{2}{m} \frac{|\langle l|p_x|j \rangle|^2}{(E_j - E_l)}$$

Ostatecznie mamy więc:

Reguła sum  
Thomasa-Reicha-Khuna

$$1 = \sum_j \frac{2}{m} \frac{|p_{j0}|^2}{(E_j - E_l)} = \sum_j \frac{2}{m} (E_j - E_l) |x_{j0}|^2 = \sum_j f_j$$

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_j^2 - \omega^2}$$

Wartości  $f_j$  zależą od konkretnych postaci funkcji falowych stanu początkowego i końcowego układu, ale ich suma jest unormowana do 1

Dodatek:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{i}{\hbar} [H, x] = -\frac{i}{\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} [\Delta, x] = \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} (\Delta x - x\Delta) = -\frac{i\hbar}{2m} (\nabla(1 + \nabla x) - x\Delta) = \\ &= -\frac{i\hbar}{2m} (\nabla_x + \nabla_x + x\nabla^2 - x\Delta) = -\frac{i\hbar}{2m} 2\nabla_x = \frac{p_x}{m} \end{aligned}$$

# Rezonans cyklotronowy w ujęciu kwantowym

Swobodny elektron o masie efektywnej  $m^*$  w zewnętrznym polu magnetycznym. Jako pierwszy rozwiązał ten problem kwantowo Landau (stąd poziomy Landau'a)

$$\hat{H} = \frac{1}{2m^*} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A})^2 \quad \text{gdzie } \mathbf{A} \text{ – potencjał wektorowy pola magnetycznego}$$
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B}$$

Założmy, że mamy pole magnetyczne  $\mathbf{B} \parallel \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{B}=[0,0,B]$ ,

Wybieramy potencjał wektorowy (np.) w postaci:  $\mathbf{A}=(-yB,0,0)$

Szukamy rozwiązania równania Schrödingera:

Równanie Schrödingera  
przybiera postać:

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$\frac{1}{2m^*} \left[ \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eBy \right)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi = E\Psi$$


Równanie to różni się od równania dla swobodnego elektronu pierwszym członem.

Szukamy rozwiązania w postaci:  $\Psi(x, y, z) = \varphi(y)e^{i(k_x x + k_z z)}$

Po podstawieniu i „skróceniu” przez czynnik wykładniczy:

$$\frac{1}{2m^*} \left[ (\hbar k_x - eBy)^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hbar^2 k_z^2 \right] \varphi(y) = E \varphi(y)$$

Dokonujemy podstawienia:  $\xi = y - \frac{\hbar k_x}{eB}$


$$\left[ \frac{1}{2m^*} \left( e^2 B^2 \xi^2 - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} \right] \varphi = E \varphi$$

Ostatnie równanie możemy zapisać w postaci:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} m^* \omega_c^2 \xi^2 \right] \varphi = E' \varphi$$

gdzie:  $E' = E - \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*}; \quad \omega_c = \frac{eB}{m^*}$

**Otrzymaliśmy równanie oscylatora harmonicznego o częstości własnej  $\omega_c$ .**

Rozwiązaniami tego równania są funkcje falowe oscylatora harmonicznego  $\varphi_n(\xi)$

Energie własne

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Stany elektronu swobodnego opisują liczby kwantowe  $k_x, k_y, k_z$ .

Elektron w polu magnetycznym opisują liczby kwantowe:  $n, k_z, k_x$

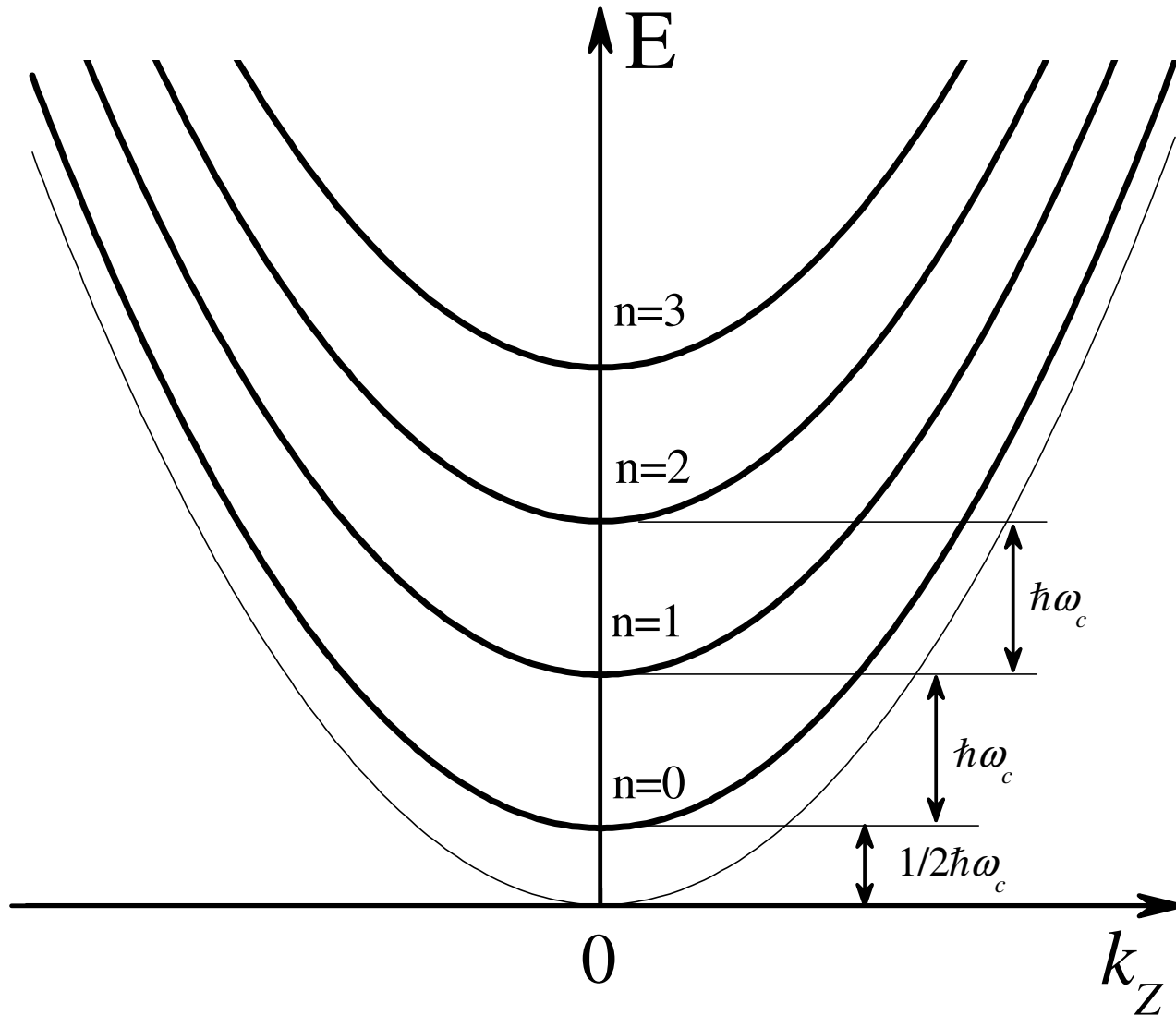
**Silna degeneracja, bo energia stanu nie zależy od  $k_x$ !**

**Dozwolone przejścia optyczne z  $\Delta n = \pm 1$ .**

**Oscylator może emitować lub pochłaniać energię  $\hbar \omega_c$ .**

Zależność energii od  $n, k_z$

$$E_n = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + (n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$$



Przyjrzyjmy się funkcji falowej elektronu swobodnego w polu magnetycznym

$$\Psi(x, y, z) = \varphi\left(y - \frac{\hbar k_x}{eB}\right) e^{i(k_x x + k_z z)}$$

$$y_0 = \frac{\hbar k_x}{eB} = L^2 k_x = \frac{v_x}{\omega_c} \quad L = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

$y_0$  – współrzędna punktu względem, którego zachodzą drgania z częstością  $\hbar\omega_c$

**$L$  – długość magnetyczna**  
lub klasyczny promień cyklotronowy

Dygresja:  $\frac{mv^2}{r} = eBv$

$$mvr = eBr^2$$

kwantowo  
najmniejszy moment pędu  $\Rightarrow$

$$\hbar = eBr^2$$

$$r = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$$

## Ruch elektronu w polu magnetycznym raz jeszcze

Siła Lorentza:  $\frac{d}{dt}(\hbar\vec{k}) = e(\vec{v} \times \vec{B})$

$$\vec{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k})$$

$$\frac{dE}{dt} = \nabla_{\vec{k}} E(\vec{k}) \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{v} (e\vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

Jeśli pole  $\mathbf{B}$  jest skierowane  
wzdłuż osi z, to  $E(\vec{k}) = \text{const}$

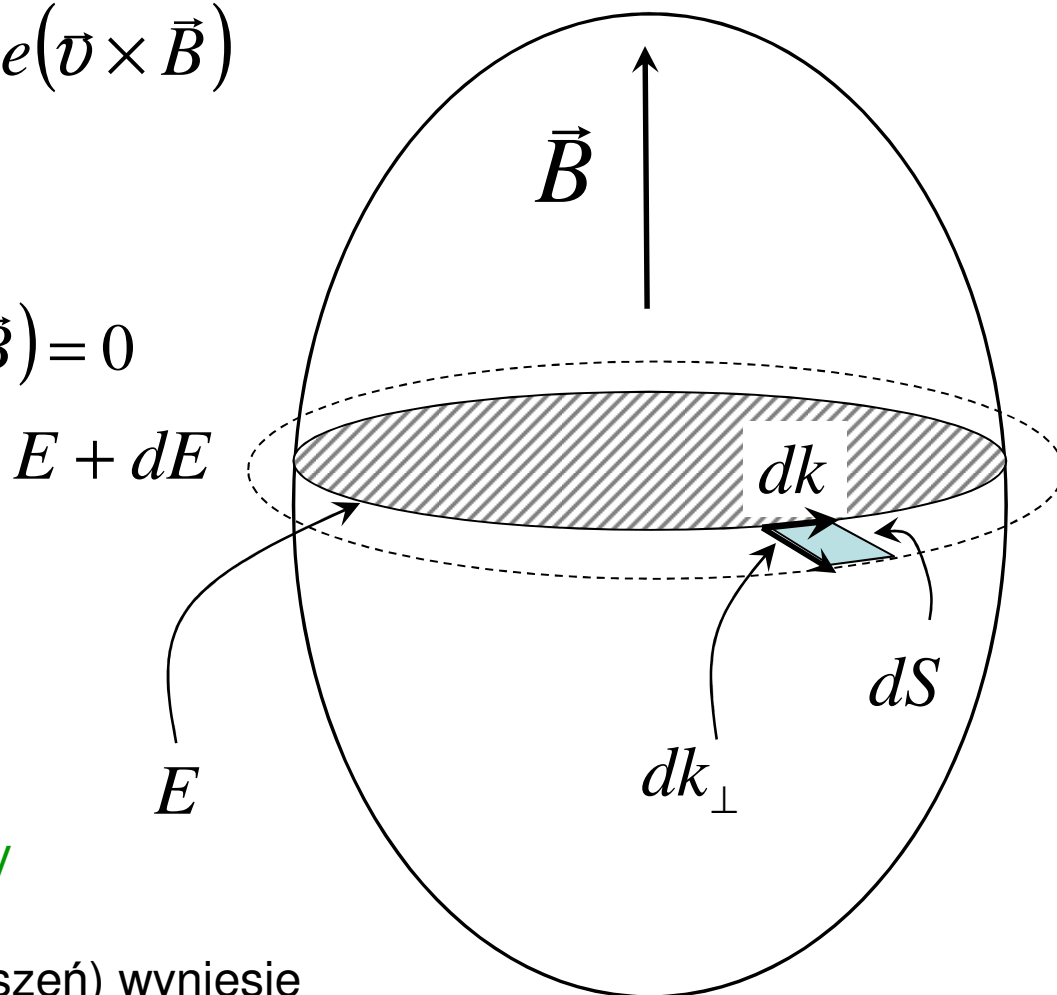
oznacza  $k_z = \text{const}$

Elektron porusza się po **orbicie**  
Wyznaczonej przez przecięcie  
powierzchni Fermiego i płaszczyzny  
prostopadłej do pola  $\mathbf{B}$

Okres obiegu elektronu (bez rozproszeń) wyniesie  
(rzutujemy równanie ruchu na płaszczyznę):

$$\hbar \frac{dk}{dt} = eB v_{\perp} \Rightarrow T = \frac{\hbar}{eB} \oint \frac{dk}{v_{\perp}} \equiv \frac{2\pi}{\omega_c}$$

$v_{\perp}$  - składowa prędkości w  
płaszczyźnie prostopadłej do  $\mathbf{B}$



Sumując przyczynki  $dk$  po okręgu o promieniu  $k_{\perp}$  dostajemy

$$\oint \frac{dk}{v_{\perp}} = \frac{m}{\hbar} \oint \frac{dk}{k_{\perp}} = \frac{2\pi}{\hbar} m \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{\omega_c} = \frac{\hbar}{eB} \frac{2\pi}{\hbar} m_c^* \quad \Rightarrow \quad \omega_c = \frac{eB}{m_c^*}$$

$m_c^*$  - cyklotronowa masa efektywna

Użyteczną geometryczną definicję masy cyklotronowej można uzyskać korzystając ze związku

$$v_{\perp} = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk_{\perp}} \quad (\text{patrz prędkość grupowa elektronu w kryształach – wykład w poprzednim semestrze})$$

$$m_c^* = \frac{\hbar}{2\pi} \oint \frac{dk}{v_{\perp}} = \frac{\hbar^2}{2\pi} \oint \frac{dk_{\perp}}{dE} dk = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial E}$$

$S$  – powierzchnia zamknięta przez orbitę w płaszczyźnie prostopadłej do  $\mathbf{B}$

**Tak zdefiniowana masa jest funkcją  $E$  i  $k_z$  zachowujących się w polu magnetycznym! W przypadku dowolnej zależności dyspersyjnej jest ona wygodniejsza niż tensorowa masa efektywna.**

Wyznaczając  $m_c$  z pomiarów rezonansu cyklotronowego przy różnej orientacji pola magnetycznego względem osi krystalograficznych można w zasadzie odtworzyć kształt powierzchni stałej energii  $E(\mathbf{k})$ !

Jeżeli powierzchnia izoenergetyczna jest sferą  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$S = \pi k_{\perp}^2 = \pi(k^2 - k_z^2) = \pi\left(\frac{2mE}{\hbar^2} - k_z^2\right)$$

Stąd

$$m_c^* = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial E} \left\{ \pi \left( \frac{2mE}{\hbar^2} - k_z^2 \right) \right\} = m$$

**Czyli rzeczywiście rezonans cyklotronowy może być użyteczny!**

# Gęstość stanów w polu magnetycznym

Rozważmy prostopadłościan o skończonych wymiarach

(rozmiar podstawowy kryształu)  $L_x, L_y, L_z$ .


$$\Psi(x, y, z) = \varphi(y) e^{i(k_x x + k_z z)}$$

Żądamy, aby wzdłuż osi x i z funkcja falowa spełniała warunek periodyczności:



$$\Psi(x, y, z) = \Psi(x \pm L_x, y, z \pm L_z)$$

Kolejne wartości różnią się się więc o:


$$k_x = \frac{2\pi}{L_x} n_x \quad k_z = \frac{2\pi}{L_z} n_z$$

$$\frac{2\pi}{L_x}, \frac{2\pi}{L_z}$$

$n_x, n_z$  – dowolne liczby całkowite

Nie nakładamy warunków periodyczności wzdłuż osi y, ponieważ  $\psi$  nie jest periodyczną funkcją y. Jednak...

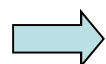
rozwiązania 
$$\Psi(x, y, z) = \varphi\left(y - \frac{\hbar k_x}{eB}\right) e^{i(k_x x + k_z z)}$$

istnieją dla

$$0 \leq y_0 = \frac{\hbar k_x}{eB} \leq L_y$$

Środek okręgu nie może wyjść poza obszar podstawowy kryształu

$$\Omega = L_x L_y L_z$$



**Ograniczenie na  $k_x$ !**

Zatem:

Jednocześnie krotność degeneracji poziomów względem  $k_x$  jest więc skończona równa

$$\frac{\hbar k_x^{\max}}{eB} = L_y \quad \Downarrow \quad n_x = \frac{L_x}{2\pi} k_x^{\max}$$
$$n_x = \frac{L_x}{2\pi} \frac{eB}{\hbar} L_y = \frac{eB}{h} L_x L_y = \frac{eB}{h} S$$

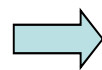
Obliczmy liczbę stanów pomiędzy dwiema orbitami, różniącymi się o energię  $\Delta E = \hbar \omega_c$

Skorzystajmy ze wzoru

$$m_c^* = \frac{\hbar^2}{2\pi} \frac{\partial S}{\partial E}$$

Jeśli przyjmiemy

$$\Delta E = \hbar \omega_c$$



różnica powierzchni przekroju pomiędzy sąsiednimi orbitami

$$\Delta S = \frac{2\pi m_c^*}{\hbar^2} \hbar \omega_c = \frac{2\pi eB}{\hbar}$$

Zatem liczba stanów pomiędzy dwiema orbitami (na jednym poziomie Landaua)

$$\frac{2\pi eB}{\hbar} \frac{L_x L_y}{(2\pi)^2} = \frac{eB}{h} L_x L_y$$

$$\frac{eB}{h}$$

- degeneracja poziomu Landau'a (rośnie liniowo ze wzrostem indukcji  $B$ !)

$$\rho(k) = \frac{1}{(2\pi)^3}$$

Gęstość stanów dla pasma parabolicznego w przestrzeni jedno-, dwu-, i trój-wymiarowej (*przypomnienie*)

D=1	D=2	D=3
$N(E) = 2k(E)\rho_k$ $= k(E) \frac{2 \cdot 2}{2\pi}$	$N(E) = \pi[k(E)]^2 \rho_k$ $= \pi[k(E)]^2 \frac{2}{(2\pi)^2}$	$N(E) = \frac{4}{3}\pi[k(E)]^3 \rho_k$ $= \frac{4}{3}\pi[k(E)]^3 \frac{2}{(2\pi)^3}$
$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$		
$k = \left(\frac{2m^* E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}}$	$k^2 = \frac{2m^* E}{\hbar^2}$	$k^3 = \left(\frac{2m^* E}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}}$
$N(E) = \left(\frac{2m^* E}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{4}{2\pi}$	$N(E) = \pi \frac{2m^* E}{\hbar^2} \frac{2}{(2\pi)^2}$	$N(E) = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2m^* E}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{2}{(2\pi)^3}$
$\rho(E) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{E}}$	$\rho(E) = \frac{1}{\pi} \frac{m^*}{\hbar^2}$	$\rho(E) = \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$

## Gęstość stanów w polu magnetycznym

Obliczmy liczbę stanów zawartych w przedziale energii

od  $(n + 1/2)\hbar\omega_c$  do  $E$

$$\frac{L_z}{2\pi} 2|k_z| = \frac{L_z}{2\pi} \frac{2\sqrt{2m^*}}{\hbar} [E - (n + 1/2)\hbar\omega_c]^{1/2}$$

Liczbę stanów  $k_z$  o energiach mniejszych niż  $E$  otrzymamy sumując po wszystkich całkowitych wartościach  $n \geq 0$  (takich aby wyrażenie pod pierwiastkiem było nieujemne)

$$n_z = \frac{L_z}{2\pi} \frac{2\sqrt{2m^*}}{\hbar} \sum_{n=0}^{n_{\max}} [E - (n + 1/2)\hbar\omega_c]^{1/2}$$

Na każdy z tych stanów  $k_z$  przypada  $n_x$  stanów  $k_x$

$$n_x = \frac{eB}{h} L_x L_y = \frac{m^* \omega_c}{2\pi\hbar} L_x L_y$$

Zatem całkowita liczba stanów przypadająca na objętość  $\Omega = L_x L_y L_z$  wynosi:

$$N(E) = \frac{(m^*)^{3/2} \omega_c}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^2}} L_x L_y L_z \sum_{n=0}^{n_{\max}} [E - (n + 1/2)\hbar\omega_c]^{1/2}$$

$$\rho(E) = \frac{1}{\Omega} \frac{dN(E)}{dE} = \frac{(m^*)^{3/2}}{\sqrt{2\pi^2 \hbar^3}} \frac{\hbar\omega_c}{2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} [E - (n + 1/2)\hbar\omega_c]^{-1/2}$$

## Gęstość stanów na poziomach Landau'a (3D)

Bez pola magnetycznego, dla pasma parabolicznego w trzech wymiarach (bez spinu):

$$\rho_0(E) = \frac{1}{4\pi^2} \left( \frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{E}$$

W polu magnetycznym, dla pasma parabolicznego w trzech wymiarach:

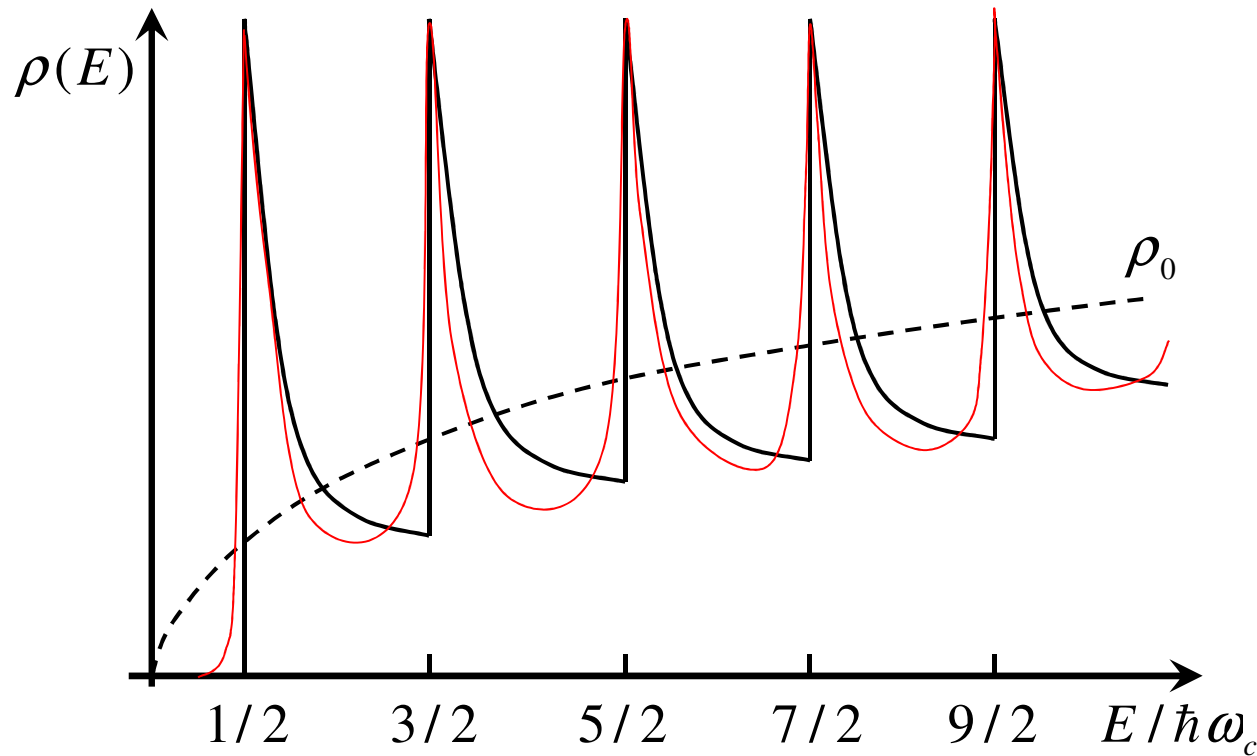
$$\rho(E) = \frac{eB\sqrt{2m^*}}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - (n + 1/2)\hbar\omega_c}}$$

Czyli mamy osobliwości dla:  $E = (n + 1/2)\hbar\omega_c$

**Gęstość stanów zależy od natężenia pola magnetycznego!**

$$\rho(E) = \frac{eB\sqrt{2m^*}}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - (n + 1/2)\hbar\omega_c}}$$

$$\rho(E) = \frac{eB\sqrt{2m^*}}{(2\pi\hbar)^2} \sum_{n=0}^{n_{\max}} \frac{1}{\sqrt{E - (n + 1/2)\hbar\omega_c}}$$



Jeśli wziąć pod uwagę tłumienie to osobliwości zaczynają przypominać krzywe Lorentza (na czerwono)

$$\frac{1}{\sqrt{E - E_0}} \rightarrow \frac{\sqrt{\Gamma^2 + (E - E_0)^2} + E - E_0}{2[\Gamma^2 + (E - E_0)^2]}$$

## Pomiary rezonansu cyklotronowego:

$$\Delta E \cdot \tau \approx \hbar$$

↑  
szerokość  
poziomu  
energetycznego

↖  
czas życia na poziomie  
(czas życia pędowy)

Warunki obserwacji rezonansu cyklotronowego:

$$\Delta E < \hbar \omega_c \Rightarrow \hbar \omega_c > \frac{\hbar}{\tau} \Rightarrow \omega_c \tau > 1$$

Czas życia jest związany z ruchliwością nośników

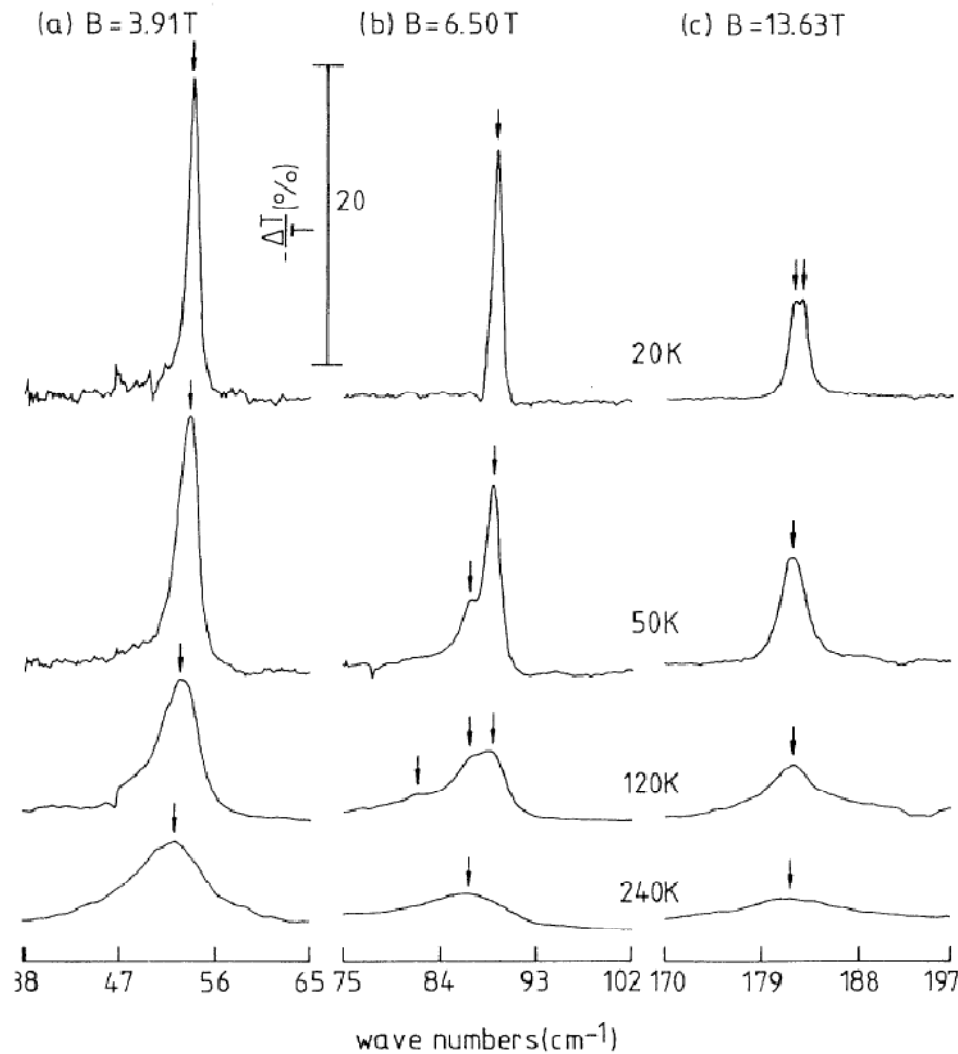
$$\tau = \frac{\mu m^*}{e}$$

Zatem

$$\omega_c \tau = \frac{e B_r}{m^*} \frac{\mu m^*}{e} = \mu B_r > 1$$

Im wyższa ruchliwość  
tym węższe linie dla  
pola rezonansowego!

# GaAs



$\mu_{60K} = 160000 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$   
 $\mu_{300K} = 8000 \text{ cm}^2/(\text{Vs})$

**FIG. 1.** Temperature-dependent cyclotron resonances of electrons in bulk GaAs at magnetic-field strengths (a)  $B=3.91$  T, (b)  $6.50$  T, and (c)  $13.63$  T. The arrows mark resonance positions.

# Poziomy Landau'a z uwzględnieniem spinu

Elektron swobodny ma moment magnetyczny.

Energia związana z tym momentem w polu magnetycznym:

$$E_{\mu} = \frac{1}{2} g \frac{e\hbar}{2m} B = \frac{1}{2} g \mu_B B$$

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \quad \begin{array}{l} g \text{ - czynnik Landego} \\ \text{- magneton Bohra} \end{array}$$

Dla swobodnego elektronu

$$g=2$$

W półprzewodnikach na skutek oddziaływania spin-orbita

$$g \neq 2$$

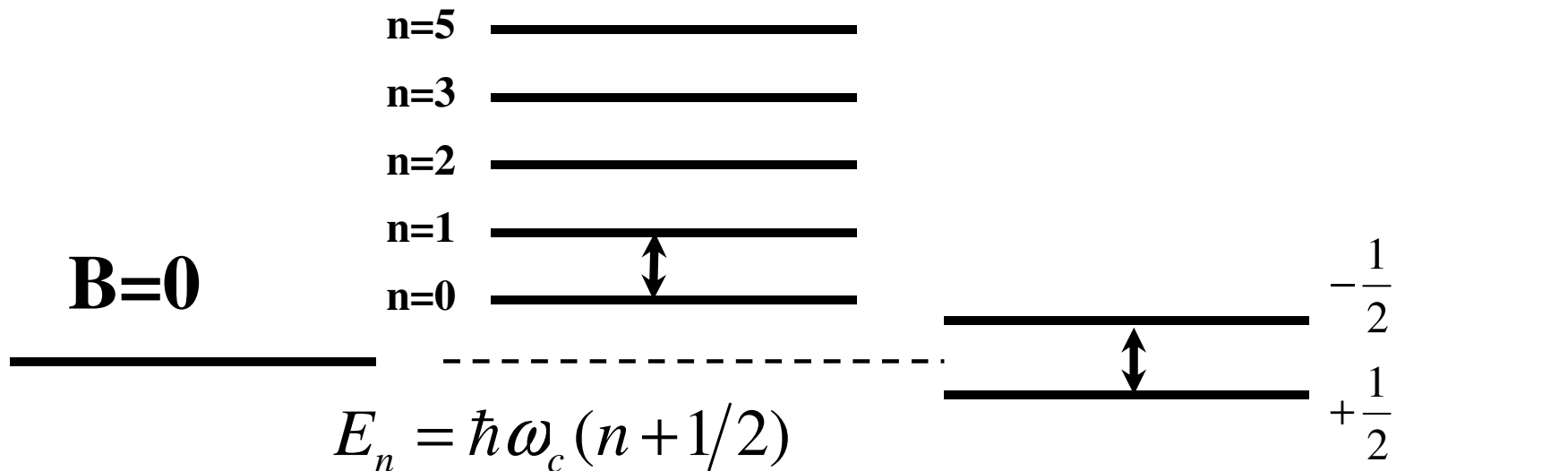
np. dla InSb  $g_e = -58$

dla GaAs  $g_e = -0.44$

Po uwzględnieniu spinu w polu magnetycznym każdy poziom ulegnie rozszczepieniu:

$$E_{n,s,k_z} = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m^*} + (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_c \pm \frac{1}{2} g \mu_B B$$

# Elektron swobodny w polu magnetycznym



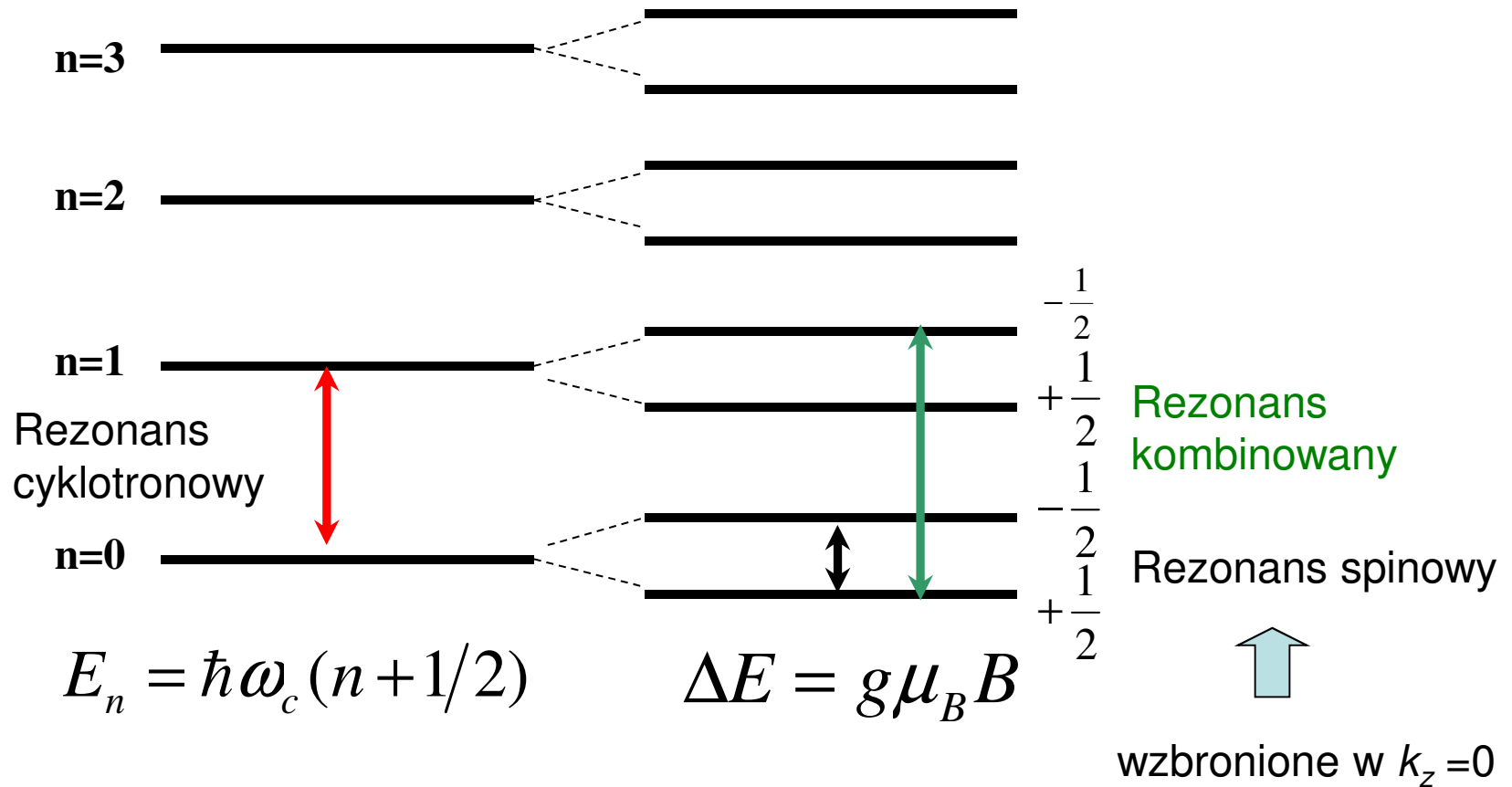
$$\Delta E = g\mu_B B \quad g = 2$$

$$\mu_B = 0,058 \text{ meV/T}$$

$$\hbar\omega_c = \frac{\hbar e}{m_0} B$$

$$\frac{\hbar e}{m_0} = 0,116 \text{ meV/T}$$

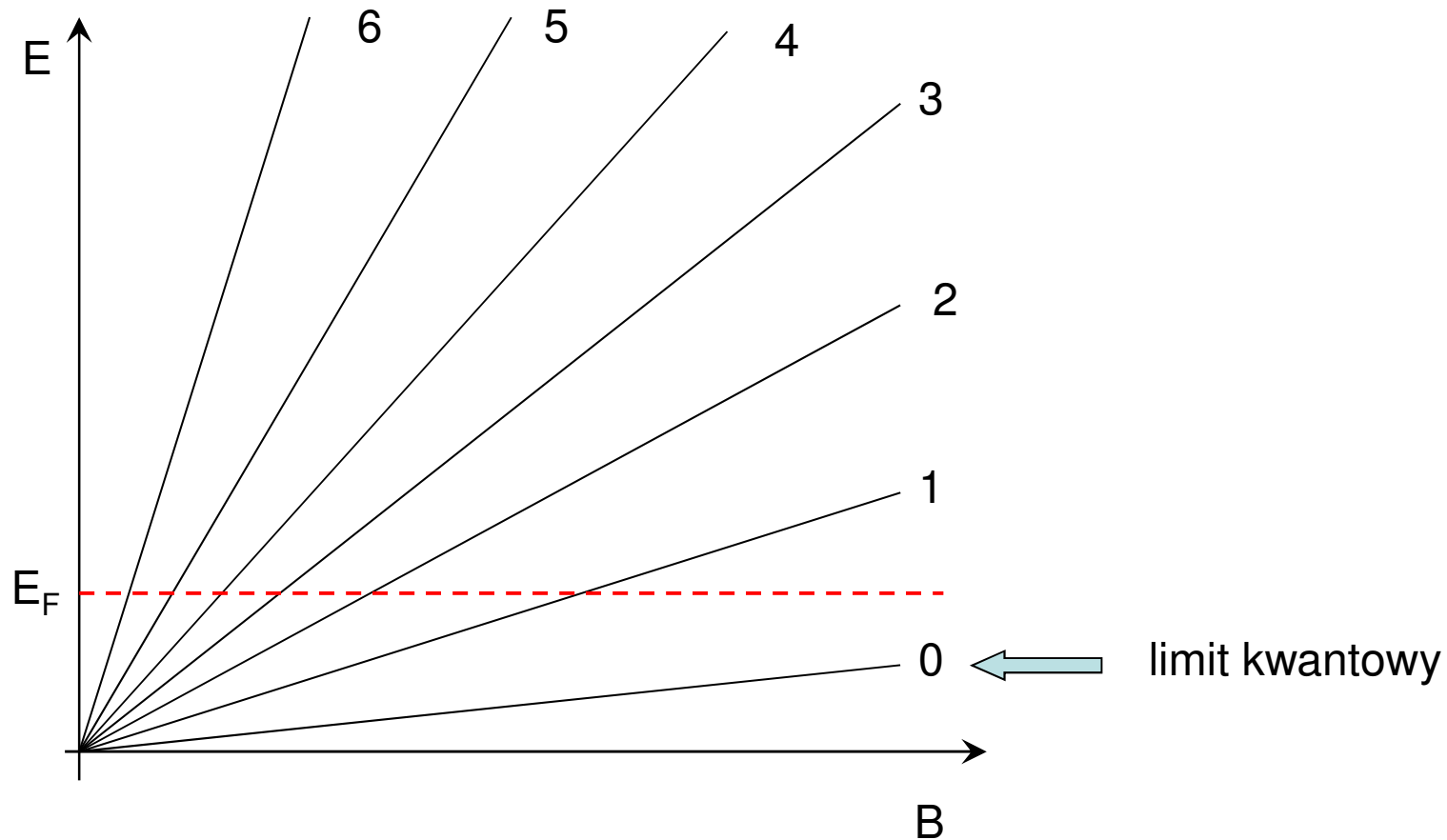
# W półprzewodnikach



$$\omega_c = \frac{eB}{m^*}$$

Jeśli pasmo nieparaboliczne – zależność  $\omega_c$  od pola nieliniowa! RC - metoda badania nieparaboliczności!

Limit bardzo silnych pól magnetycznych – wszystkie nośniki obsadzają najniższy poziom Landau’ a. Jest to efekt wzrostu degeneracji ze wzrostem natężenia pola magnetycznego...



Oscylacje poziomu Fermiego...