

# Nośniki swobodne w półprzewodnikach

# Półprzewodniki

Masa elektronu  
swobodnego

$$m_0$$



Masa efektywna

$$m^*$$

Oprócz wkładu swobodnych nośników musimy uwzględnić inne mechanizmy – np. wkład do polaryzacji od elektronów związanych (przejścia pasmowe) zajmiemy się nimi dokładniej później, teraz zaznaczymy tylko ich istnienie...

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{inne} + \vec{P}_{sn}$$

$\vec{P}_{sn}$  - wkład od swobodnych nośników

$\vec{P}_{inne}$  - wkład od innych procesów

(zakładamy tu, że jest on stały w obszarze rozważanych częstości)

$$D = \epsilon_{opt} \epsilon_0 E - \frac{Ne^2 E}{m^* (\omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$\epsilon_r = \epsilon_{opt} - \frac{Ne^2}{m^* \epsilon_0} \frac{1}{(\omega^2 + i\gamma\omega)} = \epsilon_{opt} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\gamma\omega} \right)$$

$$\epsilon_{opt} = n^2$$



współczynnik załamania dla niedomieszkowanego półprzewodnika – przezroczyste medium dla podczerwieni (ekstynkcja  $\kappa=0$ )

To teraz częstość plazmowa

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_{opt} \epsilon_0 m^*}}$$

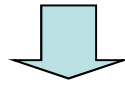
Ważna różnica w porównaniu z metalem

# Metale i półprzewodniki...

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_{opt}\epsilon_0 m^*}}$$

**Aluminium**

$$\begin{aligned}\epsilon_{opt} &= 1 \\ m_0 &= 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \\ n &= 18.1 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}\end{aligned}$$

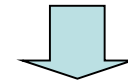


$$\hbar\omega_p \approx 15.8 \text{ eV}$$

**Ultrafiolet!**

**GaAs**

$$\begin{aligned}\epsilon_{opt} &= 10.88 \\ m^* &= 0.067 m_0 \\ n &= 10^{18} \text{ cm}^{-3}\end{aligned}$$



$$\hbar\omega_p \approx 50 \text{ meV}$$

**Łatwo sterować częstość  
plazmową wykorzystując  
domieszkowanie!**

# Silnie domieszkowane półprzewodniki

Interesujemy się sytuacją

$$\omega > \omega_p$$

W półprzewodnikach w temperaturze pokojowej  $\tau \sim 10^{-13} \text{ s}$

Dla podczerwieni, np.  $\lambda = 10 \mu\text{m}$

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{6.28 \times 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10 \times 10^{-6} \text{ m}} = 20 \times 10^{13} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega\tau \gg 1$$

Zatem możemy dokonać przybliżenia dla części rzeczywistej funkcji dielektrycznej:

Część urojona funkcji dielektrycznej:

$$\epsilon_1 = \epsilon_{opt} \left( 1 - \frac{\omega_p^2 \tau^2}{1 + \omega^2 \tau^2} \right) \approx \epsilon_{opt}$$

$$\epsilon_2 = \frac{\epsilon_{opt} \omega_p^2 \tau}{\omega(1 + \omega^2 \tau^2)} \approx \frac{\epsilon_{opt} \omega_p^2}{\omega^3 \tau} \ll \epsilon_1$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2} \Rightarrow n = \sqrt{\epsilon_{opt}}$$

Ośrodek słabo absorbujący (już było...)

$$K = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( -\epsilon_1 + (\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)^{1/2} \right)^{1/2} \Rightarrow K = \frac{\epsilon_2}{2n}$$

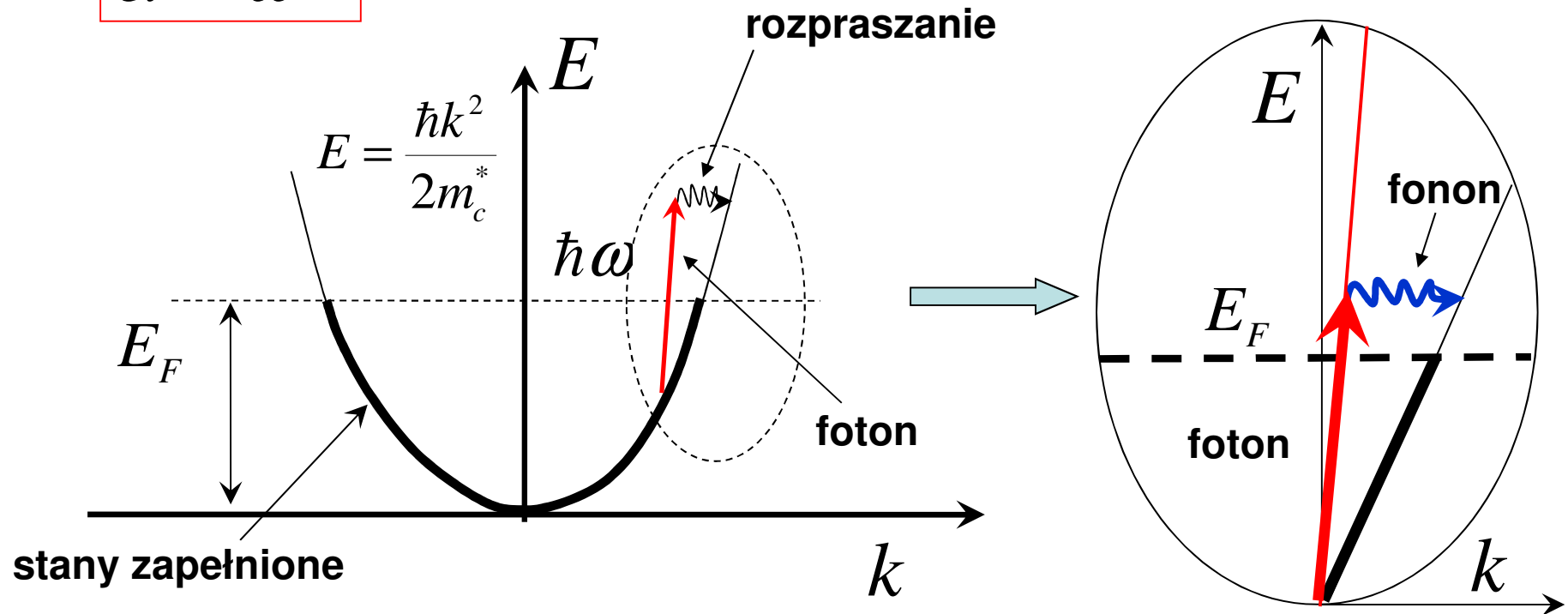
## Absorpcja na swobodnych nośnikach

$$\alpha = \frac{2\kappa\omega}{c} = \frac{\epsilon_{opt}\omega_p^2}{nc\omega^2\tau} = \frac{Ne^2}{m^*\epsilon_0nc\tau} \frac{1}{\omega^2}$$

Typowo w półprzewodnikach obserwuje się zależność

$$\alpha \propto \omega^{-p} \quad \text{gdzie wykładnik } p = 2-3$$

Zachowanie energii i pędu w procesie absorpcji



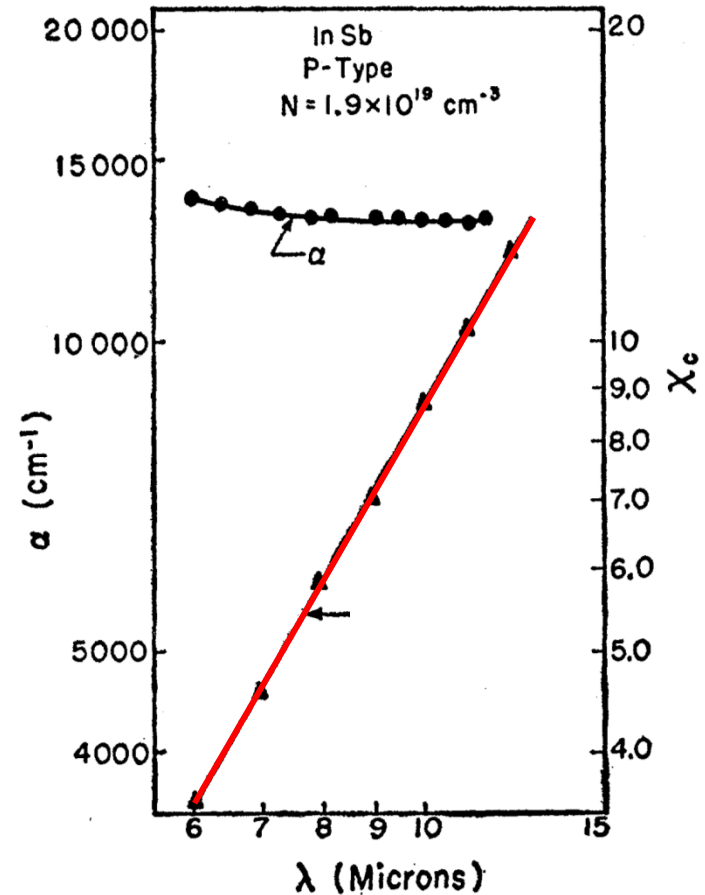
**Foton ma bardzo mały pęd, żeby więc spełniona była zasada zachowania pędu konieczny jest proces rozpraszania elektronu na fononach lub domieszkach!!!**

# Wyniki doświadczenia

## Absorpcja w podczerwieni

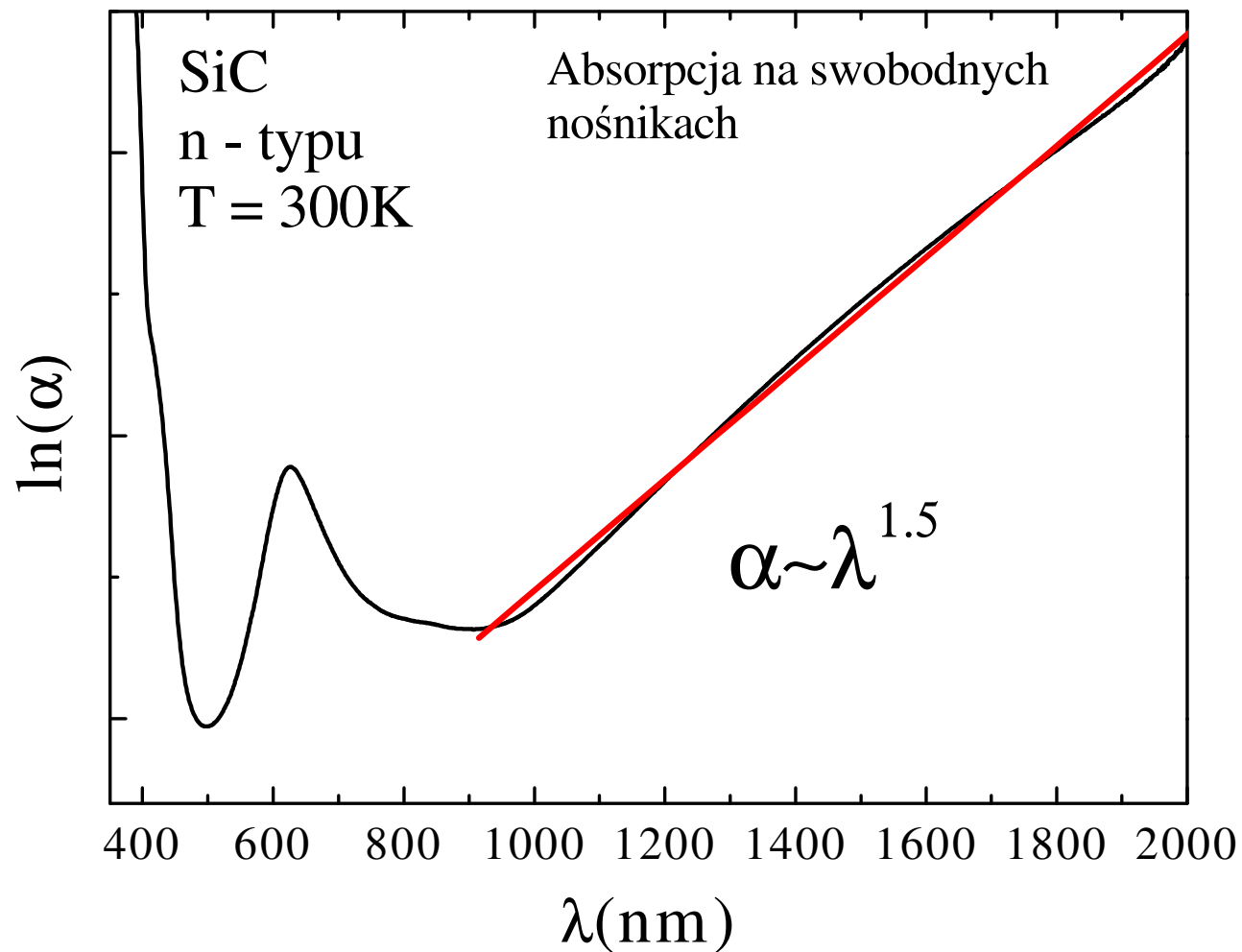
$$\alpha \sim \frac{1}{\omega^p} \sim \lambda^p$$

FIG. 7. Absorption coefficient,  $\alpha$ , and susceptibility,  $\chi_c$ , vs wavelength for the *p*-type indium antimonide sample of Fig. 6.



W. G. Spitzer, H.Y. Fan, Phys. Rev. **106**, 882 (1957)

# Absorpcja na swobodnych nośnikach w SiC



# Porównanie widma odbicia dla metali i półprzewodników



# Współczynnik odbicia

Zaniedbując tłumienie ( $\gamma=0$ )

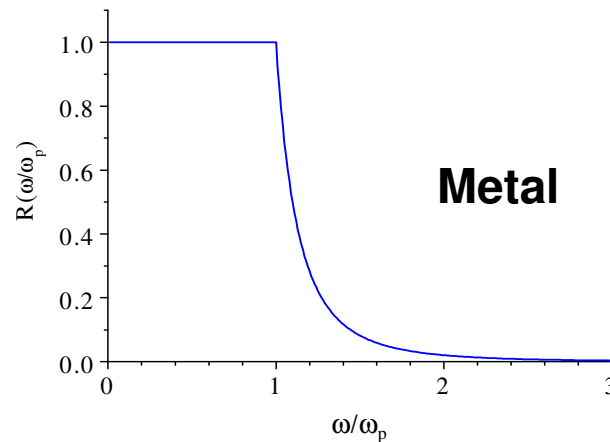
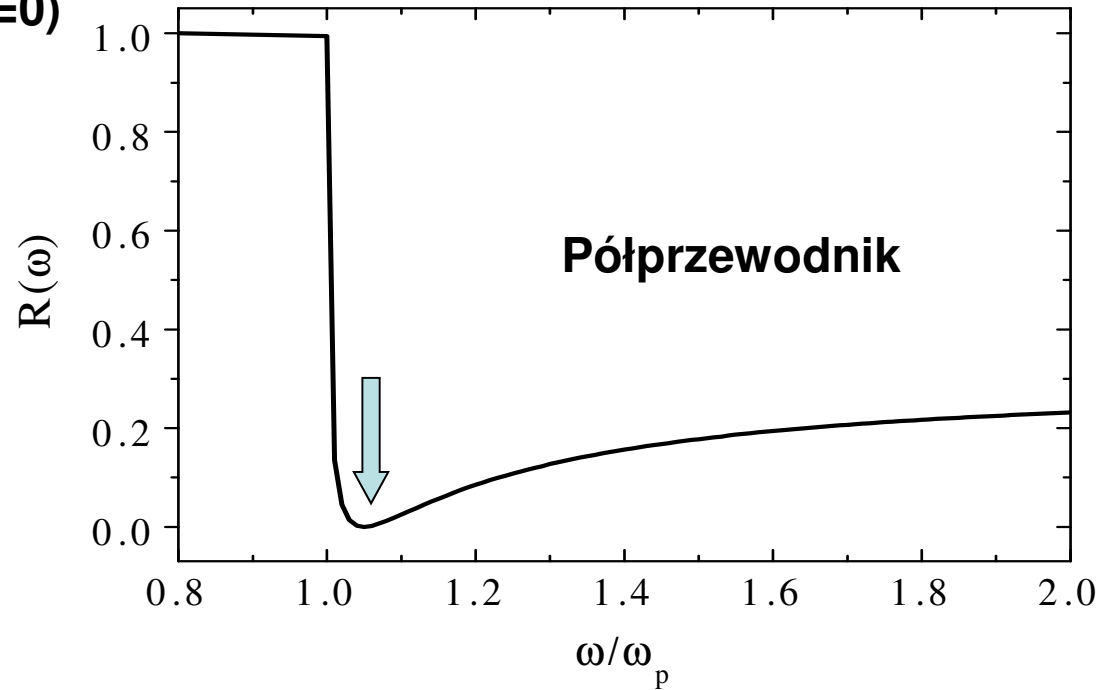
$$\epsilon_r = \epsilon_{opt} \left( 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right)$$

Dla

$$\omega \geq \omega_p \quad \epsilon_r \geq 0$$

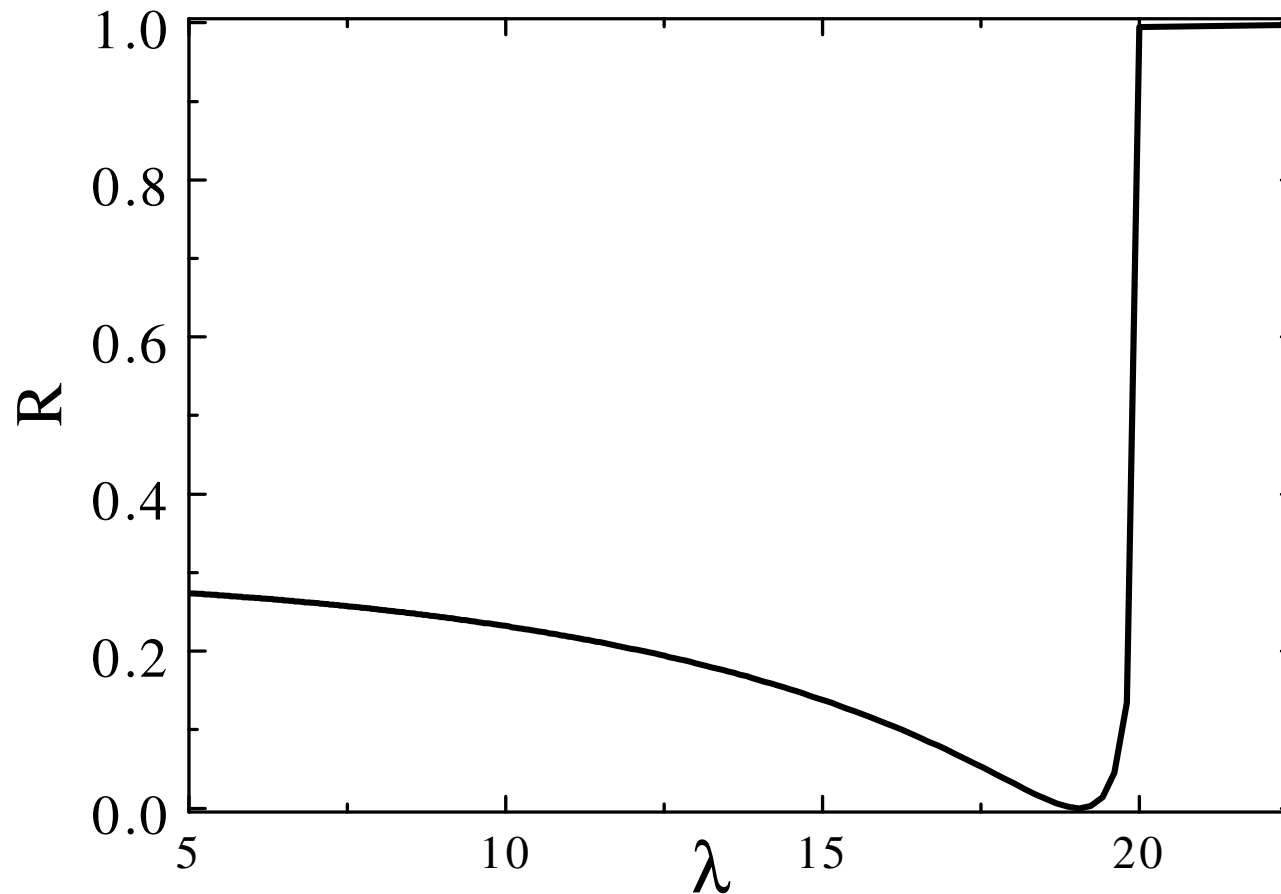
$$R(\omega) = \left( \frac{\sqrt{\epsilon_r(\omega)} - 1}{\sqrt{\epsilon_r(\omega)} + 1} \right)^2$$

Gdzie lokuje się minimum odbicia (w podczerwieni) dla silnie domieszkowanego półprzewodnika...



Monotoniczny spadek...

**Możemy też przedstawić zależność współczynnik odbicia od długości fali**



**Żeby porównać się z doświadczeniem, trzeba dodać tłumienie –  
Wtedy krawędź plazmowa się rozmyje....**

# Silnie domieszkowane w InSb

Odbicie światła w podczerwieni

$$R = \left| \frac{\tilde{n} - 1}{\tilde{n} + 1} \right|^2 = \frac{(n - 1)^2 + \kappa^2}{(n + 1)^2 + \kappa^2}$$

Wstawiamy odpowiednie funkcje z  
tłumieniem i porównujemy z  
doświadczeniem...

Odbicie spada do zera  
gdy:

$$\omega^2 = \frac{\epsilon_{opt}}{\epsilon_{opt} - 1} \omega_p^2$$

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\epsilon_{opt} \epsilon_0 m^*}}$$

**Metoda wyznaczania  
masy efektywnej  
nośników!**

InSb

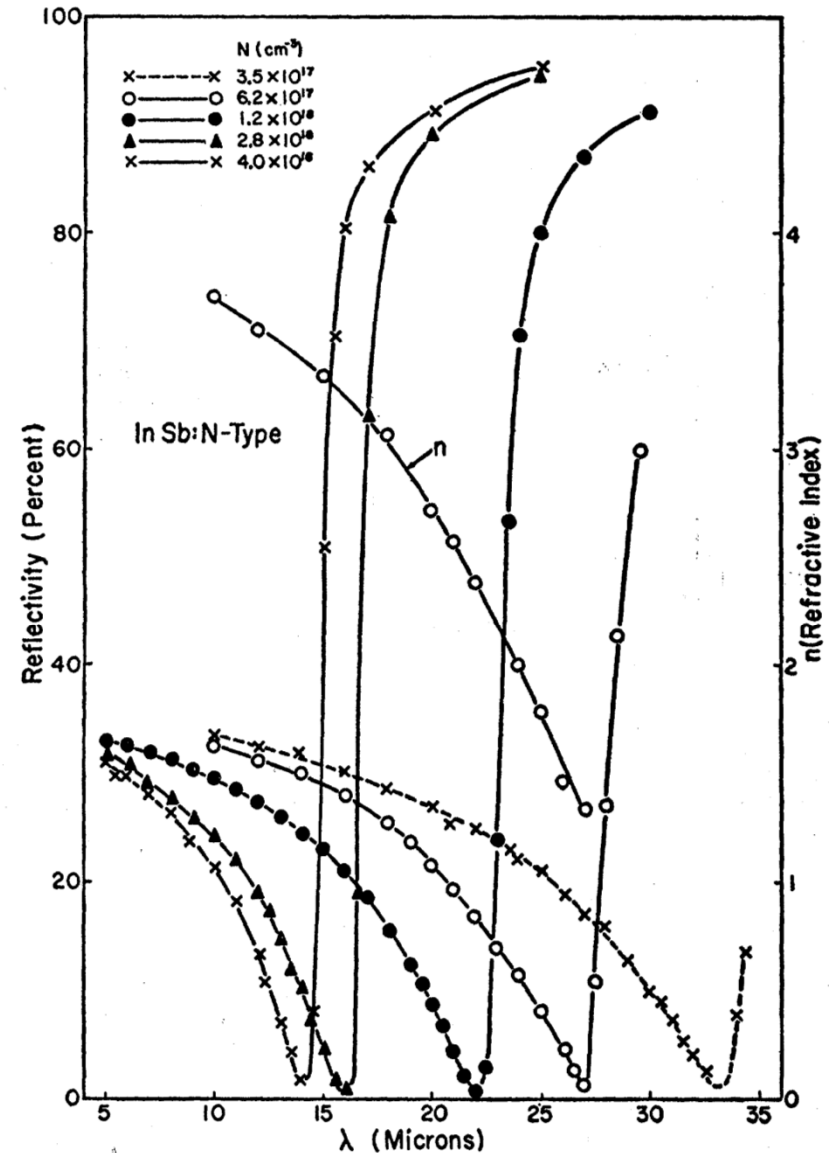


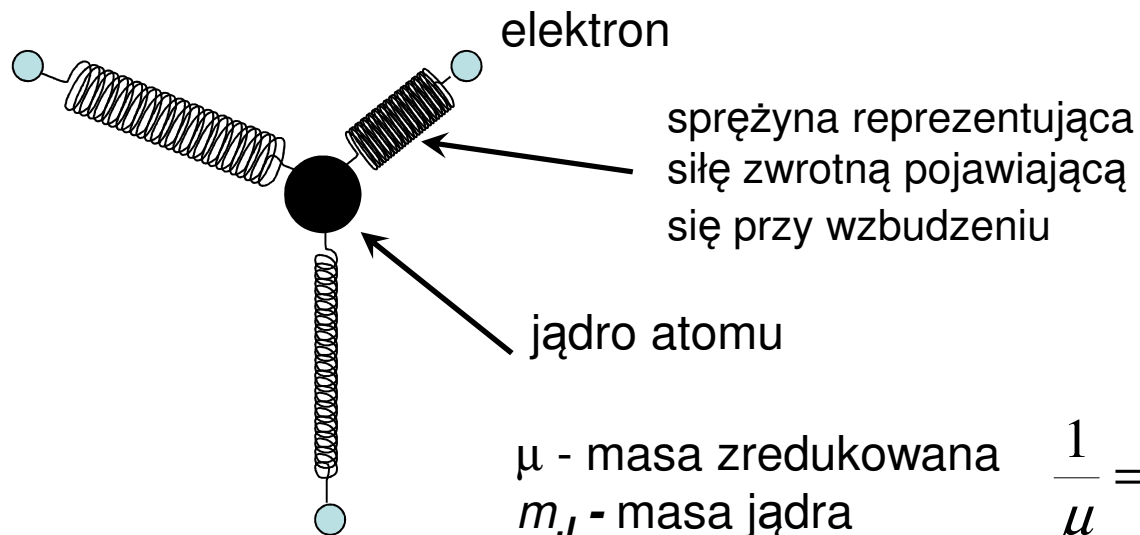
FIG. 8. Reflectivity vs wavelength for five *n*-type indium antimonide samples. The refractive index curve labeled *n* is for the sample with  $N = 6.2 \times 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ .

W. G. Spitzer, H.Y. Fan, Phys. Rev. **106**, 882 (1957)

# Oscylator harmoniczny (oscylujący dipol)

# Klasyczny opis oddziaływania światła z materią

Zakładamy, że w ośrodku (również półprzewodniku) zachodzą **różnego rodzaju wzbudzenia**, które można opisać przy użyciu modelu oscylatora harmonicznego. Model ten zakłada **istnienie momentów dipolowych**, bez wchodzenia w ich naturę. Okazuje się, że taki opis dobrze działa zarówno dla atomów, domieszek, defektów, jak też drgań sieci krystalicznej oraz wzbudzeń swobodnych nośników (co już częściowo pokazaliśmy na poprzednim wykładzie)...



$\mu$  - masa zredukowana  
 $m_J$  - masa jądra  
 $K$  - stała sprężystości

$$m_J \gg m_0 \Rightarrow \mu \approx m_0$$

**Częstotliwość rezonansowa:**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{\mu}}$$

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_J}$$

**Odpowiada to ruchowi elektronu wokół spoczywającego jądra...**

Rozsunięciu ładunku jądra i elektronu towarzyszy pojawienie się momentu dipolowego:

$$\vec{p} = q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

$\vec{r}_+$  - położenie ładunku dodatniego

$\vec{r}_-$  - położenie ładunku ujemnego

$$p = -e|\vec{r}_+ - \vec{r}_-| = -ex$$

$$p(t) = -ex(t)$$

$x(t)$  - odchylenie elektronu od „pozycji” równowagowej

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = -eE \quad (*)$$

Rozważmy oddziaływanie atomu z monochromatycznym promieniowaniem o częstości  $\omega$

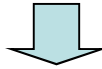
$$E(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi) = E_0 \operatorname{Re}(e^{-i(\omega t + \varphi)})$$

$$x(t) = X_0' \operatorname{Re}(e^{-i(\omega t + \varphi_1)})$$

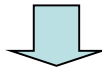
**Pole wymuszające:**  $E(t) = E_0 e^{-i\omega t}$  (czynniki fazowe w amplitudach)

**Szukamy rozwiązań postaci:**  $x(t) = X_0 e^{-i\omega t}$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = -eE$$



$$-m\omega^2 X_0 e^{-i\omega t} - im\gamma\omega X_0 e^{-i\omega t} + m\omega_0^2 X_0 e^{-i\omega t} = -eE_0 e^{-i\omega t}$$



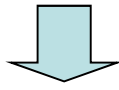
$$X_0 = \frac{-eE_0}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

**Rezonansowa polaryzacja zmienna w czasie, dla N obiektów w jednostce objętości:**

$$P_{rez} = Np(t) = -eNx(t) = \frac{Ne^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} E$$

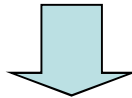
$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_{inne} + \vec{P}_{rez} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E} + \vec{P}_{rez}$$



$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

**Część rzeczywista i urojona  
funkcji dielektrycznej**



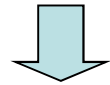
$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$



**W granicy częstotliwości dążących do zera:**

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$



$$\varepsilon_r(0) \equiv \varepsilon_{\text{st}} = 1 + \chi + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2}$$

**Definicja statycznej stałej dielektrycznej**

**W granicy bardzo dużych częstotliwości:**

$$\varepsilon_r(\infty) \equiv \varepsilon_{\infty} = 1 + \chi$$

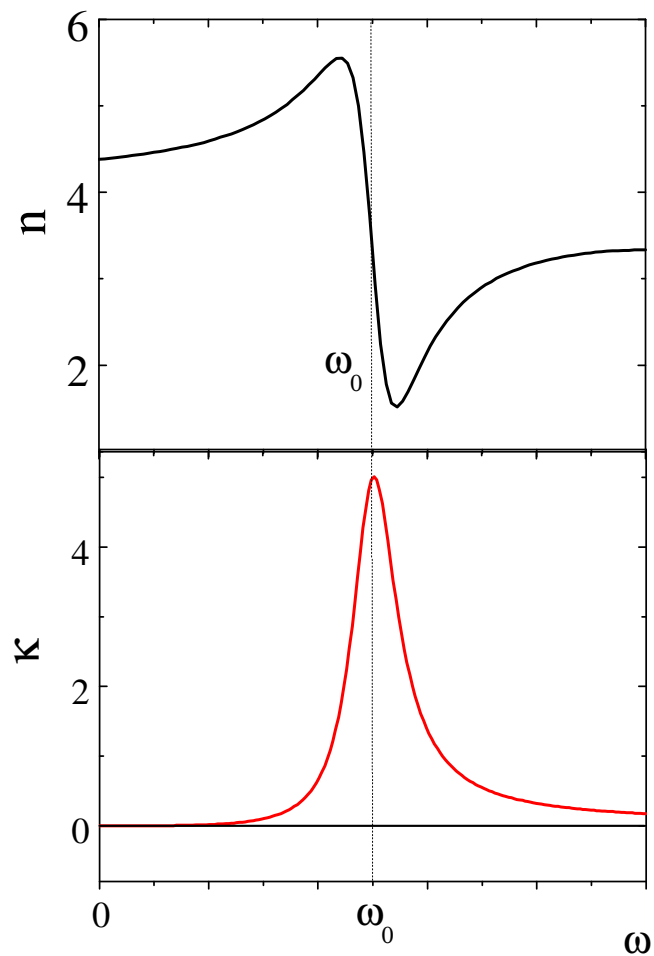
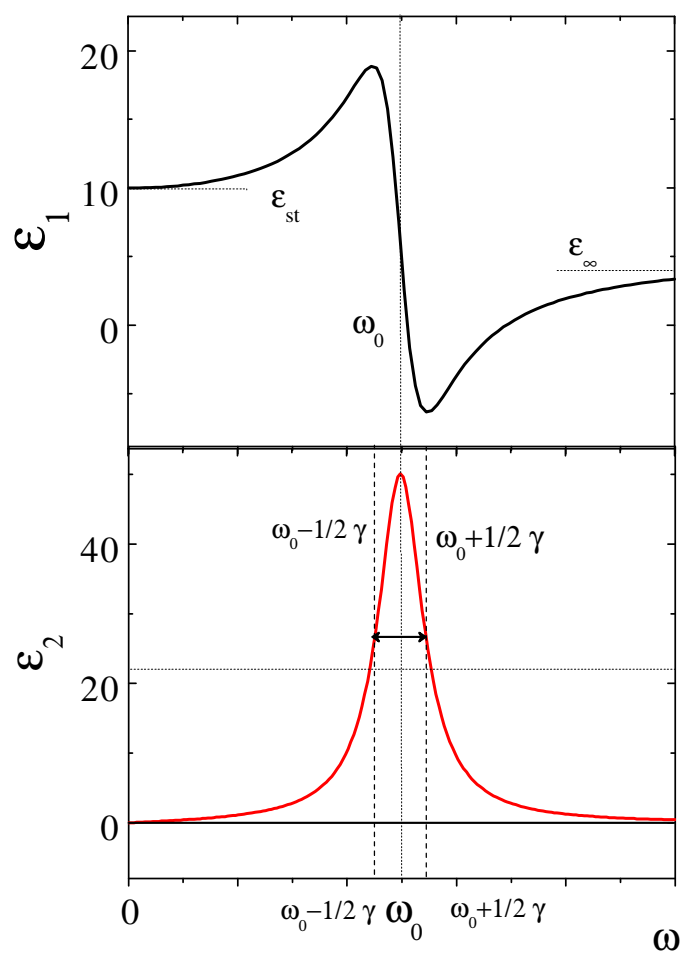
**Stąd** 
$$\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_{\infty} = \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega_0^2}$$



$$\varepsilon_r(\omega) = \varepsilon_{\infty} + (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_{\infty}) \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_\infty) \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_\infty) \omega_0^2 \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$



## Lorentzowski kształt linii

$$\varepsilon_1(\omega) = \varepsilon_\infty + (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_\infty) \frac{\omega_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

$$\varepsilon_2(\omega) = (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_\infty) \omega_0^2 \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma\omega)^2}$$

Przybliżenie blisko rezonansu:

$$\omega_0^2 - \omega^2 \cong 2\omega_0\Delta\omega \quad \text{gdzie} \quad \Delta\omega = \omega - \omega_0$$



$$\varepsilon_1(\Delta\omega) = \varepsilon_\infty - (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_\infty) \frac{2\omega_0\Delta\omega}{4(\Delta\omega)^2 + (\gamma)^2}$$

$$\varepsilon_2(\Delta\omega) = (\varepsilon_{\text{st}} - \varepsilon_\infty) \frac{\gamma\omega_0}{4(\Delta\omega)^2 + (\gamma)^2}$$

**Lorentzowski  
kształt linii**

# Złożenie wielu różnych oscylatorów

$$\vec{P}_{rez} = \frac{Ne^2}{m} \sum_j \frac{1}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega} \vec{E}$$

Wkład do polaryzacji  
od różnych przejść

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{1}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

Funkcja dielektryczna

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m} \sum_j \frac{f_j}{\omega_{j0}^2 - \omega^2 - i\gamma_j\omega}$$

$f_j$  - siła oscylatora

Koncepcję siła oscylatora można wyjaśnić na gruncie mechaniki kwantowej. Można pokazać, że

W praktyce wkład od poszczególnych oscylatorów różni się. Wprowadzamy więc „siłę oscylatora”  $f_j$  dla każdego z nich...

$$\sum_j f_j = 1$$

# Hipotetyczny półprzewodnik...

