

Optyka instrumentalna

wykład 2

7 marca 2019

Podsumowanie

1. Równanie falowe

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad P = P(E)$$

2. Monochromatyczna fala płaska

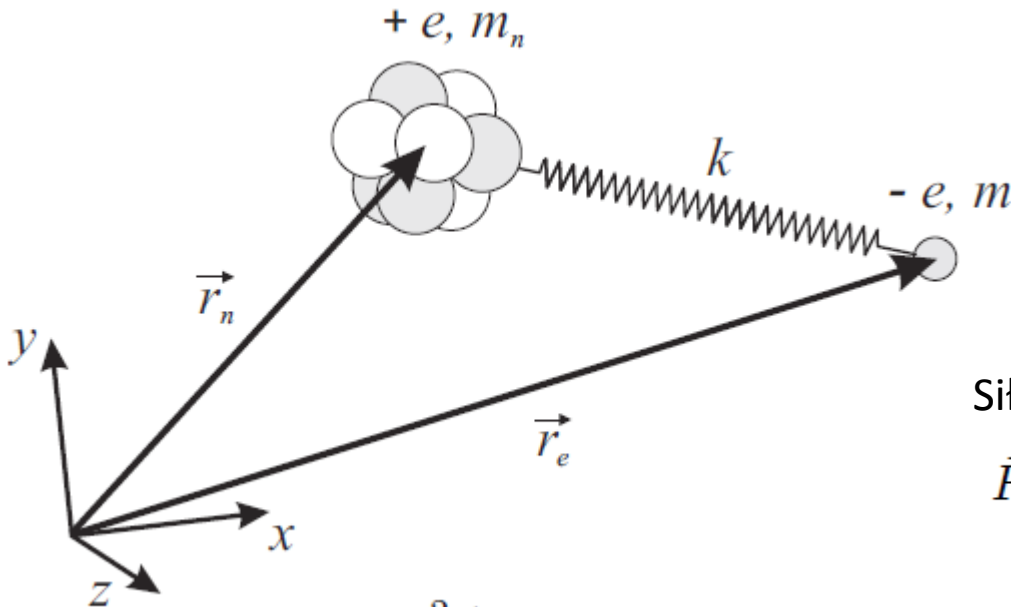
$$E(z, t) = \text{Re}[E_0 e^{i(\omega t - kz)}] = E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$k = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi n}{\lambda_0}$$

$$n = n(\omega)$$

3. Natężenie światła (średnie / chwilowe)

Model Lorentza współczynnika załamania



Siła działająca na elektron w polu fali EM

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \simeq -e \cdot \vec{E}$$

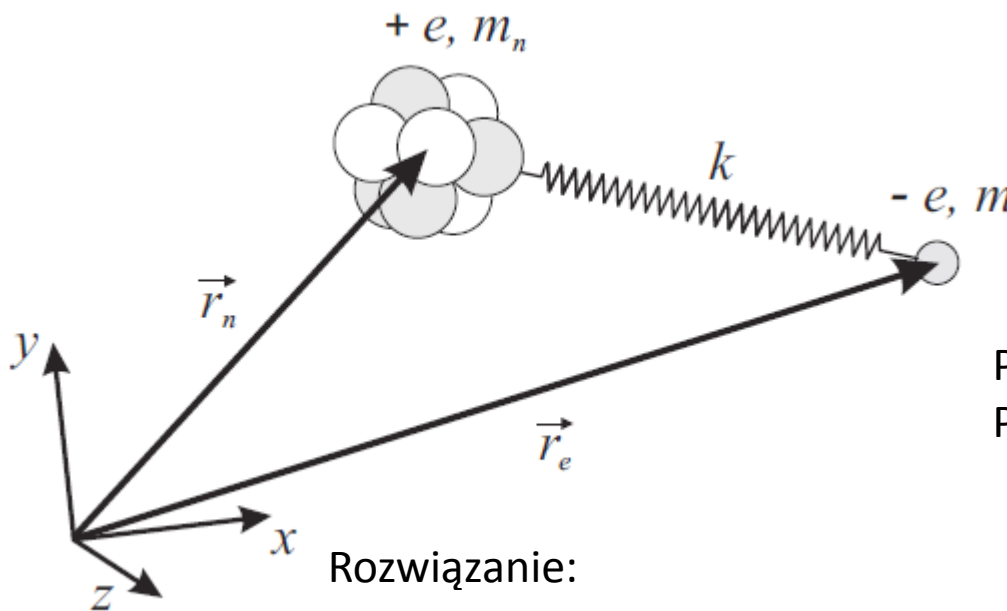
$$m \frac{d^2 \vec{r}_e}{dt^2} = -e \vec{E}(\vec{r}_e, t) + \vec{F}_{en} \longleftarrow \text{Siła przyciągania elektronu przez nieruchome jądro (sprężysta ze stałą } k)$$

Wprowadzamy wektor $\vec{r} = \vec{r}_e - \vec{r}_n \ll \lambda$ (stałe pole elektr. fali w obrębie układu). Oznaczamy $\vec{R} \equiv \vec{r}_n$

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -e \vec{E}(\vec{R}, t) - k \vec{r} \quad \text{czyli} \quad \left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Oscylator harmoniczny z siłą wymuszającą! $\omega_0 = \sqrt{k/m}$

Model Lorentza współczynnika załamania



$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$\left(\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \omega_0^2 \right) \vec{r} = -\frac{e}{m} \vec{E}(\vec{R}, t)$$

Płaska fala monochromatyczna wzdłuż z ,
Polaryzacja w kierunku wektora \hat{a} :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{a} E_0 \cos(kz - \omega t)$$

Rozwiązanie:

$$\vec{r}(t, z) = -\hat{a} \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(kz - \omega t) = -\frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}(t, z)$$

Polaryzacja 1 atomu/cz-ki

$$\vec{p} = -e\vec{r}$$

$$\vec{p} = \epsilon_0 \alpha_p \vec{E}$$

Polaryzowalność

$$\alpha_p(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Polaryzacja \rightarrow r-nie falowe

$$k^2(\omega) = \frac{\omega^2}{c^2} (1 + N\alpha_p(\omega))$$

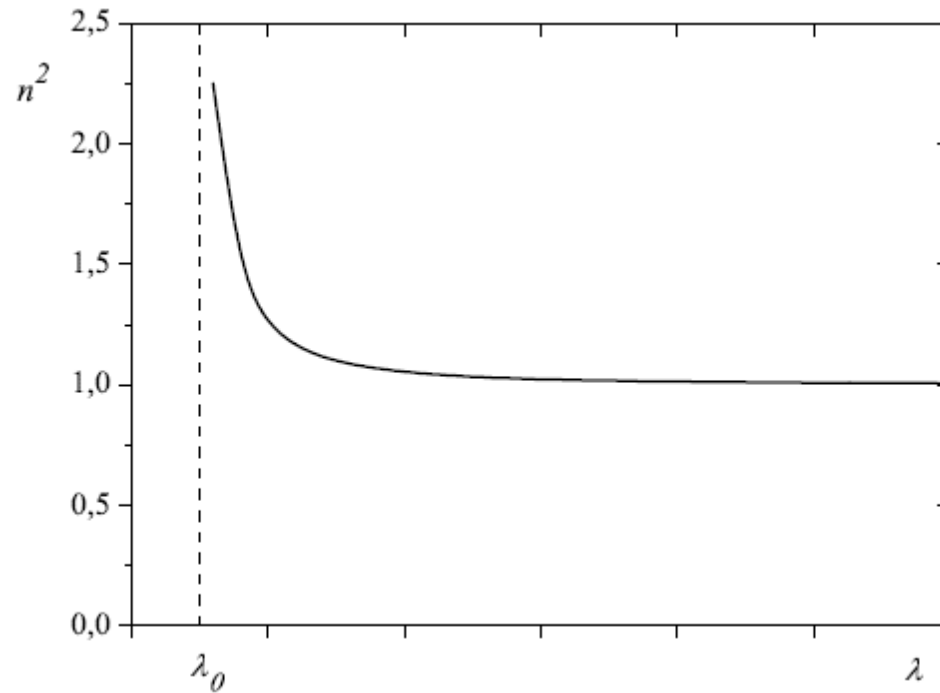
$$= \frac{\omega^2}{c^2} \left(1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = \left(\frac{n\omega}{c} \right)^2$$

Prędkość fazowa $v_\varphi = \frac{c}{n}$

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Model Lorentza współczynnika załamania

$$n^2(\lambda) = 1 + \frac{Ne^2}{4\pi^2\epsilon_0 mc^2} \frac{\lambda^2 \lambda_0^2}{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$



Formuła Sellmeiera (empiryczna)

$$n^2 = 1 + \frac{B_1\lambda^2}{\lambda^2 - C_1} + \frac{B_2\lambda^2}{\lambda^2 - C_2} + \frac{B_3\lambda^2}{\lambda^2 - C_3}$$

material	B_1	B_2	B_3	C_1	C_2	C_3
MgF _{2(o)}	4,87551080E-1	3,98750310E-1	2,31203530E+0	1,88217800E-3	8,95188847E-3	5,66135591E+2
MgF _{2(e)}	4,13440230E-1	5,04974990E-1	2,49048620E+0	1,35737865E-3	8,23767167E-3	5,65107755E+2
szafir _(o)	1,43134930E+0	6,50547130E-1	5,34140210E+0	5,27992610E-3	1,42382647E-2	3,25017834E+2
szafir _(e)	1,50397590E+0	5,50691410E-1	6,59273790E+0	5,48041129E-3	1,47994281E-2	4,02895140E+2
kalcyt _(o)	1,2845	0,41	0,4374	7,65625E-3	2,40715E-2	3,28214E+1
kalcyt _(e)	1,0136	0,1719	9,788	5,041E-3	1,92654E-2	3,19790E+3
kwarc k. _(o)	1,049	0,306	0,77	5,94595E-3	1,52325E-2	7,31025E+1
kwarc k. _(e)	1,01	0,3737	1,29	5,70931E-3	1,44793E-2	1,1025E+2
CaF ₂	5,67588800E-1	4,71091400E-1	3,84847230E+0	2,52642999E-3	1,00783328E-2	1,20055597E+3
kwarc t.	6,96166300E-1	4,07942600E-1	8,97479400E-1	4,67914826E-3	1,35120631E-2	9,79340025E+1
BK7	1,03961212E+0	2,31792344E-1	1,01046945E+0	6,00069867E-3	2,00179144E-2	1,03560653E+2
F2	1,34533359E+0	2,09073118E-1	9,37357162E-1	9,97743871E-3	4,70450767E-2	1,11886764E+2
SF2	1,40301821E+0	2,09073176E-1	9,39056586E-1	1,05795466E-2	4,93226978E-2	1,12405955E+2
SF10	1,61625977E+0	2,59229334E-1	1,07762317E+0	1,27534559E-2	5,81983954E-2	1,16607680E+2
N-LAK21	1,22718116E+0	4,20783743E-1	1,01284843E+0	6,02075682E-3	1,96862889E-2	8,84370099E+1

Zespolony współczynnik załamania

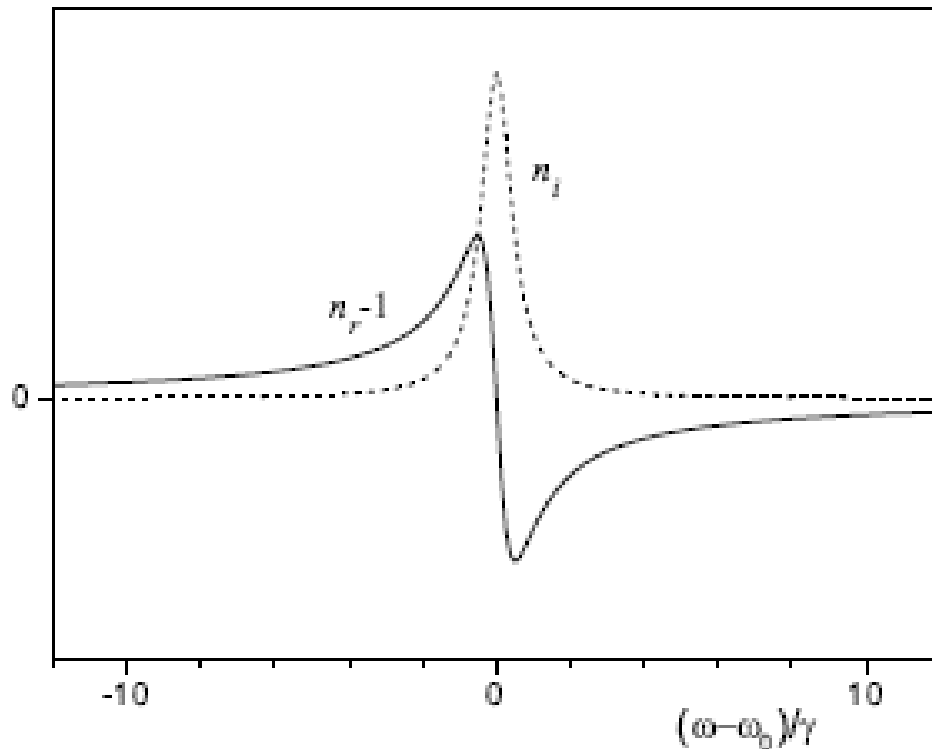
$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \gamma \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\vec{\epsilon} \frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t - kz)$$

$$\vec{r}(t) = -\vec{\epsilon} \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} E_0 e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\alpha_p(\omega) = \frac{e^2}{m\epsilon_0(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega}$$

$$= [n_r(\omega) + in_i(\omega)]^2$$



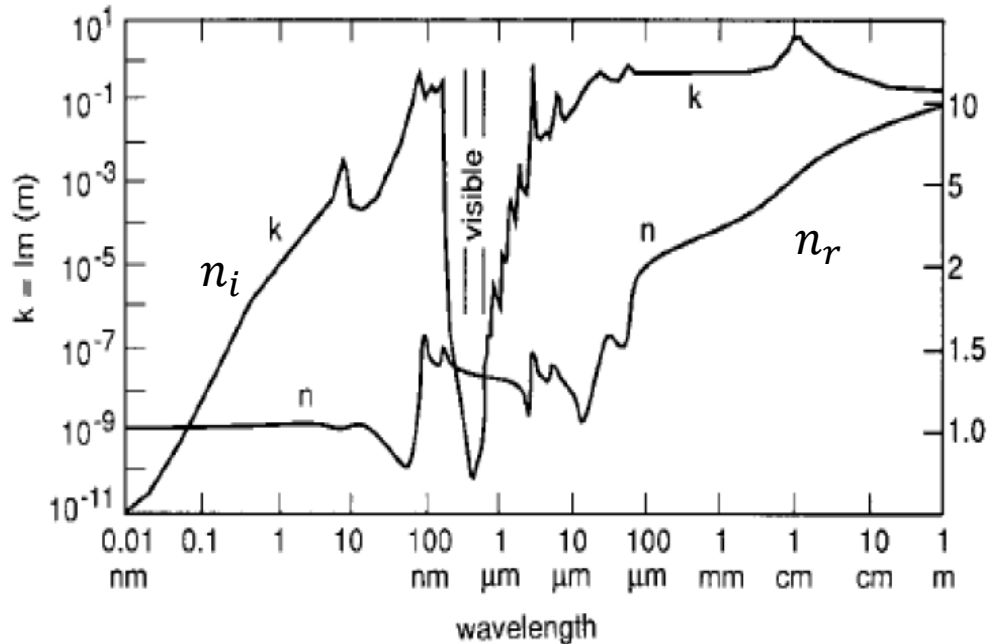
Współczynnik absorpcji:

$$\alpha(\omega) = -2n_i(\omega)\omega/c$$

$$I(z) = I_0 e^{-\alpha z}$$

Prawo Lamberta-Beera

Związki Kramersa-Kroniga



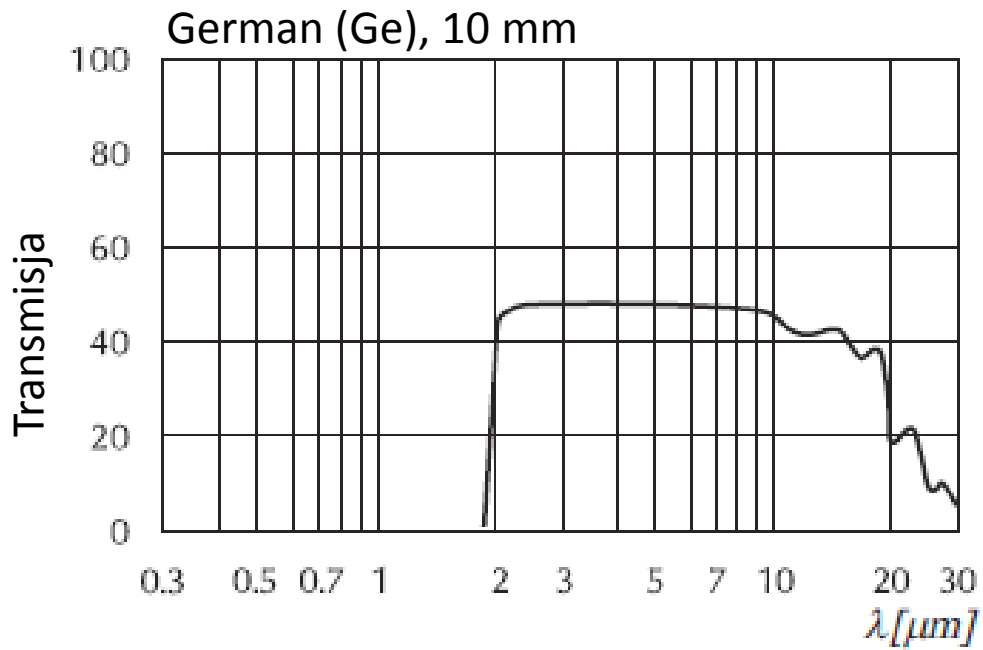
V. M. Zolotarev , A. V. Demin,
Optical Constants
of Water over a Broad Range
of Wavelengths, 0.1Å -1 m,
Opt.Spectrosc.(U.S.S.R)
43, 157 (1977).

Część rzeczywista i urojona wsp. załamania wody

$$P(t) = \varepsilon_0 \int_0^{\infty} \chi(t - \tau) E(\tau) d\tau$$

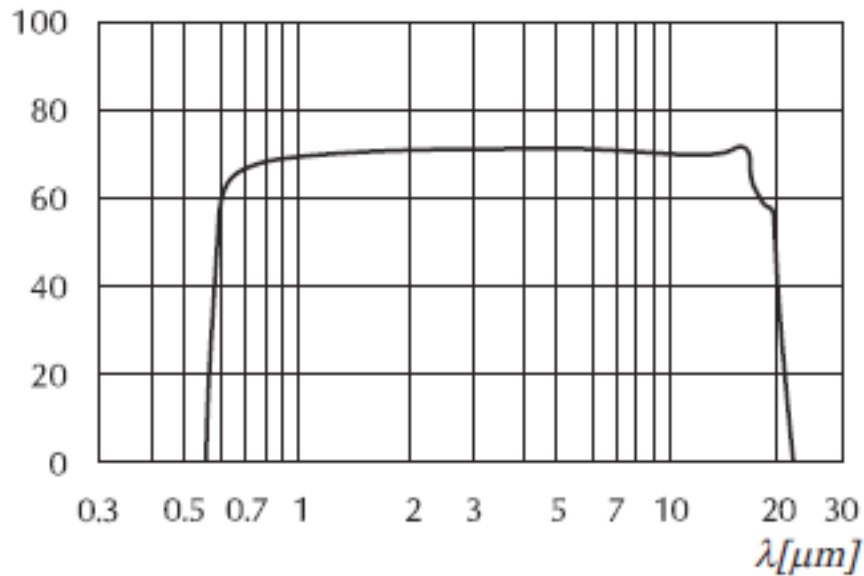
$$\chi_r(\omega) = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\omega' \chi_i(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

$$\chi_i(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^{\infty} \frac{\chi_r(\omega')}{\omega'^2 - \omega^2} d\omega'$$

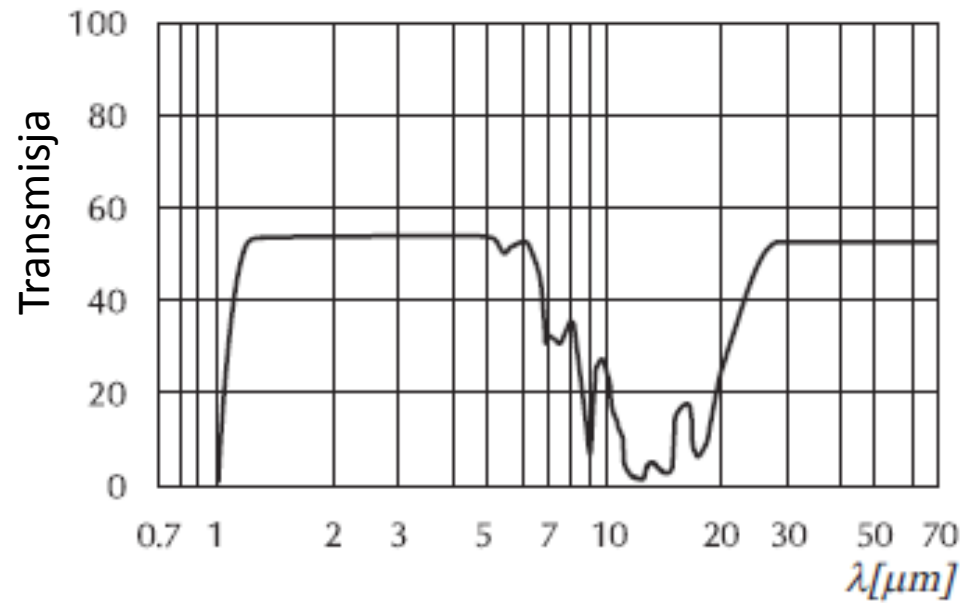


Podczerwień

Selenek cynku (ZnSe), 10 mm



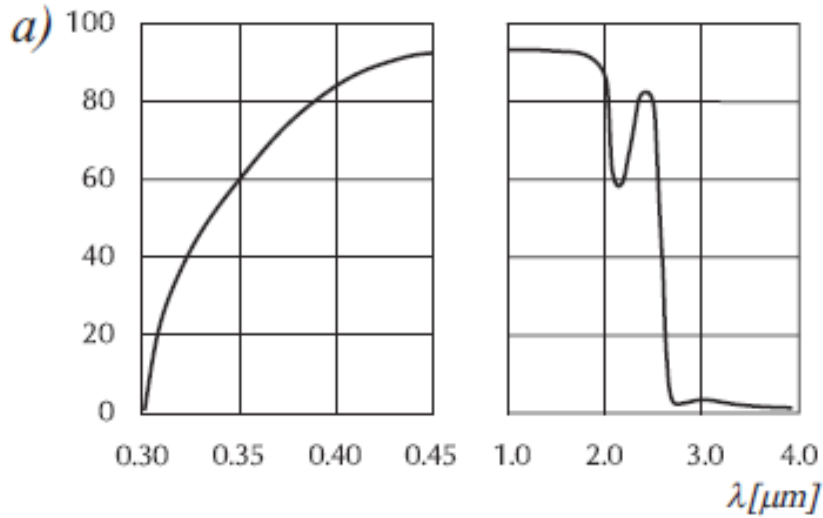
Krzem (Si), 5 mm



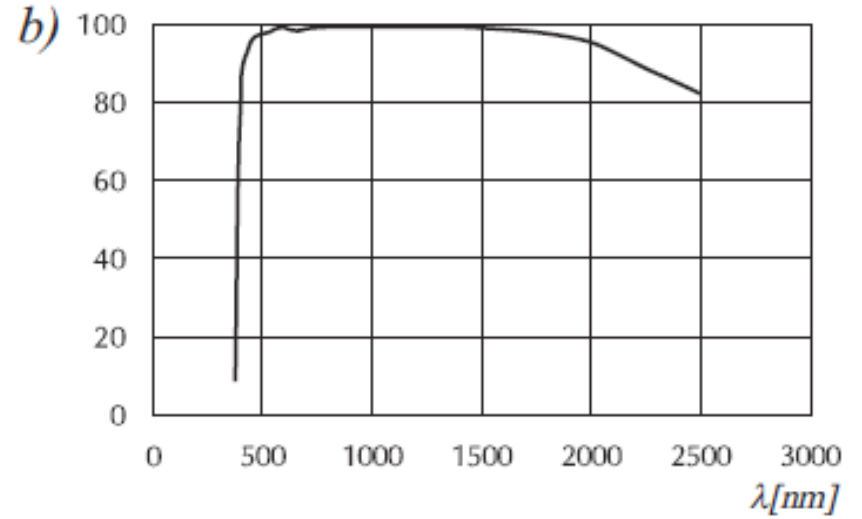
Dane z: CVI – Melles Griot

VIS

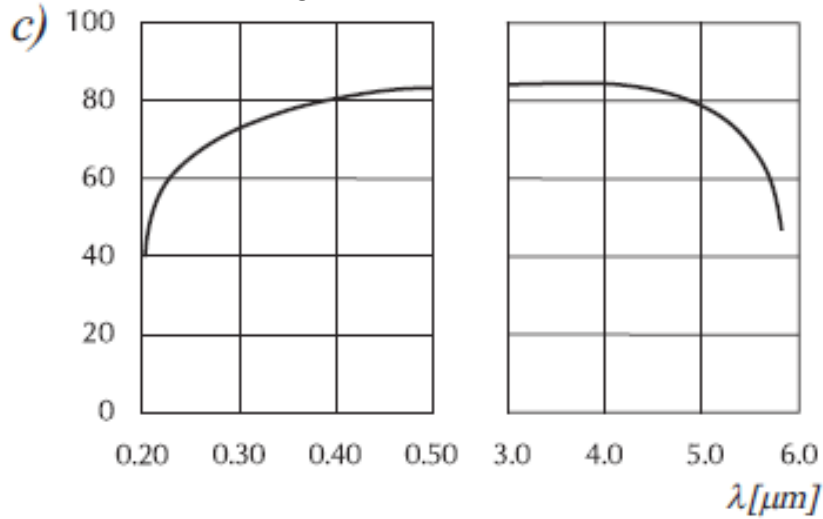
Szkło BK7, 10 mm



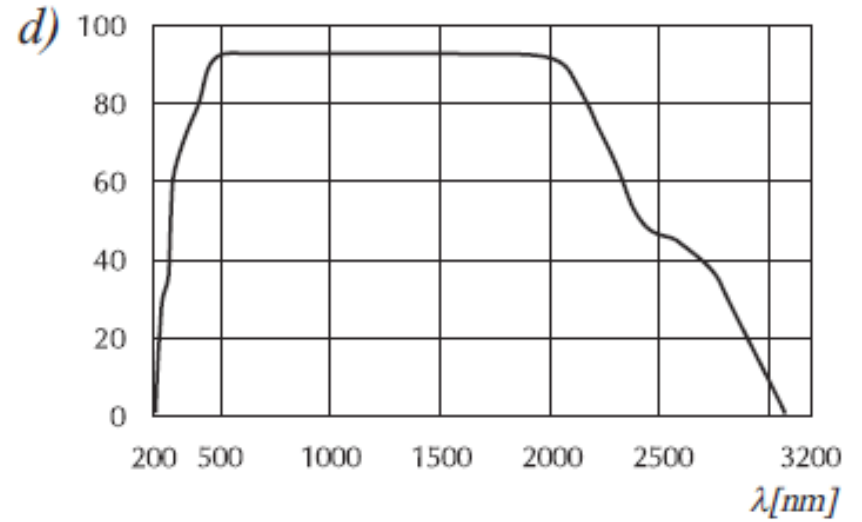
Szkło SF10, 10 mm



Szafir (Ti:Al₂O₃), 1 mm

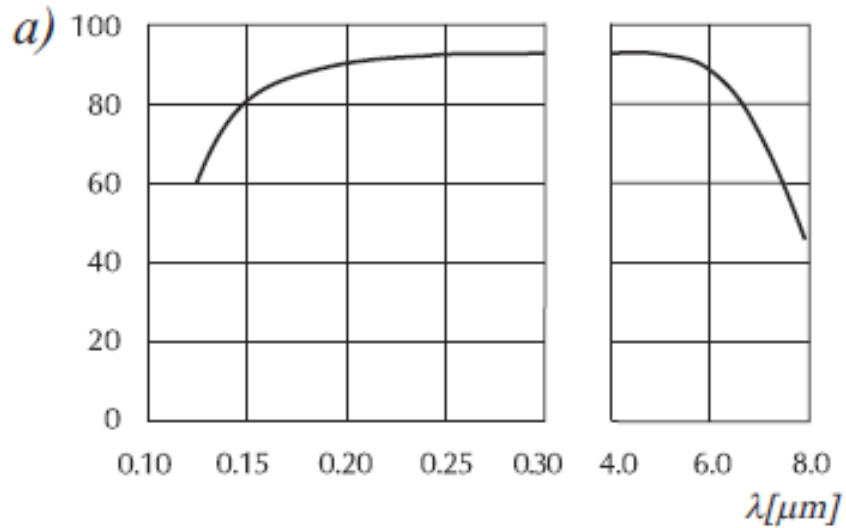


Węglan wapnia (CaCO₃), 10 mm

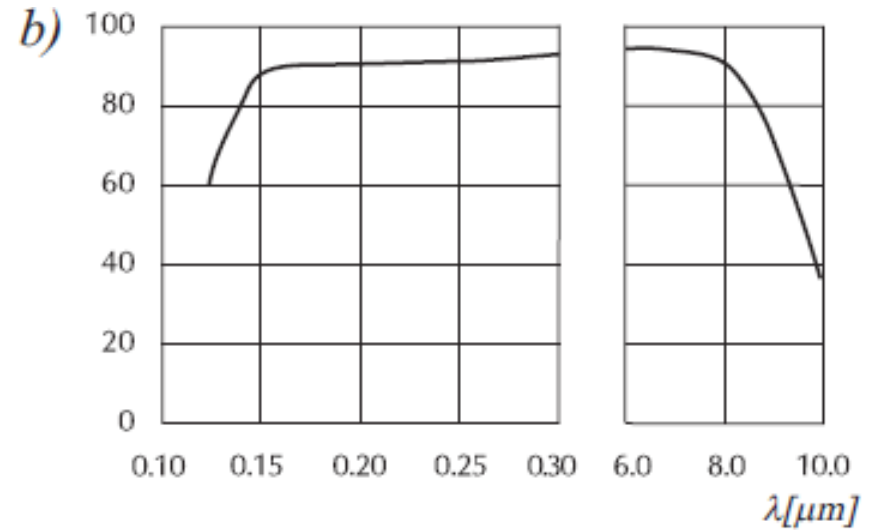


UV

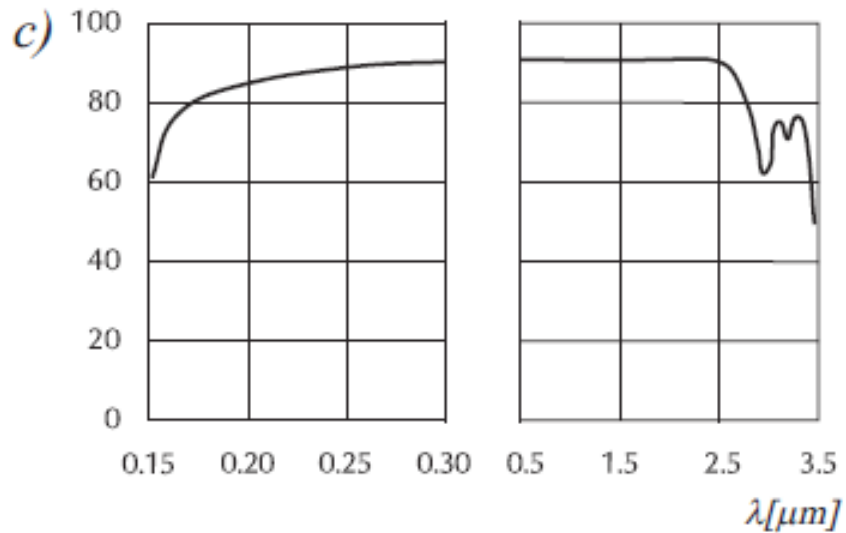
MgF₂, 5 mm



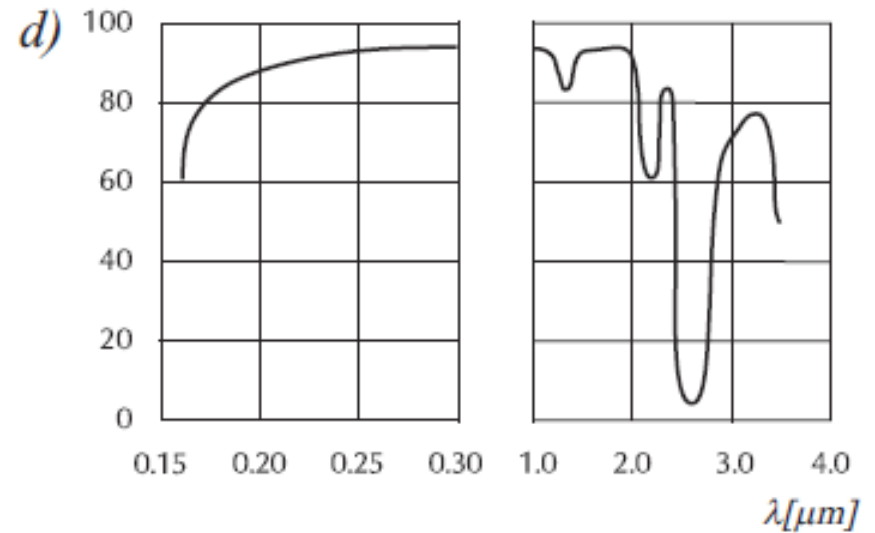
CaF₂, 5 mm



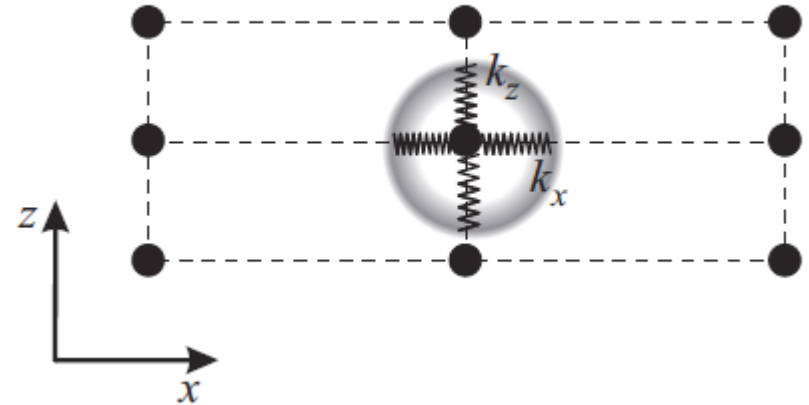
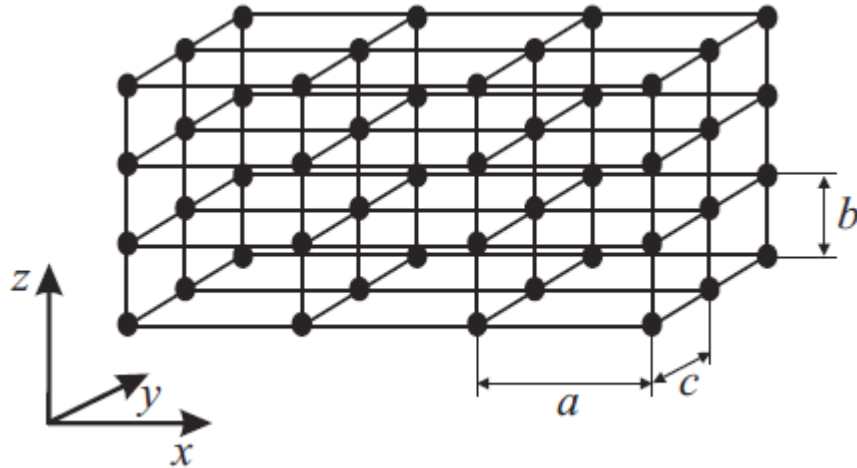
Kwarc krystaliczny SiO₂, 10 mm



Kwarc topiony SiO₂, 10 mm



Ośrodki anizotropowe



$$P_x = \alpha_x E_x$$

$$P_z = \alpha_z E_z$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E} \quad \hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

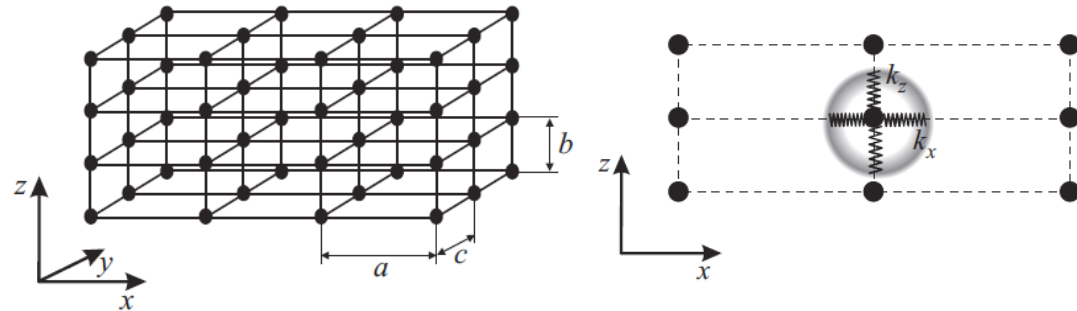
$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix}$$

Dowolny układ odniesienia

Układ odniesienia zgodny ze strukturą ośrodka

Ośrodki

- Izotropowe
- Jednosiowe (*uniaxial*)
- Dwuosiowe (*biaxial*)



W kryształcie jednoosiowym:

$$\hat{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

z – kierunek osi optycznej kryształu

Fala płaska w płaszczyźnie x-z $\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ $\vec{k} = \vec{e}_x k_x + \vec{e}_z k_z$

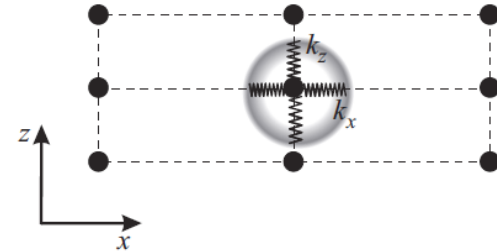
Równania Maxwella dla fali płaskiej z $\vec{D} = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E}$

$$\nabla \cdot \vec{E} \rightarrow i\vec{k} \cdot \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} \rightarrow i\vec{k} \times \vec{E}$$

$$\partial/\partial t \vec{E} \rightarrow -i\omega \vec{E}$$

$$\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{E}) = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \hat{\epsilon} \cdot \vec{E}$$



$$\begin{bmatrix} k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 & -k_x k_z \\ 0 & k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon & 0 \\ -k_x k_z & 0 & k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0 \quad k_y = 0$$

Wyznacznik:

$$(k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon) [(k_z^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon)(k_x^2 - \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z) - k_x^2 k_z^2] = 0$$

Fala zwyczajna

$$k_x^2 + k_z^2 - \omega^2 \epsilon_0 \mu \epsilon = 0$$

$$E_x = E_z = 0 \quad E_y \text{ - dowolne}$$

Polaryzacja prostopadła do płaszczyzny x-z

$$k^2 = \frac{n_o^2 \omega^2}{c^2} \quad n_o^2 = \epsilon$$

Fala nadzwyczajna

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon} = 1$$

$$E_y = 0$$

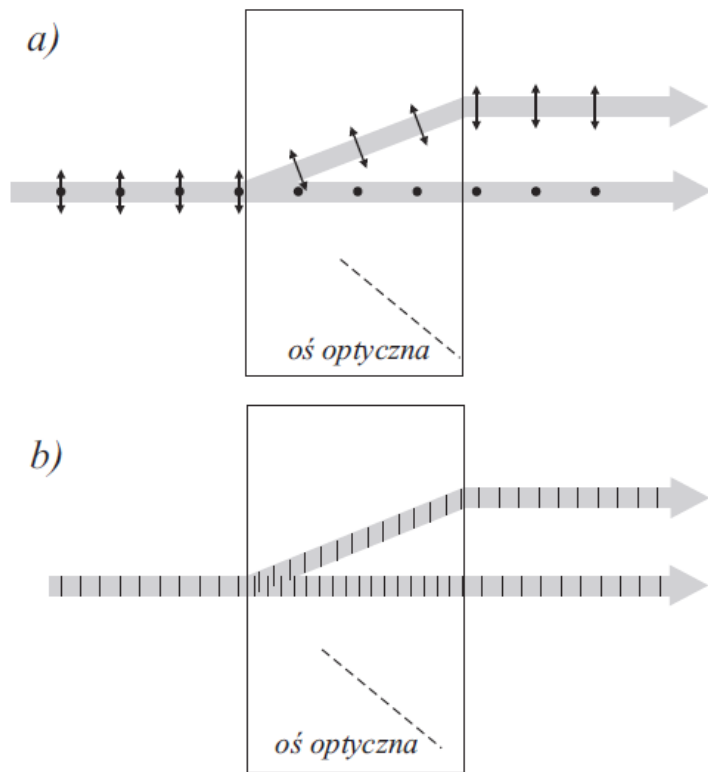
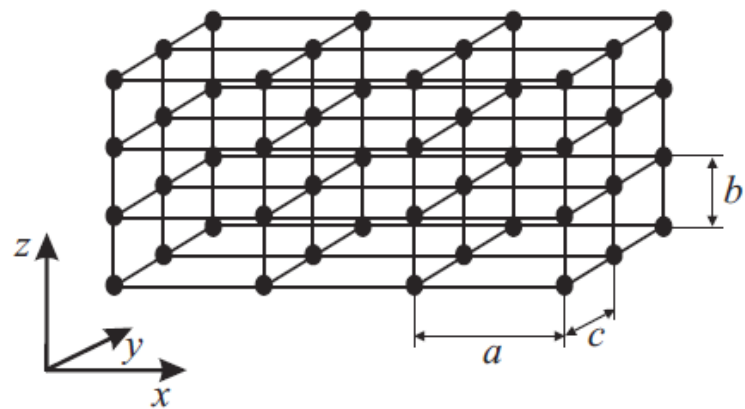
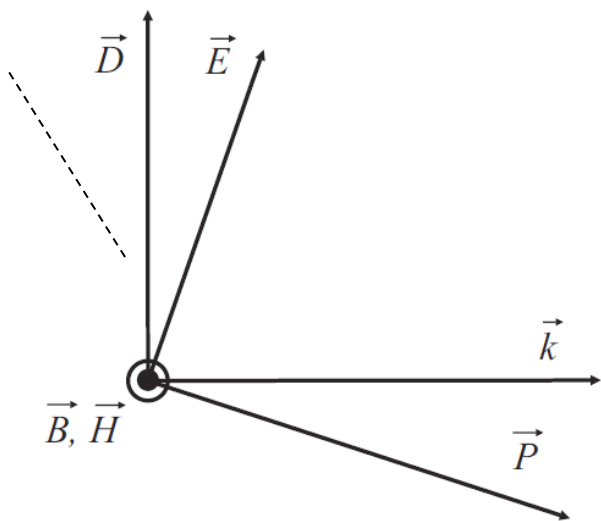
Polaryzacja w płaszczyźnie x-z

Fala nadzwyczajna

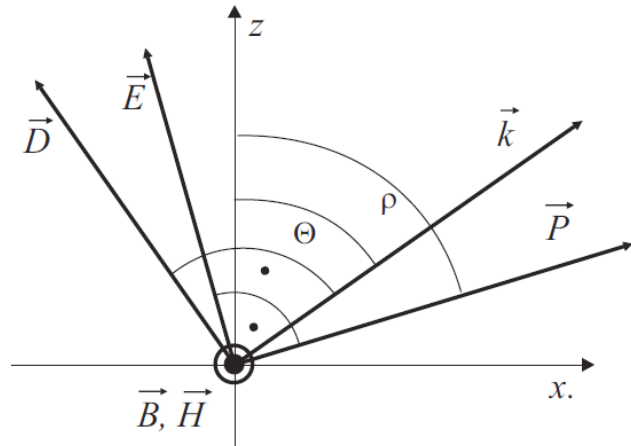
$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$

Wektor Poyntinga

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

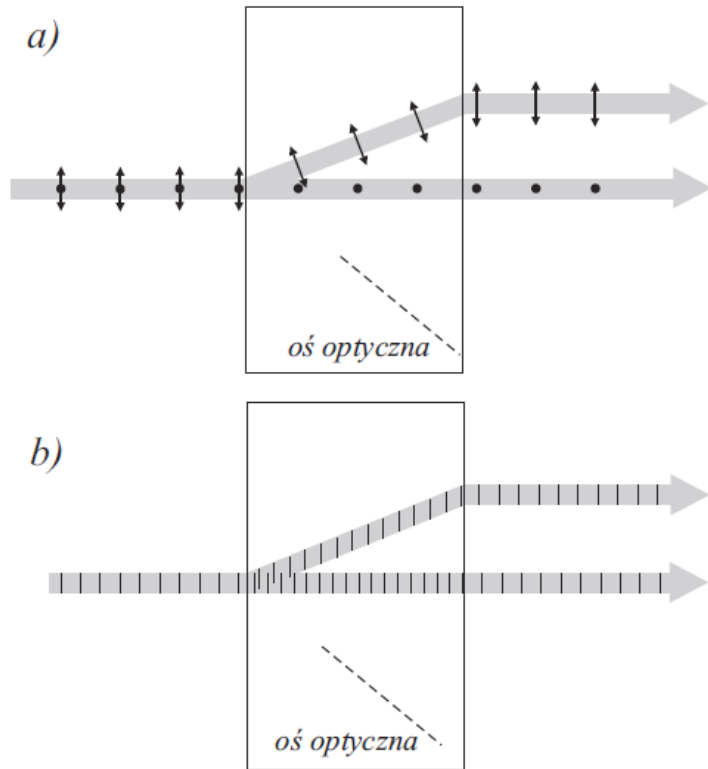


Dryf (*spatial walk-off*)



$$\tan \rho = \frac{n_o^2}{n_e^2} \tan \Theta$$

Brak dryfu dla $\Theta = 0$ i $\Theta = \pi/2$



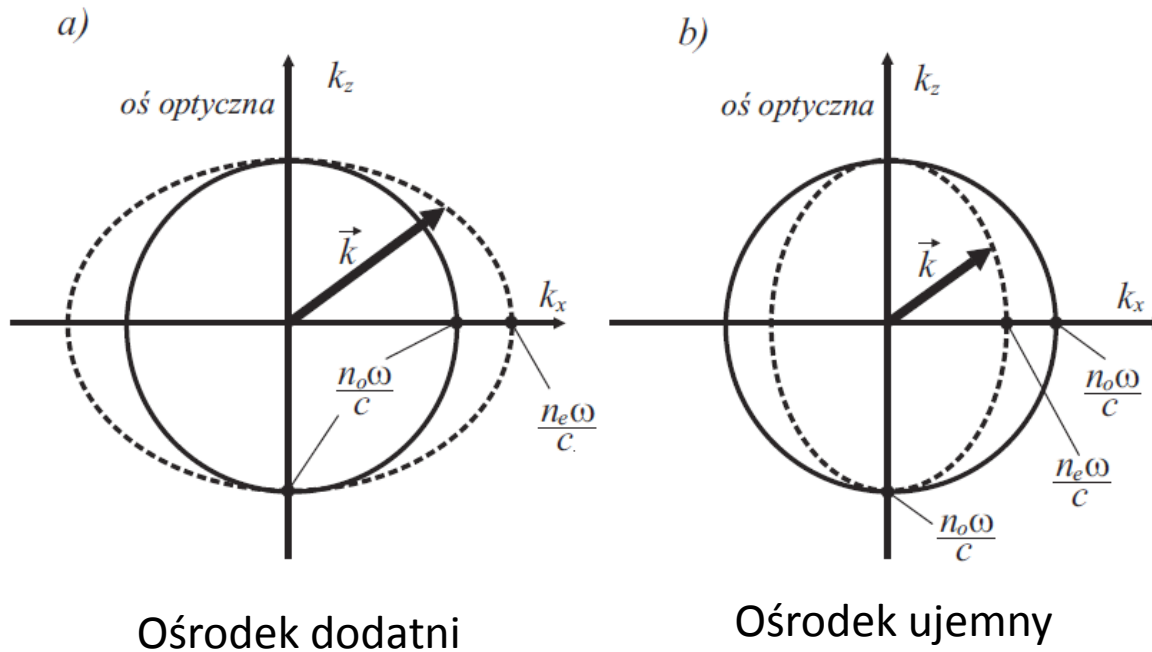
Fala nadzwyczajna

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon} = 1$$

$$\frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$n_e = \sqrt{\epsilon_z}$$

Elipsoida wektora falowego



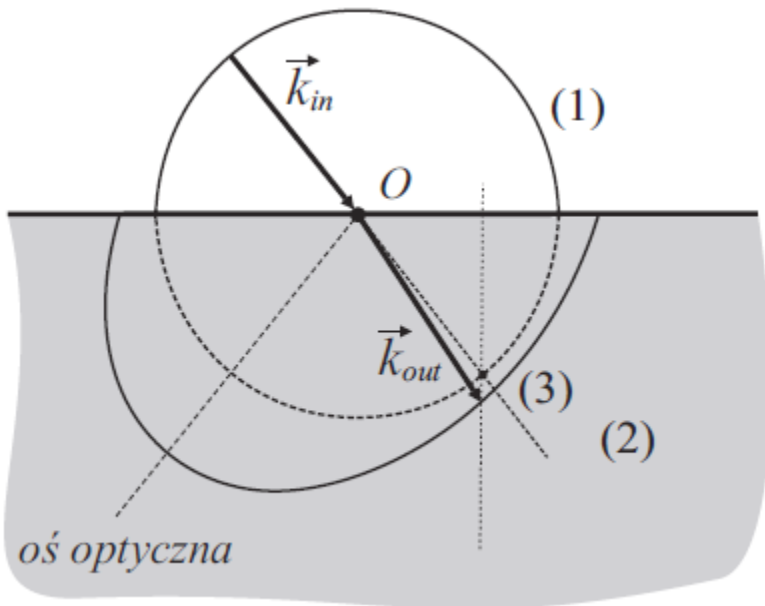
Załamanie w ośrodku dwójłomnym

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon} = 1$$

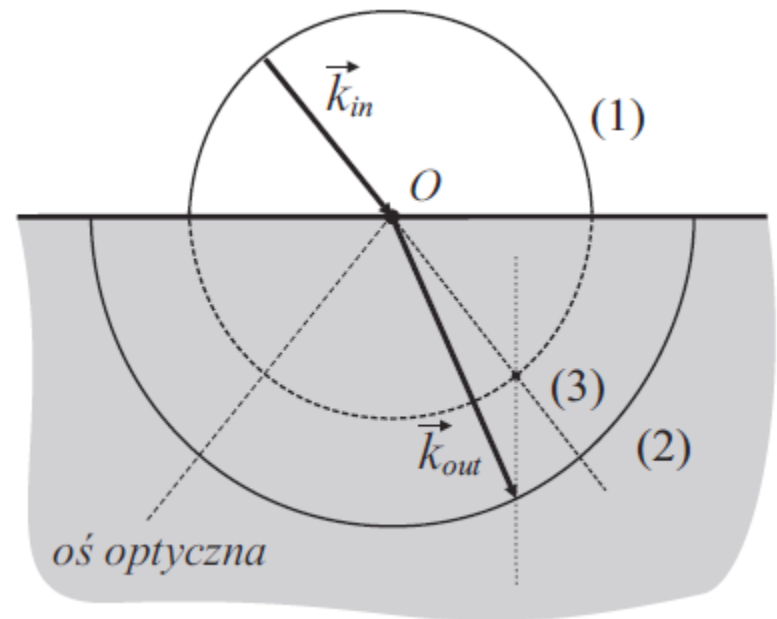
$$\frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$$n_e = \sqrt{\epsilon_z}$$

Składowa styczna \vec{k} pozostaje niezmienną



f. nadzwyczajna



f. zwyczajna

Fala nadzwyczajna – współczynnik załamania

$$\frac{k_x^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_z} + \frac{k_z^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon} = 1$$

$$\frac{k_x^2}{n_e^2} + \frac{k_z^2}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

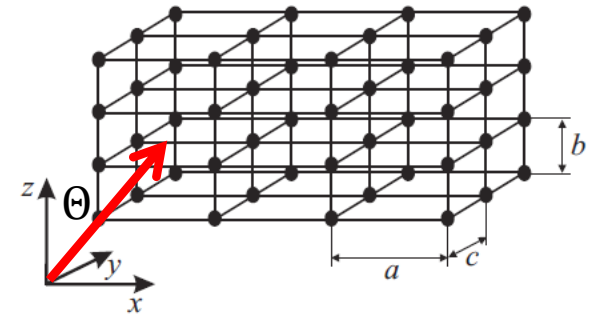
$$n_e = \sqrt{\epsilon_z}$$

$$\frac{k^2 \sin^2 \Theta}{n_e^2} + \frac{k^2 \cos^2 \Theta}{n_o^2} = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Możemy zapisać jako:

$$k^2 = \frac{n_e^2(\Theta) \omega^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{n_e^2(\Theta)} = \frac{\sin^2 \Theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \Theta}{n_o^2}$$



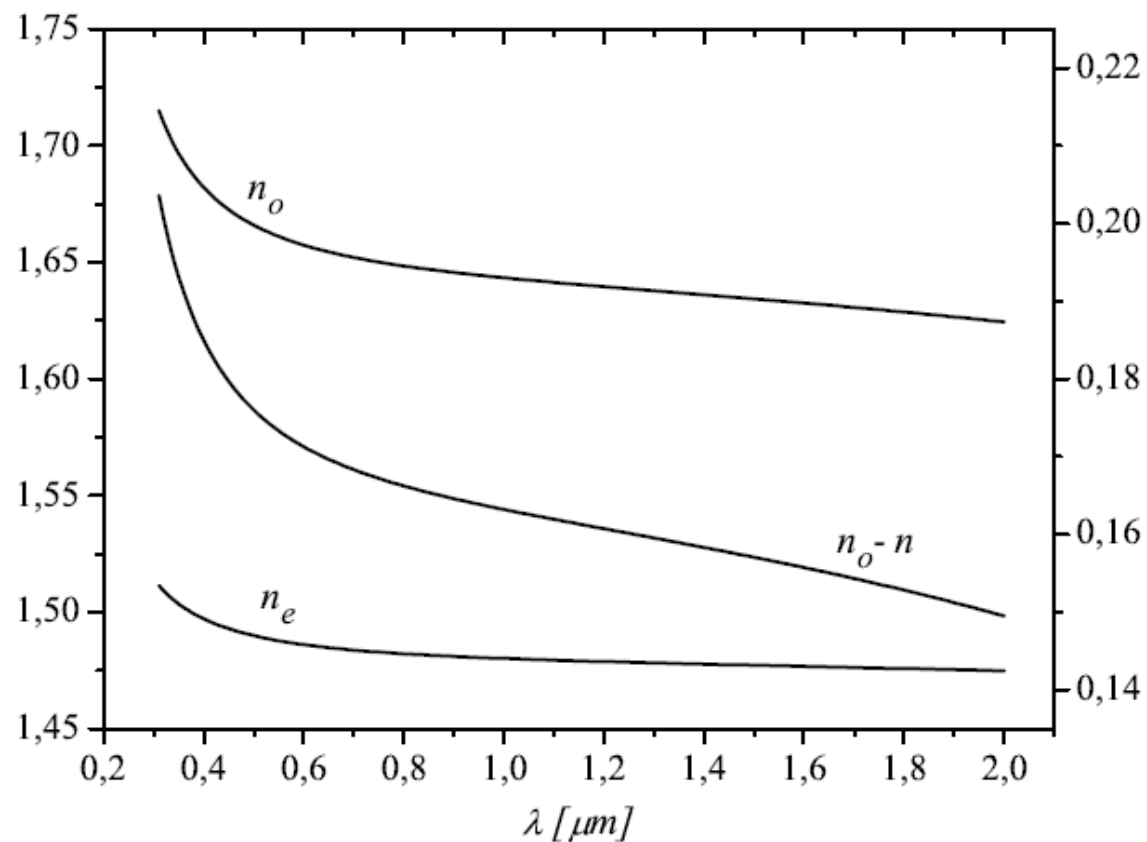
Współczynnik załamania fali nadzwyczajnej zależy od kierunku propagacji!

Elipsoida współczynnika załamania

Dwójłomność kryształu $\delta n = n_o - n_e$

$$\frac{x^2}{n_x^2} + \frac{y^2}{n_y^2} + \frac{z^2}{n_z^2} = 1$$

Kalcyt – węglan wapnia (kryst.)



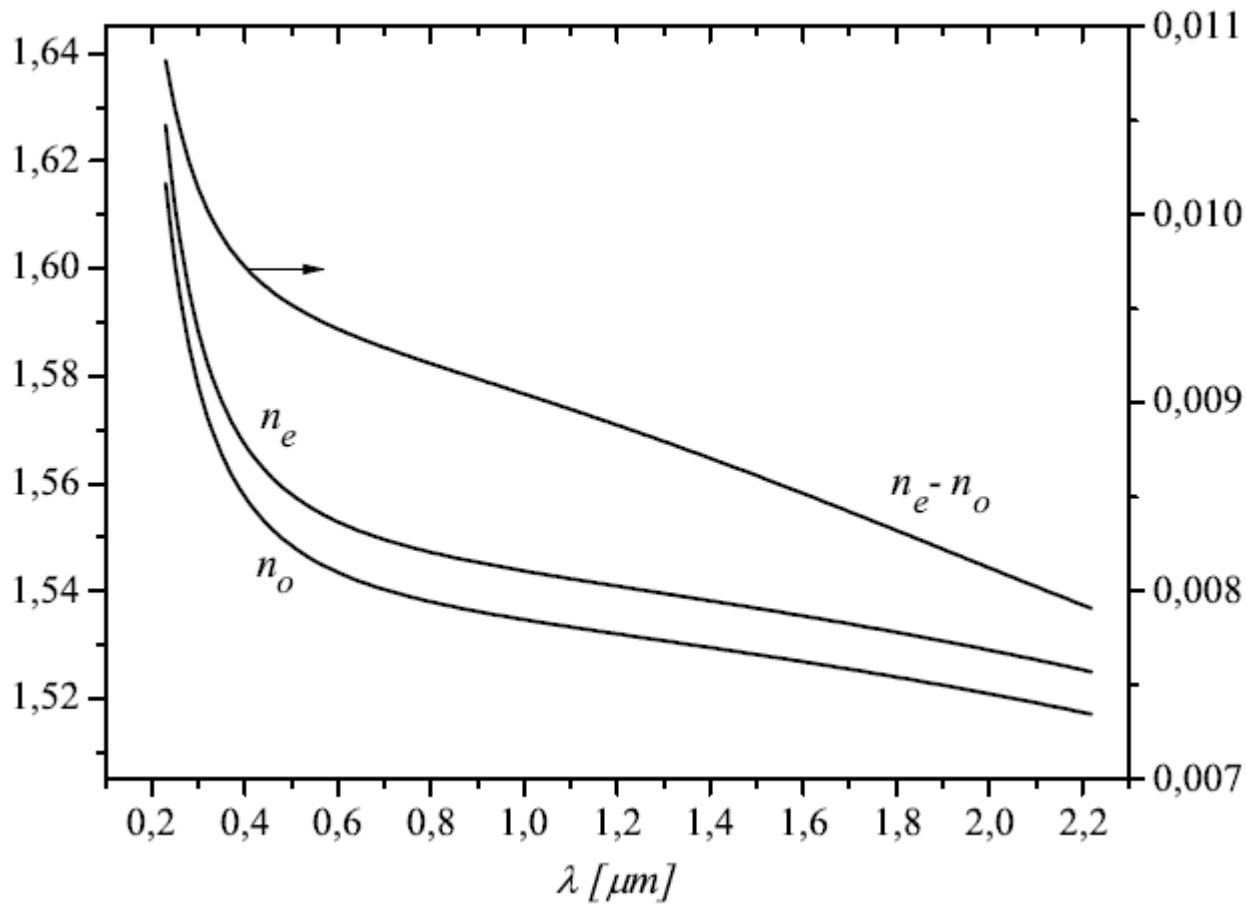
Duża dwójłomność, miękki

Obecnie: słaba dostępność kalcytu na rynku

Alternatywa: YVO_4

$n_e = 2.2154$ $n_o = 1.9929$ $\Delta n = 0.2225$ dla 633 nm

Kwarc krystaliczny – SiO₂



Szeroka transmisja, twardy, duże kryształy