

Optyka instrumentalna

wykład 4

21 marca 2019

Wykład 3

Ośrodki anizotropowe

- Elipsoida wektora falowego
- Współczynnik załamania n_o , $n_e(\theta)$
- Materiały dwójłomne

Polaryzacja

- Stany polaryzacji

Polaryzatory (ekstynkcja, transmisja, próg zniszczenia)

- dichroiczne,
- krystaliczne (Wollaston, Glan-Thompson)
- Dielektryczne

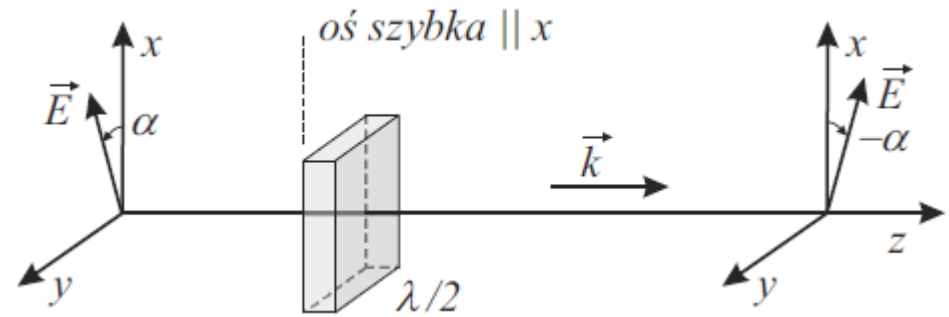
Płytki falowe (zerowego/wyższych rzędów)

- półfalówka (obrót polaryzacji liniowej)
- ćwierćfalówka

Działanie płytki półfalowej

$$\vec{E}_{wej} = E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}$$

$$\vec{E}_{wyj} = E_0 \begin{bmatrix} \cos \alpha e^{i(\omega t - n_f k_0 d)} \\ \sin \alpha e^{i(\omega t - n_s k_0 d)} \end{bmatrix} = E_0 e^{i(\omega t - n_f k_0 d)} \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha e^{-i\pi} \end{bmatrix} = E_0 e^{i(\omega t - n_f k_0 d)} \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) \end{bmatrix}$$



Działanie płytki ćwierćfalowej

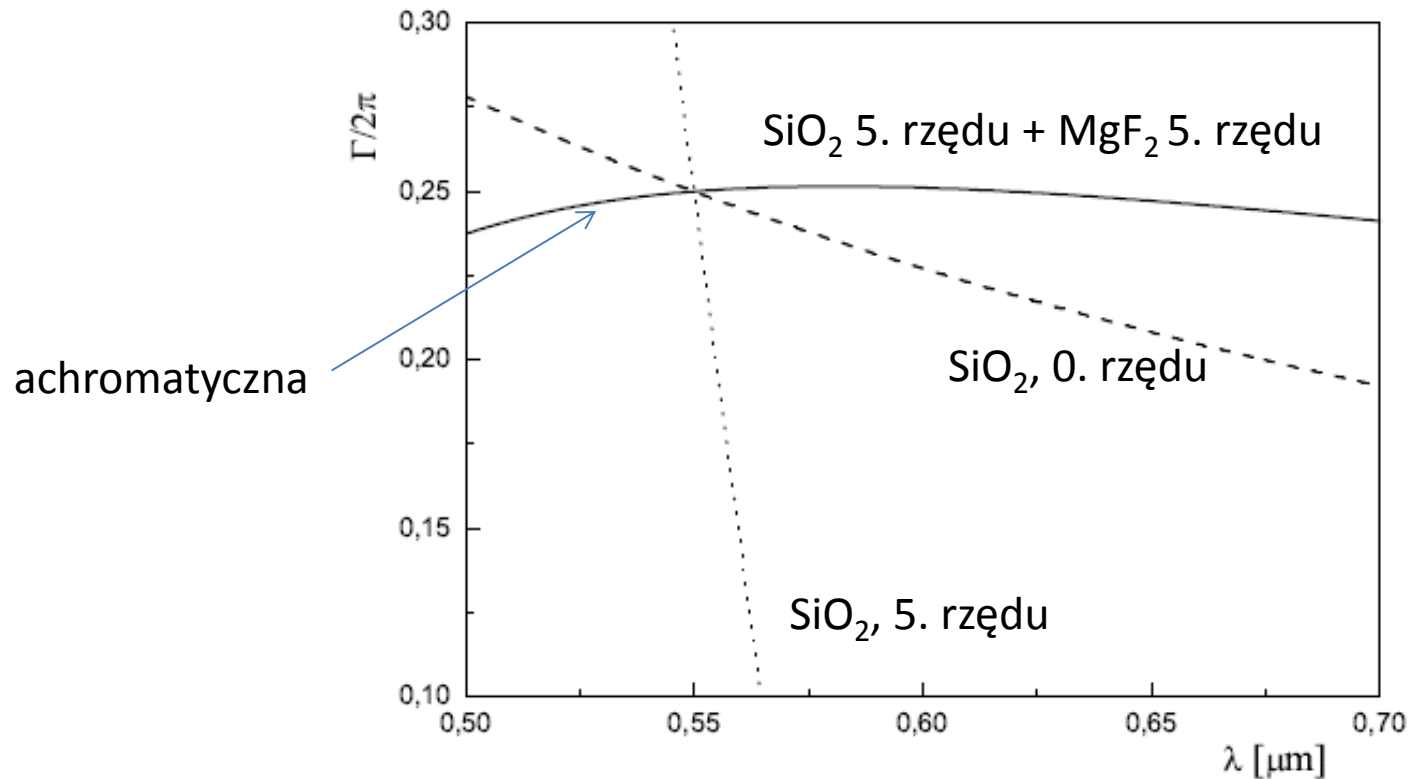
Płytki falowa – konstrukcja

$$\text{Opóźnienie fazowe } \Gamma(\lambda) = \frac{2\pi[n_e(\lambda) - n_o(\lambda)]d}{\lambda}$$

Płytki ćwierćfalowa dla $\lambda = 550 \text{ nm}$

Półfalówka kwarcowa
(dwójłomność 0,009):
 $d = 28 \mu\text{m}$ dla półfalówki 0
rzędu na dł. fali 500 nm

W praktyce skleja się 2 płytki o
prostopadłych osiach opt.



Rachunek Jonesa

$$\vec{E}(t) = E_0 e^{i\omega t} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad \vec{E} = E_0 e^{i\omega t} \vec{V}$$

Wektor Jonesa: $\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$, normalizacja: $|\vec{V}|^2 = V_x V_x^* + V_y V_y^* = 1$. $I = |\vec{E}|^2 = E_0^2$

Przykłady: polaryzacja liniowa $\vec{V} = \begin{bmatrix} \cos \Theta \\ \sin \Theta \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \cos \Theta \cos(\omega t) \\ \sin \Theta \cos(\omega t) \end{bmatrix}$

Polaryzacja kołowa $\vec{V} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} E_x(t) \\ E_y(t) \end{bmatrix} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos(\omega t) \\ \mp \sin(\omega t) \end{bmatrix}$

Polaryzacja eliptyczna w układzie odniesienia zgodnym z osiami elipsy $\vec{V} = \begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \pm i \sin \vartheta \end{bmatrix}$

Polaryzacja eliptyczna (ogólnie) $\vec{V} = \begin{bmatrix} a \\ b e^{i\phi} \end{bmatrix}$

Niejednoznaczność wektora Jonesa: \vec{V} i $e^{i\varphi} \vec{V}$ opisują ten sam stan polaryzacji!
(ale uwaga na sytuacje z referencją fazową!)

Światło częściowo spolaryzowane – macierz koherencji

$$J = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_x^* E_y \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix}$$

Światło niespolaryzowane

$$J = \begin{bmatrix} |E_x|^2 & 0 \\ 0 & |E_x|^2 \end{bmatrix}$$

Światło spolaryzowane liniowo

$$J = |E_0|^2 \begin{bmatrix} \cos^2 \Theta & \sin \Theta \cos \Theta \\ \sin \Theta \cos \Theta & \sin^2 \Theta \end{bmatrix}$$

Natężenie

$$\text{Tr}[J] = J_{xx} + J_{yy} = |E|^2$$

Stożek polaryzacji

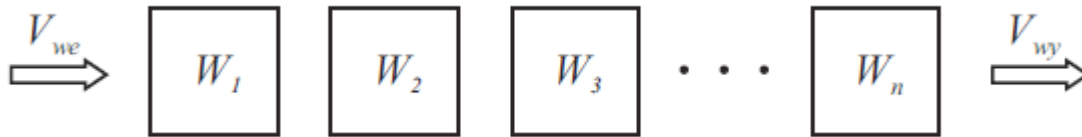
$$P = \left[1 - \frac{4 \det[J]}{(J_{xx} + J_{yy})^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Macierze Jonesa

Zmiana wektora Jonesa przez elementy polaryzacyjne: macierz Jonesa W

$$\vec{V}_{wy} = W\vec{V}_{we}$$

Stałe natężenie światła \rightarrow macierz Jonesa unitarna: $W^\dagger W = \mathbf{1}$



$$W = W_n \dots W_3 W_2 W_1$$

Macierze Jonesa elementów polaryzacyjnych

Propagacja w pustej przestrzeni (dystans d):

$$\begin{aligned} E_x(t, d) &= e^{-ikd} E_x(t, 0) \\ E_y(t, d) &= e^{-ikd} E_y(t, 0) \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} E_x(t, d) \\ E_y(t, d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ikd} & 0 \\ 0 & e^{-ikd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(t, 0) \\ E_y(t, 0) \end{bmatrix} = e^{-ikd} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x(t, 0) \\ E_y(t, 0) \end{bmatrix}$$

$$W_{\text{pusta przestrzeń}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Analogicznie dla izotropowego dielektryka!}$$

Płytką falowa (oś optyczna zgodna z układem odniesienia)

$$\vec{E}_{out} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_e d)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \quad W_{\text{płytką}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \quad \Gamma = (n_o - n_e) k_0 d = \frac{2\pi (n_e - n_o)}{\lambda_0} d$$

Polaryzator wzdłuż osi x

$$W_{\text{polaryzator}||x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierze Jonesa użyteczne również dla opisu za pomocą macierzy koherencji J :

$$J' = W^\dagger J W$$

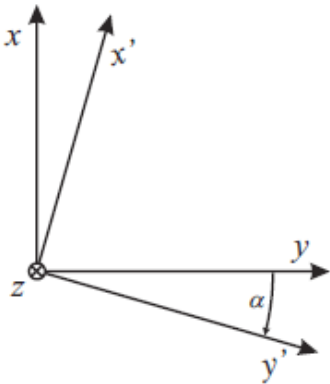
Zmiana bazy

Liniowa – kołowa

$$W_{K \leftarrow L} \begin{bmatrix} V_+ \\ V_- \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

$$W_{L \leftarrow K} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_+ \\ V_- \end{bmatrix}$$

Obrót układu odniesienia



$$\begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

Przykład: płytka falowa

$$W_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad W_{\text{płytki}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \quad W_{-\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$W = W_{-\alpha} \cdot W_{\text{płytki}} \cdot W_\alpha = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + e^{-i\Gamma} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{-i\Gamma}) \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{-i\Gamma}) & \sin^2 \alpha + e^{-i\Gamma} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Płytką półfalowa (półfalówka, half-wave plate, $\lambda/2$)

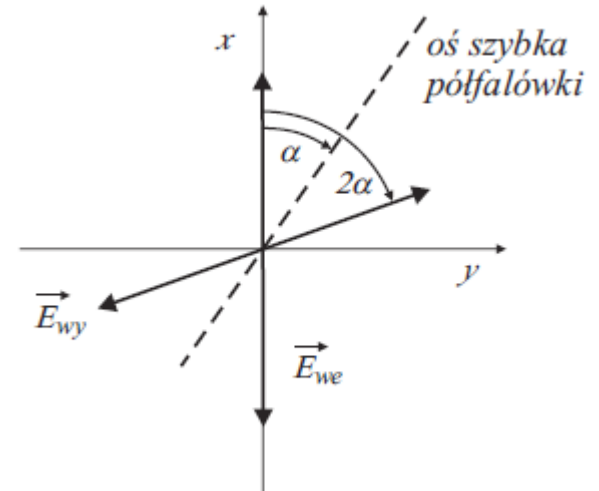
$$\Gamma = \pi$$

$$W_{\text{płytki}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{bmatrix}$$

$$W_{\lambda/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W = W_{-\alpha} \cdot W_{\text{płytki}} \cdot W_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha + e^{-i\Gamma} \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{-i\Gamma}) \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 - e^{-i\Gamma}) & \sin^2 \alpha + e^{-i\Gamma} \cos^2 \alpha \end{bmatrix}$$

$$W = W_{-\alpha} W_{\lambda/2} W_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{bmatrix}$$



Płytką ćwierćfalowa (ćwierćfalówka , quarter-wave plate, $\lambda/4$)

$$\Gamma = \pi / 2 \quad W_{\text{plytka}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \quad W_{\lambda/4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

$$W = W_{-\alpha} W_{\lambda/4} W_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha - i \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha (1 + i) \\ \sin \alpha \cos \alpha (1 + i) & -i \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Dla $\alpha = \pi / 4$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - i & -i - 1 \\ -i - 1 & 1 - i \end{bmatrix}$$

Ośrodek aktywny optycznie

Dwójtomność kołowa

$$\begin{bmatrix} V_P' \\ V_L' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-ik_0 n_P d} & 0 \\ 0 & e^{-ik_0 n_L d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_P \\ V_L \end{bmatrix} = e^{-ik_0 n_P d} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_P \\ V_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} W_{L \leftarrow K} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma} \end{bmatrix} W_{K \leftarrow L} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{bmatrix} = e^{i\frac{\Gamma}{2}} \begin{bmatrix} \cos \frac{\Gamma}{2} & -\sin \frac{\Gamma}{2} \\ \sin \frac{\Gamma}{2} & \cos \frac{\Gamma}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pomiar stanu polaryzacji

Wektor Stokesa $[S_0, S_1, S_2, S_3]^T$

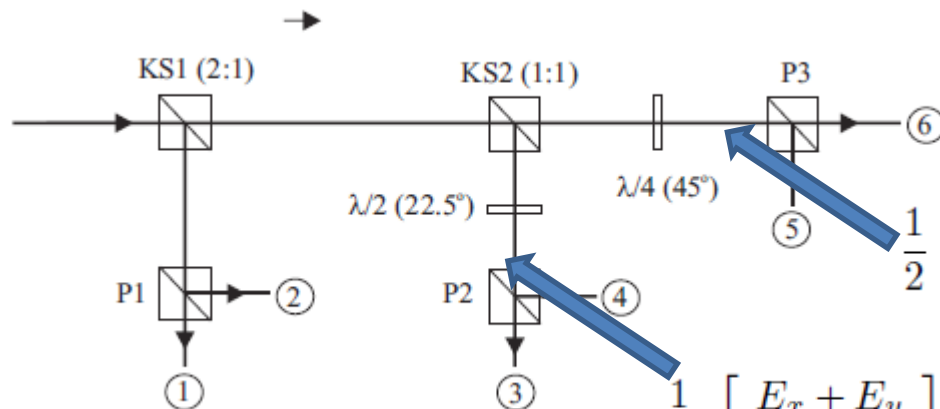
$$S_0 = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle$$

$$S_1 = \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle$$

$$S_2 = \langle E_x E_y^* \rangle + \langle E_x^* E_y \rangle = 2\text{Re}(\langle E_x E_y^* \rangle)$$

$$S_3 = i(\langle E_x E_y^* \rangle - \langle E_x^* E_y \rangle) = 2\text{Im}(\langle E_x E_y^* \rangle)$$

$$J = \begin{bmatrix} \langle E_x E_x^* \rangle & \langle E_x E_y^* \rangle \\ \langle E_x^* E_y \rangle & \langle E_y E_y^* \rangle \end{bmatrix}$$



$$I_1 = \langle |E_x|^2 \rangle = \langle E_x E_x^* \rangle$$

$$I_2 = \langle |E_y|^2 \rangle = \langle E_y E_y^* \rangle$$

$$I_1 + I_2 = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle = S_0$$

$$I_1 - I_2 = \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle = S_1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} E_x + E_y \\ E_x - E_y \end{bmatrix}$$

$$I_3 - I_4 = (\langle E_x E_y^* \rangle + \langle E_x^* E_y \rangle) = S_2$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-i)E_x - (1+i)E_y \\ -(1+i)E_x + (1-i)E_y \end{bmatrix}$$

$$I_5 - I_6 = i(\langle E_x E_y^* \rangle - \langle E_x^* E_y \rangle) = S_3$$

Sfera Poincarégo

Unormowany wektor Stokesa

$$s_0 = S_0/S_0$$

$$s_1 = S_1/S_0$$

$$s_2 = S_2/S_0$$

$$s_3 = S_3/S_0$$

Dla światła spolaryzowanego:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$$

Ogólnie

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \leq 1$$

Światło spolaryzowane: $\begin{bmatrix} \cos \vartheta \\ \sin \vartheta e^{i\phi} \end{bmatrix}$

→ kąt 2ϑ wokół osi s_3 , kąt φ względem płaszczyzny równikowej

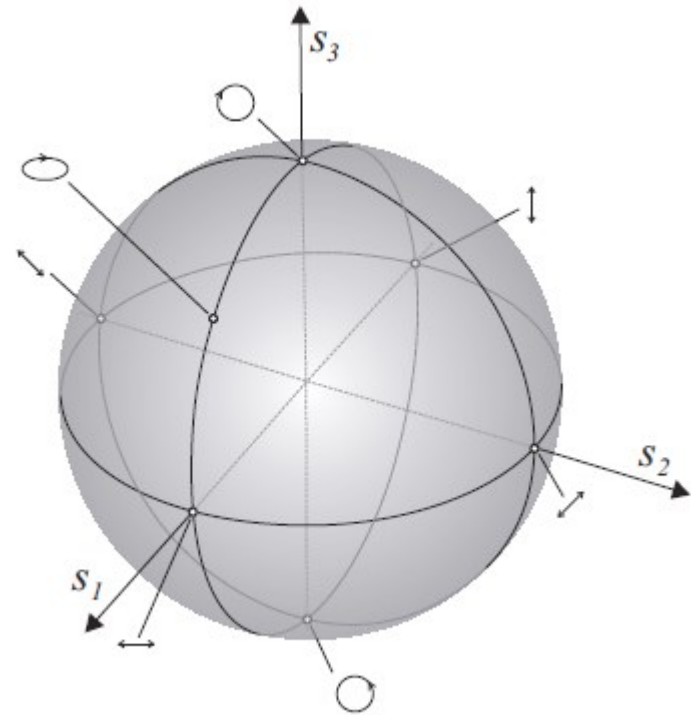
Wektor Stokesa $[S_0, S_1, S_2, S_3]^T$

$$S_0 = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle$$

$$S_1 = \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle$$

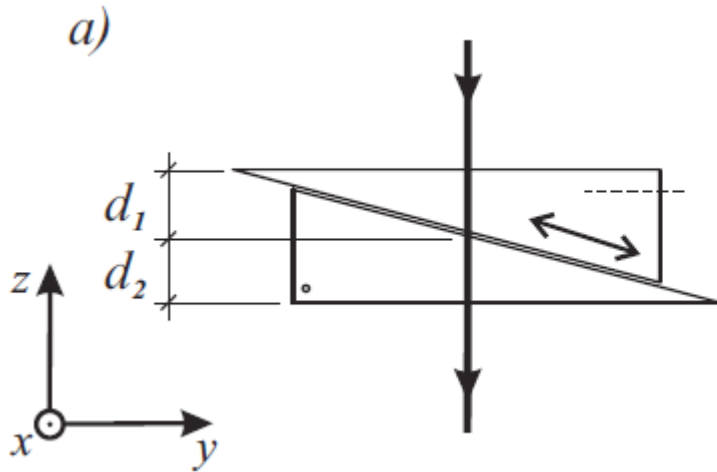
$$S_2 = \langle E_x E_y^* \rangle + \langle E_x^* E_y \rangle = 2\text{Re}(\langle E_x E_y^* \rangle)$$

$$S_3 = i(\langle E_x E_y^* \rangle - \langle E_x^* E_y \rangle) = 2\text{Im}(\langle E_x E_y^* \rangle)$$



Płytki falowe: obrót o kąt Γ względem osi wyznaczonej przez polaryzację własne płytki

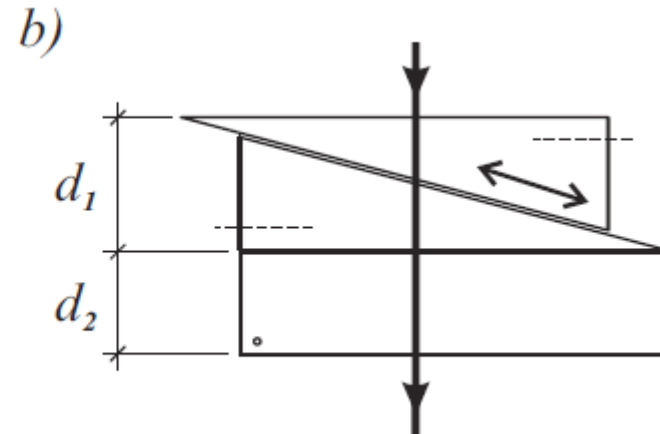
Kompensatory



Babineta:

$$\begin{aligned}\Gamma/k_0 &= d_1 n_o + d_2 n_e - (d_1 n_e + d_2 n_o) \\ &= (d_1 - d_2)(n_o - n_e)\end{aligned}$$

$$\Gamma = \Gamma(y)!$$



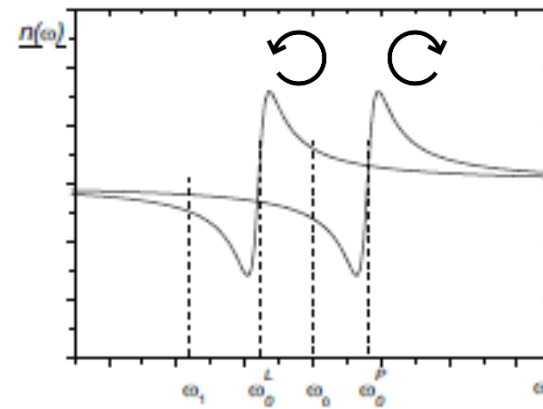
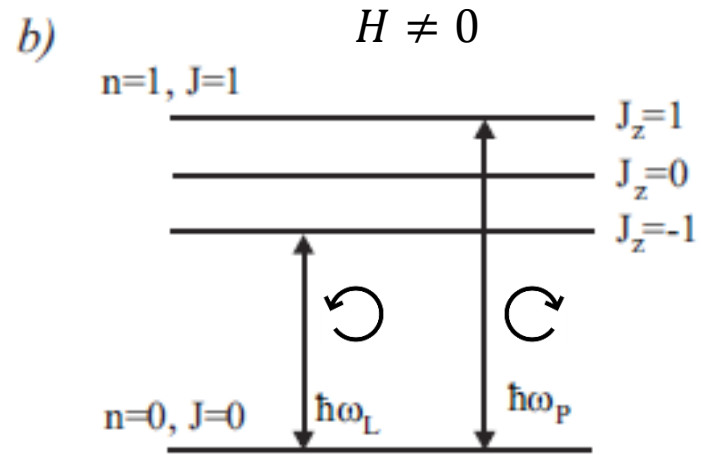
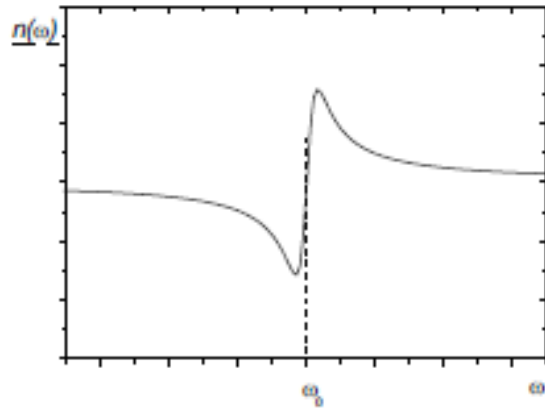
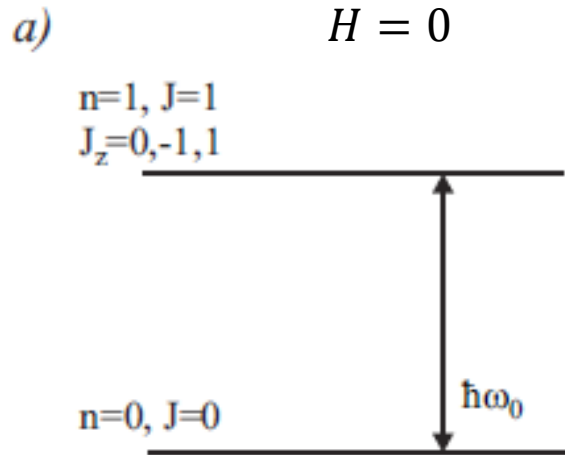
Babineta-Soleila:

$$\Gamma/k_0 = (d_1 - d_2)(n_o - n_e)$$

$$\Gamma(y) = \text{const}$$

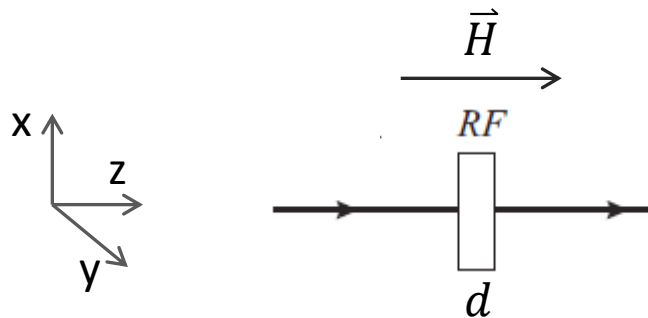
Uwaga: gdy różnica dróg optycznych $\Gamma/k_0 > l_c$ (droga spójności) uzyskujemy ze światła spolaryzowanego ukośnie światło (odwracalnie/pozornie) niespolaryzowane, $\langle E_x(t)E_y(t) \rangle = 0!$

Efekt Faradaya



$n_L \neq n_P$ – dwójtomność kołowa, $\delta n \propto H$

Rotator Faradaya



$\delta n = n_L - n_P$ różnica dróg optycznych dla polaryzacji kołowych

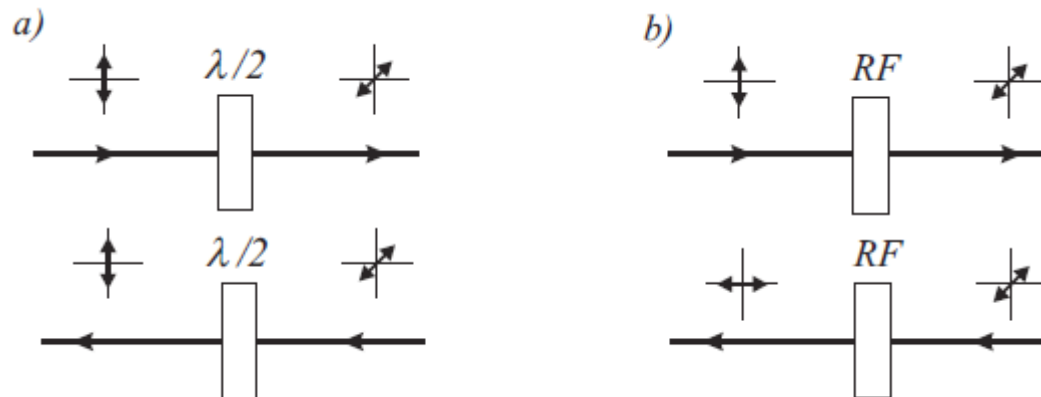
$$W_{RF,K} = \begin{bmatrix} e^{i\Gamma(H)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma(H)/2} \end{bmatrix}, \Gamma(H) = 2\pi\delta n(H)d/\lambda_0, \text{ w bazie polaryzacji kołowych}$$

W bazie polaryzacji liniowych: $W_{RF} = W_{K \rightarrow L} W_{RF,K} W_{L \rightarrow K}$

$$W_{RF} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\Gamma(H)/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma(H)/2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\Gamma(H)/2 & \sin\Gamma(H)/2 \\ -\sin\Gamma(H)/2 & \cos\Gamma(H)/2 \end{bmatrix}$$

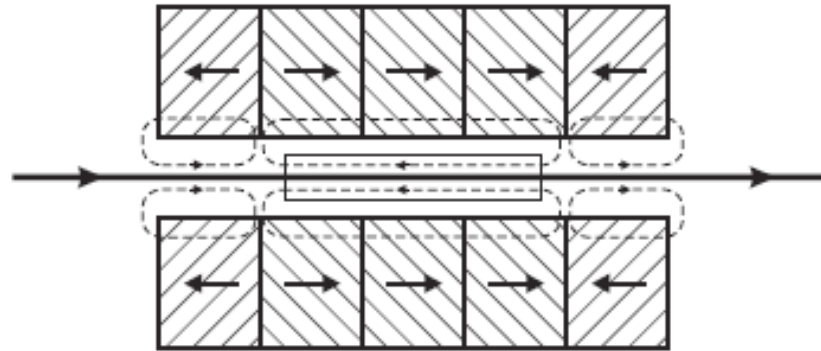
Obrót o kąt $\theta = \Gamma/2 = VdH$, V – stała Verdet, $\sim 10 \frac{\text{rad}}{\text{T m}} - 100 \frac{\text{rad}}{\text{T m}}$.

Obrót nie zależy od polaryzacji światła! (Za to zależy od długości fali)

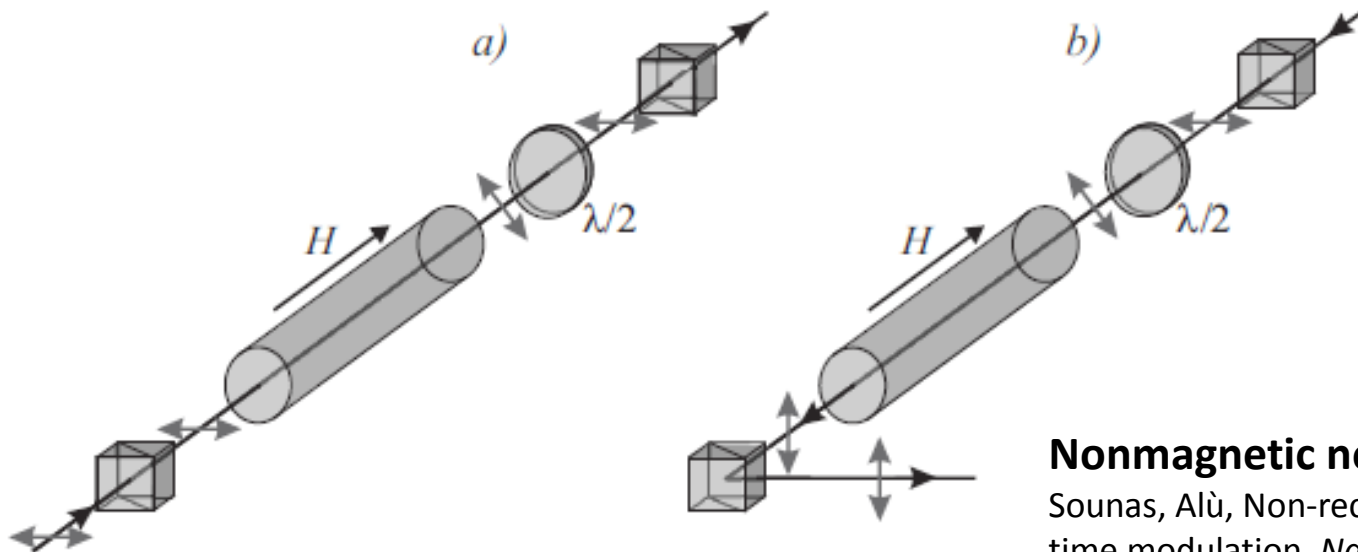


Nieodwracalność
(non-reciprocity)

Rotator Faradaya



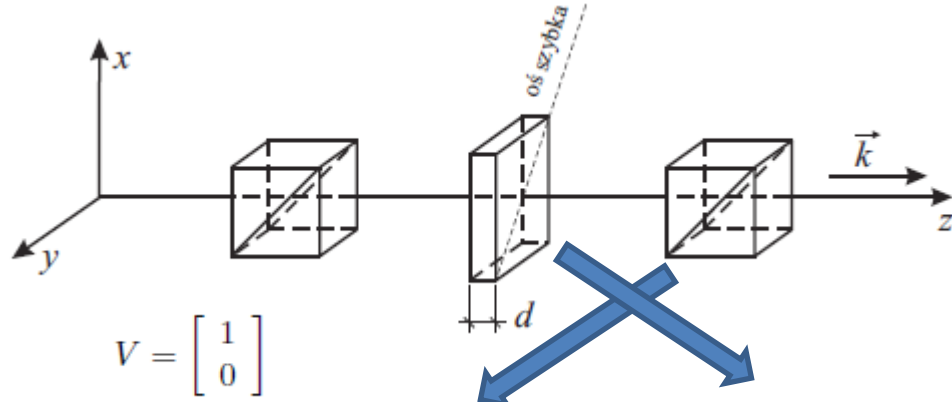
Izolator optyczny



Nonmagnetic non-reciprocal photonics

Sounas, Alù, Non-reciprocal photonics based on time modulation, *Nature Photon.* 11, 774 (2017).

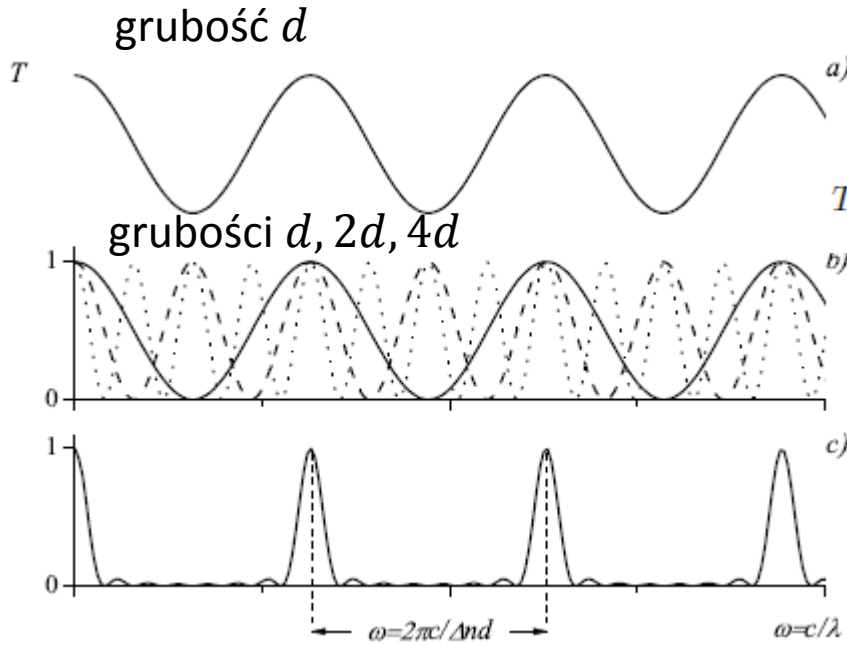
Filtr Lyota



$$V = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{-i\Gamma/2} \begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i \sin(\Gamma/2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



$$a) \quad V_{wy} = W V_{we} = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i \sin(\Gamma/2) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T = \cos^2\left(\frac{\Gamma}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{1}{2} \Delta n k_0 d\right) = \cos^2\left(\frac{\Delta n \omega d}{2c}\right) = \cos^2\left(\frac{2\pi \Delta n d}{2\lambda}\right)$$

Przestrajalny filtr Lyota

