

Przypomnienie – równanie falowe w próżni

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Kiedyś "przypadkiem" odkryliśmy rozwiązanie w postaci fali płaskiej...

Ale wiązki laserowe, wydaje się,
nie mają wiele z falą płaską wspólnego...

- skończone rozmiary poprzeczne
- dyfrakcja



Równanie falowe w próżni – całkiem inne rozwiązanie

Założenia:

- fala monochromatyczna o częstości ω
- pole skalarne
- symetria cylindryczna (wzdłuż osi z)
- wolnozmienna obwiednia
- przybliżenie przyosiowe

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \cdot e^{-i \left[kz - \text{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) \right]} \cdot e^{-i \frac{kr^2}{2R(z)}}$$

$$z_0 = \frac{\pi n w_0}{\lambda_0}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]$$

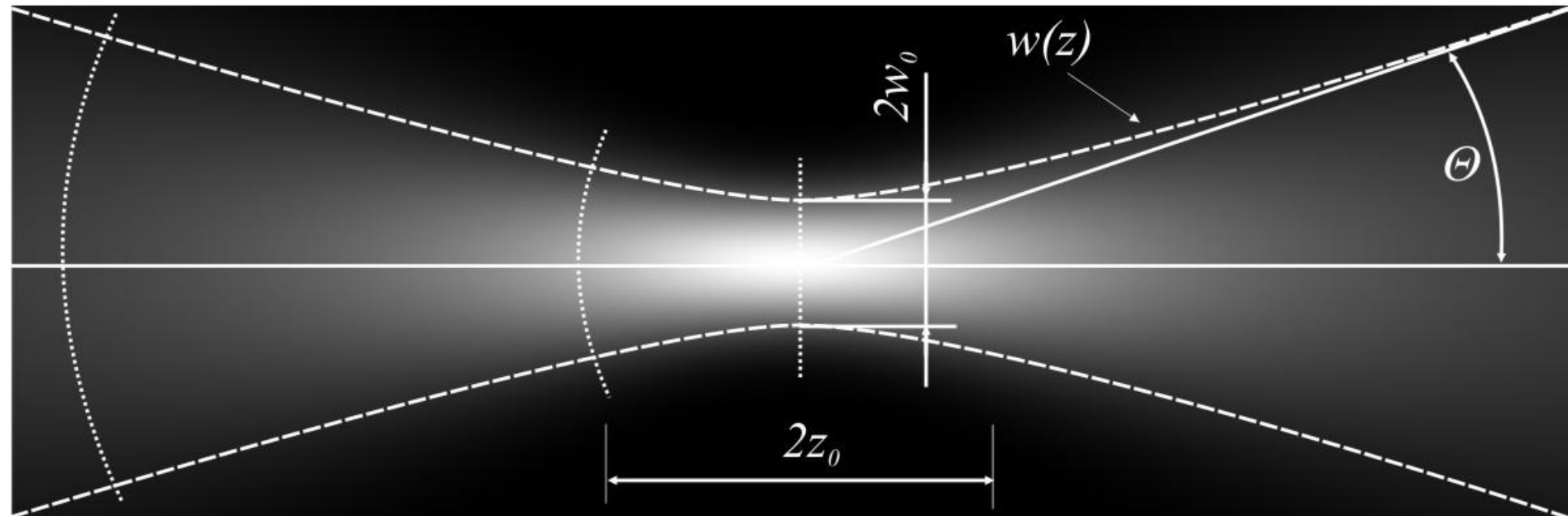
Równanie falowe w próżni – wiązka gaussowska

$$E(x, y, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}} \cdot e^{-i \left[kz - \text{tg}^{-1} \left(\frac{z}{z_0} \right) \right]} \cdot e^{-i \frac{kr^2}{2R(z)}}$$

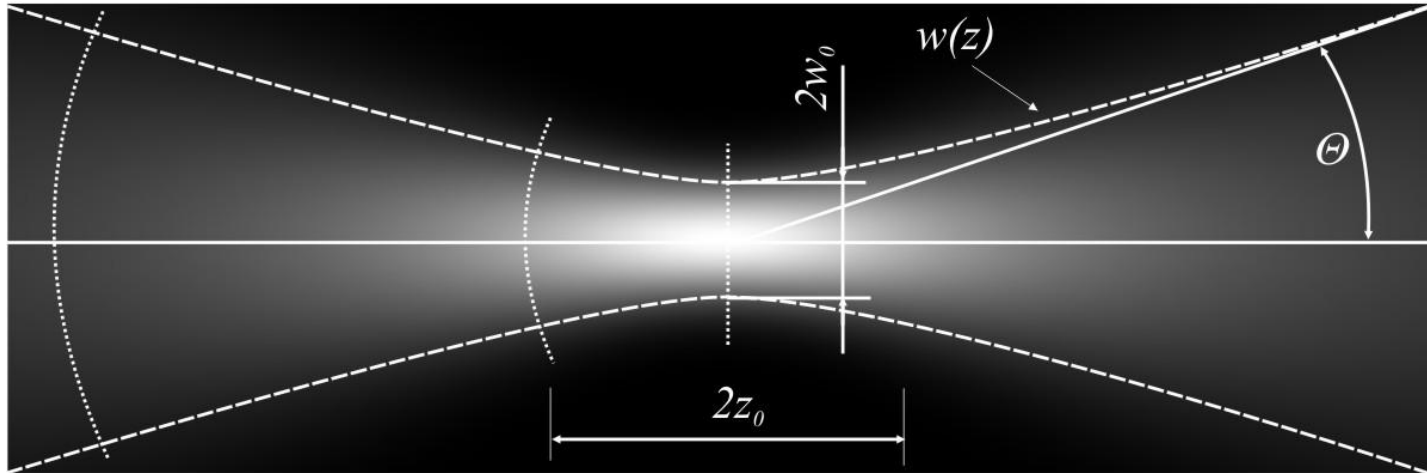
$$z_0 = \frac{\pi n w_0}{\lambda_0}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2}$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right]$$



Parametry wiązki gaussowskiej



- zasięg Rayleigha (*Raleigh range*)
- rozmiar przewężenia (*waist diameter*)
- rozbieżność (*divergence angle*)

$$\theta = \frac{\lambda_0}{\pi n w_0}$$

wiązka gaussowska

trochę porządków w rachunkach:

$$A(x, y, z) = A_0 \psi(x, y, z) e^{-ikz} = \frac{A_0}{\sqrt{1 + (z/z_0)^2}} \cdot e^{i[-kz + \arctan(z/z_0)]} \cdot e^{\frac{-ikr^2}{2(i z_0 + z)}}$$

przyjrzyjmy się wyrażeniu

$$\frac{i}{i z_0 + z} = \frac{z}{z^2 + z_0^2} - i \frac{z_0}{z^2 + z_0^2}$$

zatem

$$\frac{-ikr^2}{2(i z_0 + z)} = -\frac{k z_0 r^2}{z^2 + z_0^2} - i \frac{k z r^2}{z^2 + z_0^2} = -\frac{r^2}{w^2(z)} - i \frac{k r^2}{2R(z)}$$

dwa nowe parametry to:

- rozmiar (promień) wiązki $w(z)$ oraz
- promień krzywizny frontu falowego $R(z)$

zdefiniowane r-niami

$$w^2(z) = \frac{2(z^2 + z_0^2)}{k z_0} = \frac{\lambda z_0}{\pi n} [1 + (z/z_0)^2]$$

$$R(z) = \frac{z^2 + z_0^2}{z} = z [1 + (z/z_0)^2]$$

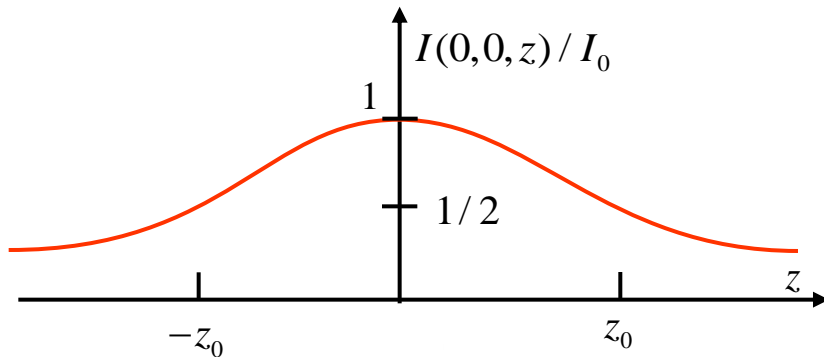
$w(z)$ i $R(z)$ są powiązane z **parametrem q** wiązki gaussowskiej:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

wiązka gaussowska – własności, 2

Natężenie $I = |A(x, y, z)|^2 = A_0^2 \left(\frac{w_0}{w(z)}\right)^2 e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}$

natężenie na osi: $I(0,0,z) = \frac{I_0}{1+(z/z_0)^2}$



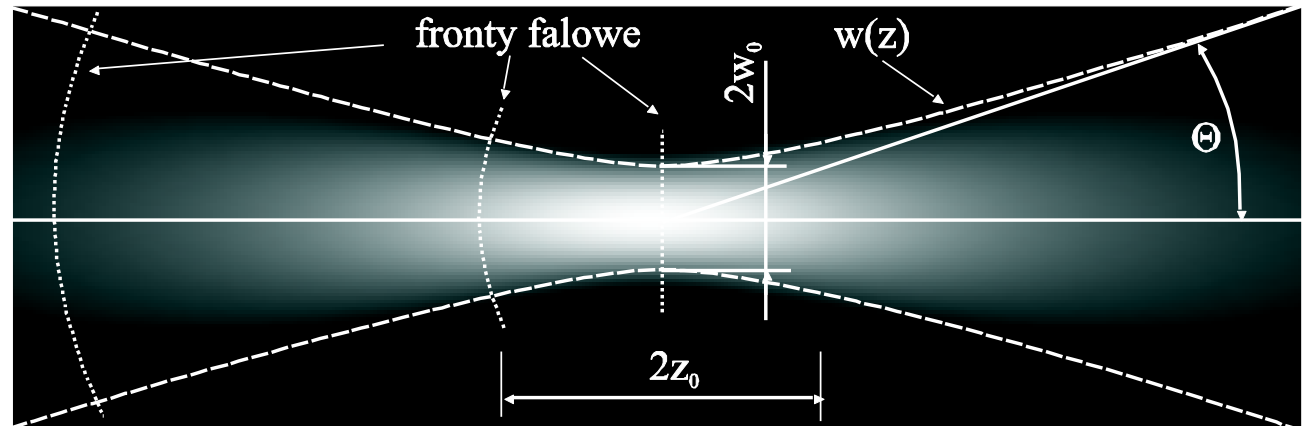
moc wiązki: $P = \int_0^\infty I(r, z) 2\pi r dr = \frac{1}{2} I_0 \pi w_0^2$
 % mocy na kole o promieniu r_0

$$\frac{1}{P} \int_0^{r_0} I(r, z) 2\pi r dr = 1 - e^{-\frac{2r_0^2}{w_0^2}}$$

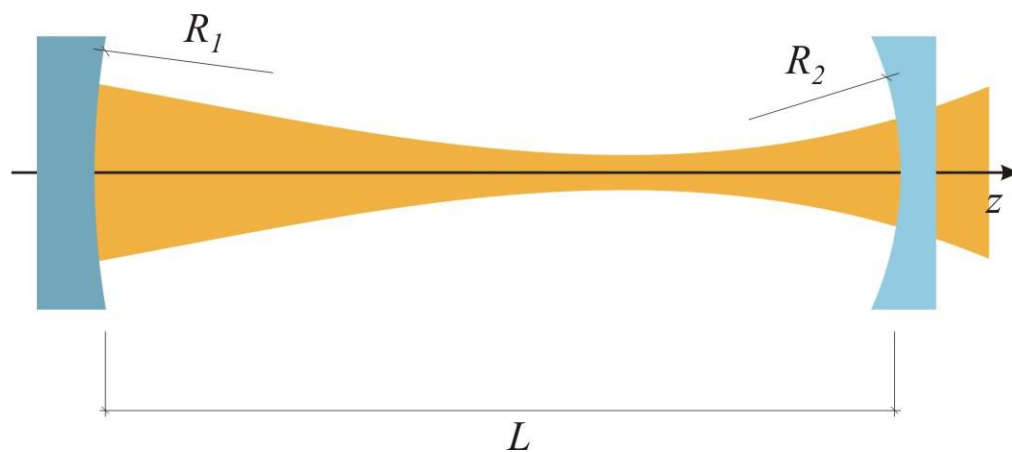
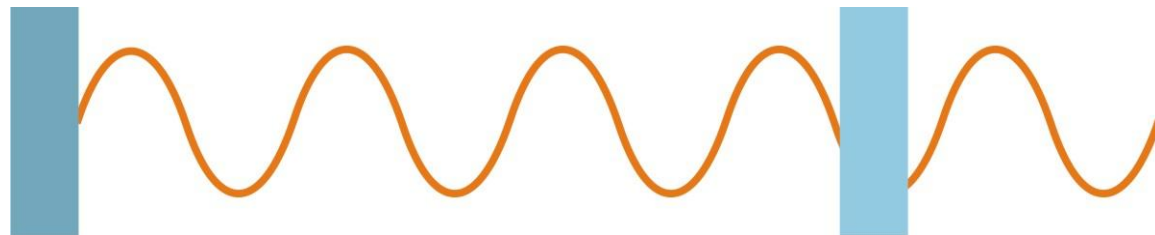
% mocy wiązki za żyłką:

$$\frac{1}{P} \int_{-\infty}^x dx I(x, y, z) \int_{-\infty}^\infty dy = \text{erf}(x)$$

gdzie $\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$



Przykład nowego myślenia: wiązka gaussowska w rezonatorze

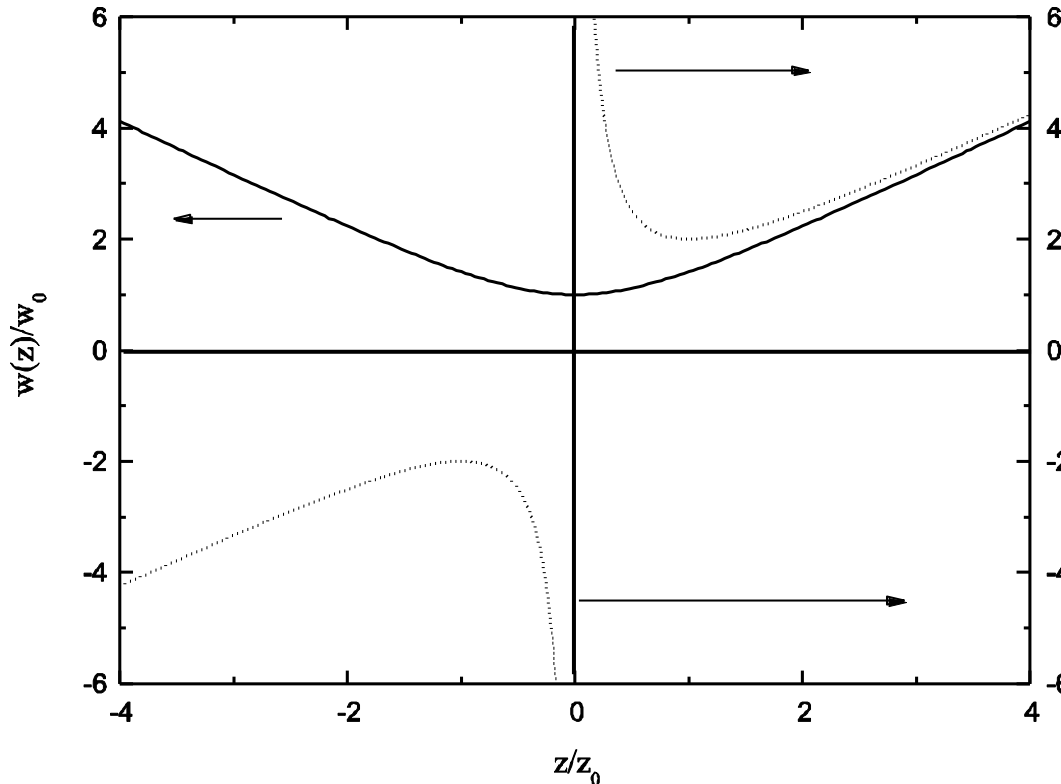


wiązka gaussowska – własności, 3

fronty falowe: $A(x, y, z) \propto e^{-ik\left(z - \frac{r^2}{2R(z)}\right)}$

fronty falowe są **paraboliczne=sferyczne** a promień sfery to

$$R(z) = \frac{z^2 + z_0^2}{z} = z\left[1 + (z/z_0)^2\right]$$

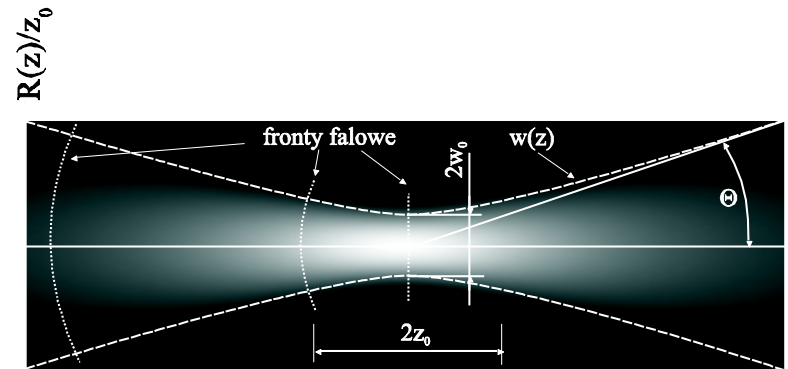


minimalna wartość krzywizny frontu falowego to

$$R(z_0) = 2z_0$$

a asymptota

$$\lim_{z \rightarrow \infty} R(z) = z$$



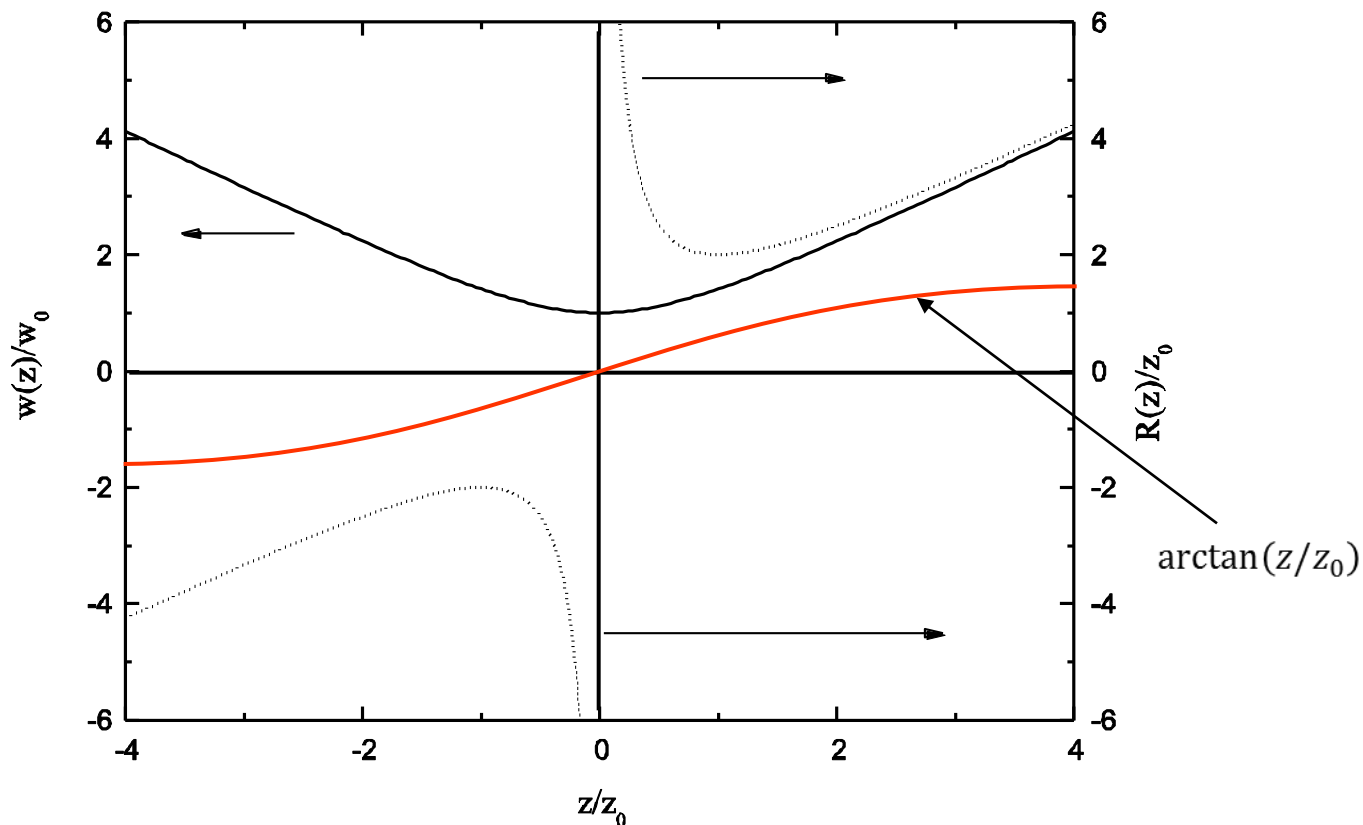
konwencja znaków!

wiązka gaussowska- własności 4

$$\text{faza na osi } A(x, y, z) \propto e^{-i[kz + \arctan(z/z_0)]}$$

faza fali płaskiej

faza Guoya



wiązki Gaussa-Hermita

$$\text{Wiązka Gaussa: } A_G(x, y, z) = \frac{A_0}{q(z)} e^{-ikz} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}}$$

rozwiązanie próbne dla szerszej klasy wiązek: $A(x, y, z) = X(u)Y(v)e^{iL(z)}A_G(x, y, z)$, $u = \frac{\sqrt{2}x}{w(z)}$, $v = \frac{\sqrt{2}y}{w(z)}$

spełnia warunki

- amplituda wiązki: $X\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right)Y\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right)\frac{w_0}{w(z)}e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}$
- kształt frontów falowych jak w wiązce gaussowskiej

X, Y - wielomiany Hermita H_l, H_m

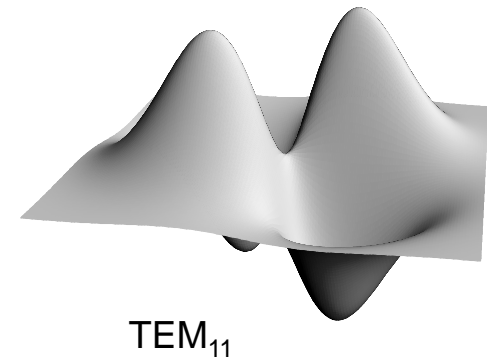
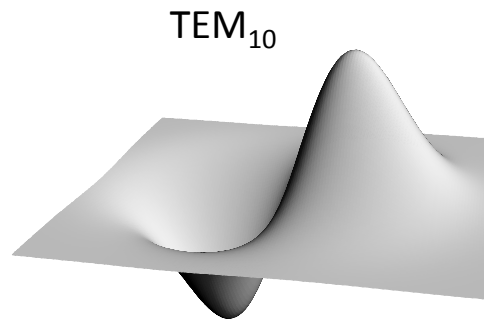
Rekurencyjna definicja wielomianu Hermita

$$H_{l+1}(u) = 2uH_l(u) - 2lH_{l-1}(u)$$

$$H_0(u) = 1, H_1(u) = 2u$$

$$\varphi(z) = (1 + l + m)\arctan(z/z_0)$$

mody TEM_{lm}



parametr M^2 wiązki

W przewężeniu wiązki wyznaczamy jej rozmiary

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\int x^2 I(x,y,0) dx dy}{\int I(x,y,0) dx dy}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\int y^2 I(x,y,0) dx dy}{\int I(x,y,0) dx dy}}$$

Fakt: w dalekim polu rozkład natężenia zachowuje kształt a rozmiary wiązki rosną liniowo z odległością od przewężenia $I(x, y, Mz) = \frac{1}{M^2} I(x, y, z)$

dzięki czemu kąty rozbieżności wiązki w dalekim polu są dobrze zdefiniowane i możemy policzyć ich wariancje

$$\Theta_x = \lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\int \Theta_x^2 I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}{\int I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}}, \quad \Theta_y = \lim_{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\int \Theta_y^2 I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}{\int I(\Theta_x, \Theta_y, z) d\Theta_x d\Theta_y}}$$

dla wiązki gaussowskiej

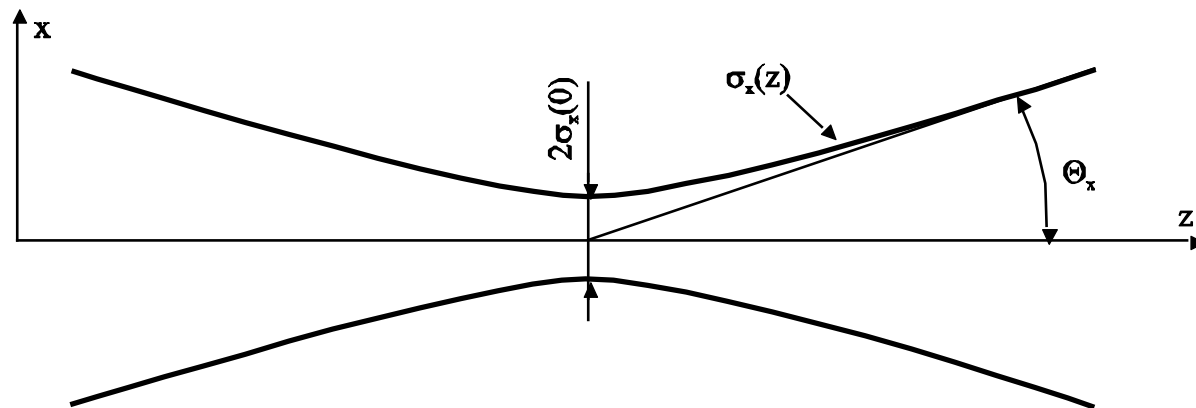
$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_G = w_0$$

$$\Theta_x = \Theta_y = \Theta_G = w_0 / z_0$$

a iloczyn

$$\sigma_G \Theta_G = \lambda / \pi$$

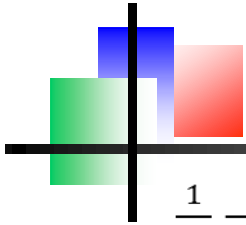
jest najmniejszy



dla każdej innej wiązki o danych σ i Θ

$$M^2 = \frac{\sigma \Theta}{\sigma_G \Theta_G} > 1$$

wiązka gaussowska i soczewka



$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f}$$

czyli

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}$$

jednocześnie

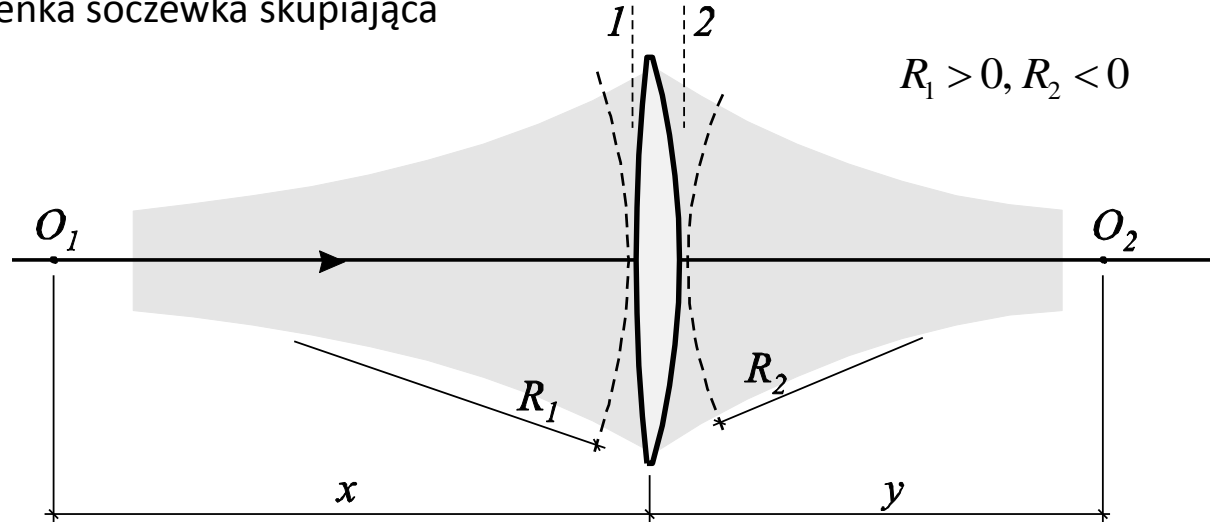
$$w_2 = w_1$$

Możemy policzyć parametr q wiązki za soczewką

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_2} &= \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda}{\pi w_2} = \\ &= \frac{1}{R_1} - i \frac{\lambda}{\pi w_1} - \frac{1}{f} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}$$

cieńka soczewka skupiająca



$$R_1 > 0, R_2 < 0$$

Przykład:

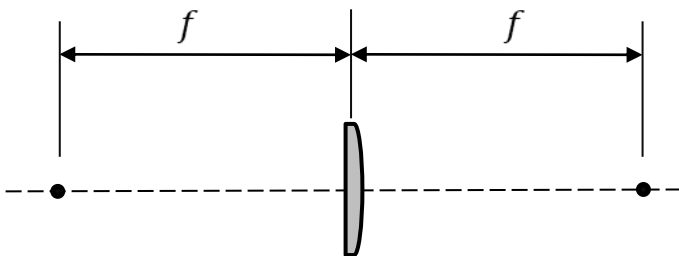
przewężenie wiązki o danym z_0 w przedniej płaszczyźnie ogniskowej $q_1 = iz_{01} + f$ bo obowiązuje formuła $q(z + d) = q(z) + d$

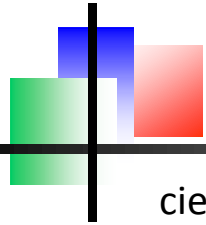
$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f} = \frac{1}{iz_{01} + f} - \frac{1}{f} \Rightarrow q_2 = -f + i \frac{f^2}{z_{01}}$$

W tylnej płaszczyźnie ogniskowej soczewki mamy

$$q_3 = q_2 + f = i \frac{f^2}{z_{01}} - \text{urojone } q \text{ oznacza przewężenie } q_3 = iz_{03} = \frac{f^2}{z_{01}}$$

$$w_{01} w_{03} = \sqrt{\frac{\lambda z_{01}}{\pi}} \sqrt{\frac{\lambda z_{03}}{\pi}} = \sqrt{\frac{\lambda^2 z_{01} z_{03}}{\pi^2}} = \frac{\lambda f}{\pi}$$





propagacja w.g.; przykład 1

cieńka soczewka skupiająca, przewężenie wiązki wejściowej na soczewce

macierz układu

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - d/f & d \\ -1/f & 1 \end{bmatrix}$$

w płaszczyźnie 1

$$q_1 = iz_{01}, \quad \frac{1}{q_1} = -\frac{i}{z_{01}}$$

korzystamy ze związku

$$\frac{1}{q_2} = \frac{D \frac{1}{q_1} + C}{B \frac{1}{q_1} + A}$$

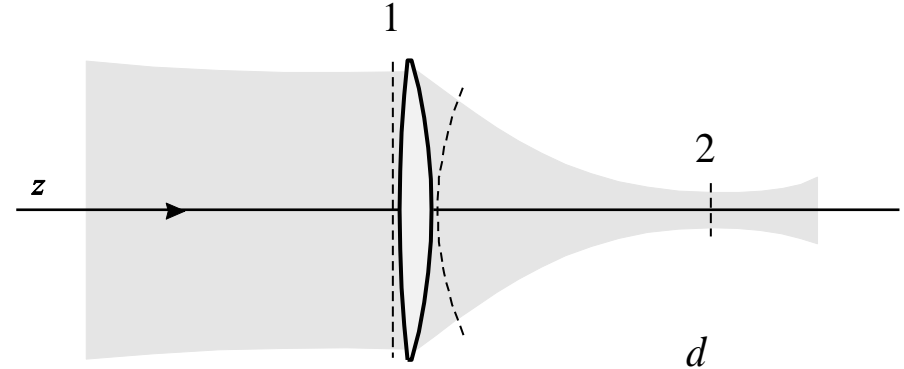
co daje

$$\frac{1}{q_2} = \frac{\frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}}{\frac{d}{z_{01}} + 1 - \frac{d}{f}} = \frac{1}{R_2} - i \frac{\lambda}{\pi w_2}$$

rachunki ...

$$R_2 = \frac{(d/z_{01})^2 + (1-d/f)^2}{\frac{d}{z_{01}^2} - (1/f)(1-d/f)}$$

$$w_2 = w_1 \sqrt{(1-d/f)^2 + (d/z_{01})^2}$$



- warunek na przewężenie

$$R_2 = \infty \Rightarrow d = \frac{f}{1 + (f/z_{01})^2}$$

- rozmiar wiązki w płaszczyźnie ogniskowej

$$w_2 = w_1 \frac{f}{z_{01}} = f \frac{\lambda}{\pi w_{01}}$$